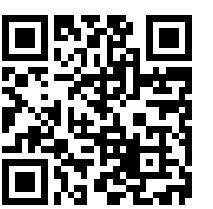
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

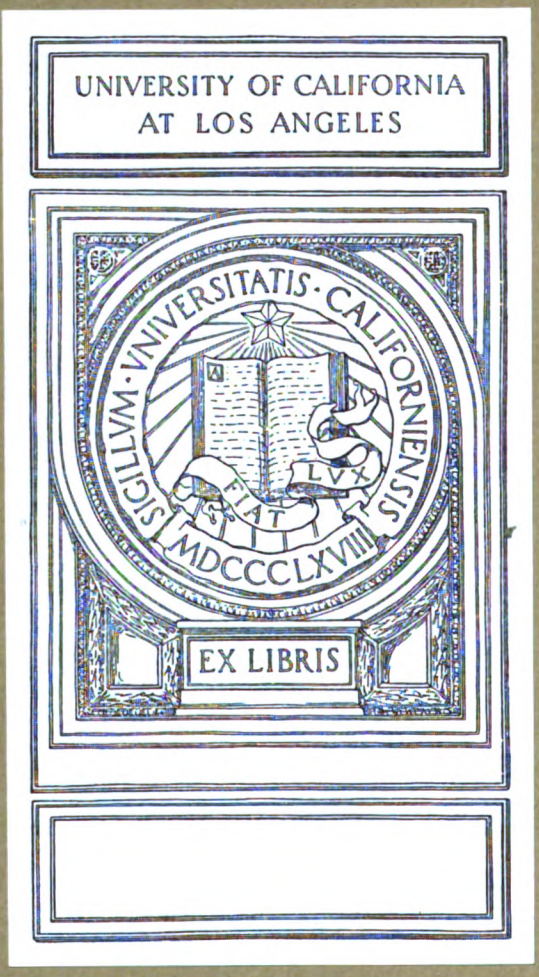
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Digitized by Google

QA1
A67
ser. 3
v. 18



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT
AUF DIE LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN
SOWIE DIE STUDIERENDEN DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

UNTER MITWIRKUNG VON E. LAMPE UND W. FR. MEYER

HERAUSGEGEBEN VON

E. JAHNKE
IN BERLIN.

18. BAND.

MIT 32 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1911.

Digitized by Google

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LOS ANGELES
LIBRARY

Digitized by Google

Engineering Mathematical Sciences Library
QA 1
A67
ser. 3
v. 18

Inhalt.

	Seite
Beck, Hans, in Charlottenburg. Ein Gegenstück zur projektiven Geometrie	43—53
—, Hyperbolische und pseudosphärische Geometrie des Raumes . . .	220—229
Blaschke, Wilhelm, in Greifswald. Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene. I. Mit 3 Figuren	132—140
Dinnik, A., in Nowotscherkask (Süd-Rußland). Tafeln der Besselschen Funktionen $J_{\pm\frac{1}{3}}$ und $J_{\pm\frac{2}{3}}$	337—338
Emch, Arnold, in Urbana, Illinois. The Differential Equation of Curves of Normal Stresses in a Plane. Mit 2 Figuren	316—322
Hopf, L., und Sommerfeld, Arnold. Über komplexe Darstellungen der Zylinderfunktionen. Mit 14 Figuren	1—16
Ignatowsky, Woldemar v., in Berlin. Das Relativitätsprinzip (Schluß)	17—40
—, Über die Reihenentwicklungen mit Zylinderfunktionen. Mit 1 Figur	322—327
Jopke, Arthur, in Breslau. Die kollineare Abbildung linearer Systeme 2. und 3. Stufe von Flächen 2. Grades in Ebene und Raum	113—131
Kewitsch, G., in Freiburg i. Br. Zur Entstehung des 60-Systems . .	165—168
Kürschák, Josef, in Budapest. Über die Liouvillesche Identität . . .	242—243
Landau, Edmund, in Göttingen. Über die Zerlegung positiver ganzer Zahlen in positive Kuben.	248—252
Maurer, Ludwig, in Tübingen. Bemerkungen zur mechanischen Quadratur von Gauß.	40—43
Menges, Karl, in Mainz. Über lamellare Rotationsbewegung viskoser Flüssigkeiten. Mit 1 Figur	327—337
Mikami, Yoshio, at Ōhara in Kazusa. Further Remarks on the Chinese Mathematics in Cantor's Geschichte der Mathematik	209—219
Mohrmann, Hans, in Karlsruhe. Über die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentenflächen als reziproke Linienflächen	66—68
Neuberg, Joseph, in Lüttich. Zur Tetraedergeometrie (Schluß). . . .	54—65
Salmon, W. H., in London. Some Properties of Four-nodal Cubic Surfaces, being Analogues of Pascal's Theorem and of the Nine-point Circle in Three Dimensions. Mit 1 Figur	154—164
Schumacher, Joh., in München. Das Colonel Titus's Problem	141—154
Simon, Max, in Straßburg. Zur Gerbert-Frage	244—248
Wagner, Karl Willy, in Berlin. Über Kabelprobleme und ähnliche Randwertaufgaben, die auf Reihenentwicklungen nach nicht orthogonalen Eigenfunktionen führen. Mit 2 Figuren	230—241
Zacharias, Max, in Berlin. Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten	289—315

395617

Digitized by Google

Rezensionen.

Seite

Abbe, E., Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Von **B. Donath** 352
Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn. Von **A. Baruch** 257
Ahrens, W., Gelehrten-Anekdoten. Von **E. Jahnke** 81
Alt, H., Schülerübungen zur Einführung in die Physik. Von **W. Bahrdt** . 256
Aus Natur und Geisteswelt. Illustrierter Katalog 1911. Von Verlag B. G. Teubner 359
Berg, O., Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik. Von **W. v. Ignatowsky** 185
Bianchi, L., Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Aufl. Von **E. Study** 169
Bidschof, Fr., und Vital, A., Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln. Von **E. Jahnke** 360
Busmann, F., Ein neuer Kegelschnittzirkel. Von **H. Wieleitner** 268
Capelli, A., Istituzioni di analisi algebrica. Von **O. Perron** 176
Carlebach, J., Lewi ben Gerson als Mathematiker. Von **Hoppe** 350
Christoffel, E. B., Gesammelte mathematische Abhandlungen. I und II. Von **O. Perron** 258
Crantz, P., Planimetrie zum Selbstunterricht. Von **H. Wieleitner** 268
Cranz, H., Linsensysteme und dioptrische Instrumente in elementarer Darstellung. Von **Chr. v. Hofe** 190
Crelier, L., Systèmes cinématiques. Von **H. Wieleitner** 265
Curie, Mme P., Traité de Radioactivité. Von **O. Hahn** 340
Darboux, G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Von **H. Jonas** 270
Donath, A., Repetitorium der Schulmathematik für Schüler höherer Lehranstalten. I. Teil: Arithmetik. Von **A. Baruch** 87
Düsing, K., Leitfaden der Kurvenlehre. Von **H. Wieleitner** 269
Dziobek, O., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von **H. E. Timerding** 77
Finger, Jos., Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und Technischen Hochschulen und zum Selbstunterricht. Von **E. Lampe** 263
Fischer, P. B., Koordinatensysteme. Von **H. Wieleitner** 266
Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis. Von **Cl. Schaefer** 349
Ganter, H., und Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. Von **W. Weber** 86
Gérard, E., Leçons sur l'électricité. Von **E. Jasse** 274
Gerber, P., Gravitation und Elektrizität. Von **W. v. Ignatowsky** 185
Gleichen, A., Die Grundgesetze der naturgetreuen photographischen Abbildung. Von **Chr. v. Hofe** 188
Graßmann, H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke. III. Band, 1. Teil. Von **E. Jahnke** 80
Grimsehl, E., Didaktik und Methodik der Physik. Von **E. Hoppe** 181
Hardy, G. H., Orders of infinity. Von **O. Perron** 83
Hâton de la Goupillière, Étude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques. Von **H. Wieleitner** 178
Hensel, K., Ernst Eduard Kummer und der große Fermatsche Satz. Von **A. Fleck** 95
Herting, G., Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral. Von **H. Wieleitner** 92

Digitized by Google

Seite

Hočevar, F., Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. Mittelstufe. Von **A. Baruch** 87
Hoffmann, B., Zur Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde. Von **P. B. Fischer** 193
Jaeckel, W., Geometrische Untersuchungen über Kurven auf Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten. Von **H. Wieleitner** 180
Jans, C. de, Over krommen van Clairaut, Boscovich en Playfair. Von **H. Wieleitner** 91
Kleiber, J., Experimentalphysik für die Unterstufe. Von **W. Bahrdt** . . . 255
Kleiber und Siepert, Experimentalphysik und -Chemie für die Oberstufe der höheren Mädchenbildungsanstalten. Von **W. Bahrdt** 254
Kneser, A., Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Von **A. Korn** 82
Koenigsberger, L., Über Helmholtz' Bruchstück eines Entwurfes, betitelt „Naturforscher-Rede". Von **P. B. Fischer** 192
Kohlrausch, Fr., Gesammelte Abhandlungen. I. Band. Von **W. H. Westphal** 191
Kommerell, V. und K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Bd. II. Von **H. Jonas** 273
Kommerell, V. und K., Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Von **H. Jonas** 273
Korn, A., Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Von **O. Perron** 83
Kowalewski, G., Das Integral und seine geometrischen Anwendungen. Von **O. Perron** 362
Kummer, E., Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Von **A. Fleck** 94
Lehmann, O., Das Kristallisationsmikroskop und die damit gemachten Entdeckungen, insbesondere die der flüssigen Kristalle. Von **B. Donath** . . 354
Lorenz, H., Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Von **E. Jahnke** 79
Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Von **H. Wieleitner** 179
Lutz, E., Analytische Geometrie der Ebene. Von **P. Zühlke** 89
Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung. Von **W. Bahrdt** 256
Mandl, M., Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Von **W. Weber** 88
Meth, B., Zur Erinnerung an Ernst Eduard Kummer als Lehrer. Von **E. Jahnke** 78
Michelson, A. A., Lichtwellen und ihre Anwendungen. Von **B. Seegert** . 187
Montel, P., Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. Von **O. Perron** 260
Müller, Baltin und Maiwald, Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Seminare und Präparandenanstalten. Von **J. Hillmann** 86
Nath und Kleiber, Physik für die Oberstufe. Von **W. Bahrdt** 255
Netto, E., Die Determinanten. Von **C. Färber** 82
Neuendorff, R., Praktische Mathematik I. Von **E. Jahnke** 256
Noack, R., Aufgaben für physikalische Schülerübungen. Von **E. Hoppe** . . 183
Poincaré, H., Leçons de la mécanique céleste. Tome I. Von **G. Respondek** 342
Poske, F., Die Zentrifugalkraft. Von **P. Johannesson** 60
Pringsheim, E., Vorlesungen über die Physik der Sonne. Von **R. Pohl** . 180
Prochnow, O., Vogelflug und Flugmaschinen. Von **P. B. Fischer** 192
Roeser, E., Die Verfolgungskurve auf der Kugel. Von **H. Wieleitner** . . . 91
Rohr, M. v., Die optischen Instrumente. Von **Chr. v. Hofe** 355

Digitized by Google

Seite

Runge, C., Analytische Geometrie der Ebene. Von **P. Zühlke** 90
Sanderson, F. W., and Brewster, G. W., A Geometry for Schools. Von **H. Wieleitner** 269
Schotten, H., Friedrich Pietzker. Von **E. Jahnke** 360
Schoy, C., Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Von **P. B. Fischer** 193
Séférian, A., Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. Von **E. Jahnke** 257
Stallo, J. B., Die Begriffe und Theorien der modernen Physik. Von **E. Hoppe** 351
Starke, H., Experimentelle Elektrizitätslehre. Von **R. Gans** 93
Tannery, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Von **O. Perron** 360
Teubner, B. G., 1811—1911. Geschichte der Firma. Von **E. Jahnke** . . . 339
Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Von **W. Bahrdt** 253
Trabert, W., Lehrbuch der kosmischen Physik. Von **P. Schwahn** 356
Vailati, Scritti di G. Von **H. Wieleitner** 267
Veblen, O., and Young, J. W., Projective Geometry. Vol. I. Von **H. Beck** 94
Verlagskatalog von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig 1786—1911. Von **E. Jahnke** 340
Vivanti, G., Les fonctions polyédriques et modulaires. Von **O. Perron** . . 259
Voigt, W., Lehrbuch der Kristallphysik. Von **W. v. Ignatowsky** 184
Walther-Jenson, Mathematischer Lehr- und Übungsgang für höhere Mädchenschulen, Lyzeen und Studienanstalten. Von **P. Henckel** 88
Wangerin, A., Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Bd. I. Von **Cl. Schaefer** 350
Weber, H., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Von **W. v. Ignatowsky** 194
Weber, K., Lehrbuch der Planimetrie für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Von **A. Baruch** 358
—, Lehrbuch der Trigonometrie. Lehrbuch der Stereometrie. Von **A. Baruch** 358
Weber, R., Beispiele und Übungen aus Elektrizität und Magnetismus. Von **E. Jasse** 186
Wellisch, S., Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. II. Band. Von **K. Fuhrmann** 341
Werth, H., Das Licht, ausführliche und allgemeinverständliche Darstellung. Von **Chr. v. Hofe** 356
Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten Bayerns. Von **O. Degel** 261
Zehnder, L., Grundriß der Physik. Von **B. Donath** 353
Zeitschrift für die exakten Wissenschaften: „Helmholtz". Von **P. B. Fischer** 192
Zimmermann, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Von **F. Emde** 178

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze. **358—375.** Von **L. Braude, C. Hoffmann, E. Jahnke, G. Kober, J. Neuberg, O. Schenker, P. Stäckel, W. Weber** 96, 195, 277, 363

Digitized by Google

Seite

B. Lösungen: Zu **280** (O. Schenker) von **W. Weber** 196
Zu **318** (H. Wieleitner) von **C. Hoffmann, H. Schürmann, W. Stegemann, A. Basch** 97
Zu **323** (W. Blaschke) von **C. Hoffmann** 98
Zu **327** (E. Jahnke) von **A. Baruch** 99
Zu **328** (J. Neuberg) von **W. Stegemann, J. v. Sz. Nagy** . 196
Zu **329** (J. Neuberg) von **O. Degel, J. v. Sz. Nagy** 363
Zu **330** (G. Kober) von **A. Schmid, G. Kober** 198
Zu **331** (G. Kober) von **C. Hoffmann, G. Kober, A. Schmid** 100, 199
Zu **334** (Ph. Weinmeister) von **Ph. Weinmeister** 200
Zu **340** (E. N. Barisien) von **W. Gaedecke, C. Hoffmann** . 201
Zu **341** (E. N. Barisien) von **W. Gaedecke, C. Hoffmann, O. Degel** 277
Zu **342** (G. Kober) von **L. Klug, C. Hoffmann, W. Stegemann, O. Degel** 280
Zu **343** (G. Kober) von **L. Klug, G. Kober, O. Degel** . . . 282
Zu **345** (St. Jolles) von **L. Klug** 202
Zu **346** (C. Hoffmann) von **W. Gaedecke, C. Hoffmann, W. Wangerin, W. Stegemann** und den stud. **Werner, Goll, Fladt** 283
Zu **349** (Fr. Meyer) von **G. Kober, E. Jahnke, C. Hoffmann** 285
Zu **351** (Fr. Meyer) von **C. Hoffmann, W. Wangerin** . . . 286
Zu **353** (R. Mehmke) von **C. Hoffmann** 364
Zu **354** (R. Mehmke) von **G. Kober, O. Degel** 286, 365
Zu **355** (R. Mehmke) von **C. Hoffmann** 366
Zu **356** (R. Mehmke) von **O. Degel** 369
Zu **354—357** (R. Mehmke) von **R. Mehmke** 370
Zu **358** (J. Neuberg) von **A. Baruch, C. Hoffmann, H. Filzer, O. Elsner, W. Wenk, W. Stegemann, W. Gaedecke** 371
Zu **365** (L. Braude) von **C. Hoffmann** 372

2. Kleinere Notizen.

Über einige Nullrelationen zwischen den elliptischen Thetafunktionen. Von **A. Baruch** 101
On a certain class of surfaces, the volumes of the solids bounded by which can be found by the prismoidal formula. Von **T. Hayashi** 102
Ein überraschendes Zahlenspiel. Von **H. Martus** 373
Bemerkung zu dem Aufsatze „Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen" von Fr. Nölke in Bremen. Von **E. Schultz** . . . 104
Entgegnung auf die Notiz des Herrn Prof. E. Schultz zu dem Aufsatze „Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen". Von **Fr. Nölke** 105
Zur indischen Trigonometrie. Von **M. Simon** 202
Zu Ḥwarizmi's hisâb al ǵabr wal muqâbala. Von **M. Simon** 202

3. Sprechsaal.

Vermeintliche Beweise des Fermatschen Satzes. 100—111 (H. Haedicke, O. Heck, J. Chr. Heuschmann, J. Hoffmann, St. Holba, Karnasch, B. Lind, W. Müller, F. Nottebohm, A. Ochitowitsch, E. Sasse, Jos. Umfahrer). Besprochen von **A. Fleck** und **O. Perron** 105, 204, 288
Zur Besprechung meiner Schrift über die Zentrifugalkraft (vgl. S. 69—77). Von **F. Poske** . . . . . 373—374

Digitized by Google

Seite

Berichtigungen zu den Funktionentafeln von Jahnke-Emde. Von **A. Dinnik, F. Emde, E. Jahnke, Cl. Schaefer** 204, 374
Gründung einer rheinisch-westfälischen Vereinigung zur Pflege der exakten Wissenschaften. Von **Reisner** in Essen. 203
4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 109, 206, 288, 375

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Seite

86. Sitzung am 25. Januar 1911 . . . . . **10**, 27
87. „ „ 22. Februar 1911 . . . . . „ 27
88. „ „ 29. März 1911 . . . . . „ 27
89. „ „ 26. April 1911 . . . . . „ 75
90. „ „ 27. Mai 1911 . . . . . „ 75
91. „ „ 28. Juni 1911 . . . . . „ 111

K. Jonas, Über die Komposition der Moutardschen Transformationen . 101—108
J. Knoblauch, Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz . . . . . 96—101
M. Koppe, Beweis des Pohlkeschen Satzes . . . . . 108—109
E. Lampe, Zum Gedächtnis von Dr. Arthur Hamburger . . . . . 70—74
—, Über ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln, Kubikwurzeln usw. aus gegebenen Zahlen. (Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn O. Parlow) . . . . . 76—88
L. Lichtenstein, Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen . . . . . 55—69
H. Poincaré, Sur les courbes tracées sur une surface algébrique . . . 28—55
G. Scheffers, Die Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie. Mit 8 Figuren im Text . . . . . 88—95
H. E. Timerding, Die Infinitesimalrechnung auf der Schule . . . . . 112—133

Glückwunschadresse zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner 110
Mitgliederverzeichnis . . . . . 134—138
Inhalt der Bände **1—10** . . . . . 139—144

Digitized by Google

Über komplexe Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen.

Von L. Hopf und A. Sommerfeld.

In einer Arbeit über die „Mathematische Theorie der Diffraktion“[1]) hat der eine von uns neue komplexe Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen angegeben, die sich in der Folge als sehr handlich und besonders bei Problemen der mathematischen Physik anwendbar erwiesen haben. Indes sind diese Darstellungen in der zitierten Arbeit auf einem sehr komplizierten Wege abgeleitet; es wird dort nämlich allgemein eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ in eine Lösung der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ verwandelt, und als einfachster Fall einer derartigen Verwandlung — als Vorbereitung für die komplizierteren Funktionen, welche das Beugungsproblem lösen — werden die Zylinderfunktionen behandelt.

Will man aber nur diesen einfachsten Fall betrachten, so ist es nicht nötig, auf einem solchen Umweg zu gehen; wir entsprechen einem Wunsche der Redaktion, wenn wir im folgenden jene Integraldarstellungen in einfacher Weise ableiten und in ihrer Verwendbarkeit demonstrieren.

§ 1. Ableitung aus der Differentialgleichung.

Als Zylinderfunktionen definieren wir die Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

im Falle der Einführung von Zylinderkoordinaten r, φ, z bei Unabhängigkeit der Lösung von der z-Koordinate und rein harmonischer Abhängigkeit vom Azimut φ, also wenn

$$u = Z(r) e^{i n \varphi}.$$

Wir bauen diese Lösungen — welche den Zylinderwellen entsprechen — anschaulich auf aus den Lösungen im einfacheren Fall

1) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47, S. 317. 1895.

Digitized by Google

der ebenen Wellen, d. i. bei Unabhängigkeit von zwei rechtwinkligen Koordinaten; in diesem Falle lautet Gleichung (1):

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0,$$

und ihre Lösung ist die ebene Welle:

$$u = ae^{\pm ikx}. \tag{2}$$

Die Lösung in unserem zweidimensionalen Fall können wir uns entstanden denken aus solchen ebenen Wellen, welche nicht nur in der x-Richtung, sondern in jeder beliebigen Richtung ξ verlaufen. Wir müssen deshalb noch einen Winkelparameter α einführen, welcher die Drehung der ξ-Richtung gegen die x-Achse anzeigt. Es ist dann:

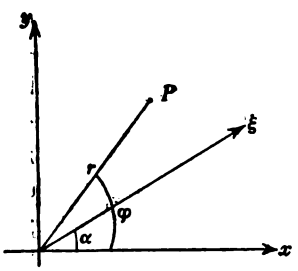


Fig. 1.

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha = r\cos(\varphi - \alpha).$$

Der Ausdruck einer in der ξ-Richtung verlaufenden ebenen Welle wird also sein:

$$u = ae^{\pm ikr\cos(\varphi-\alpha)},$$

wobei nun aber die Amplitude a vom Parameter α abhängen kann.

Da wir aus solchen Elementen die gesuchte Lösung zusammensetzen wollen, haben wir ein Integral zu bilden und dann die Integrationsgrenzen, sowie die Abhängigkeit der Amplitude a von α so zu bestimmen, daß die Forderung rein harmonischer Abhängigkeit von φ erfüllt ist.

Wir erhalten:

$$\int_A^B a(\alpha)e^{\pm ikr\cos(\varphi-\alpha)}d\alpha = \int_{A-\varphi}^{B-\varphi} a(\varphi + w)e^{\pm ikr\cos w}dw.$$

a hängt in dem zweiten Integral nur von $\varphi + w$ ab; soll also die Abhängigkeit von φ durch $e^{in\varphi}$ gegeben sein, so muß es die Gestalt haben:

$$a = \text{const} \cdot e^{in(\varphi+w)}.$$

Die Integrationsgrenzen $A - \varphi$ und $B - \varphi$ sind aus demselben Grunde so zu bestimmen, daß sie von φ unabhängig werden; das ist offenbar im allgemeinen nur dann der Fall, wenn A und B ins Unendliche rücken. Natürlich ist hierbei auf die Konvergenz der Integrale Rücksicht zu nehmen; die Grenzen müssen also andere werden, je nachdem wir im Exponenten $\pm ikr\cos w$ das obere oder das untere Vorzeichen nehmen. Vorausgesetzt daß kr positiv reell sei, muß z. B. im ersteren Falle der Integrationsweg in Gebieten beginnen und endigen,

Digitized by Google

wo $\cos w$ einen positiv imaginären Teil hat, im letzteren Fall in Gebieten, wo $\cos w$ einen negativ imaginären Teil hat. Nehmen wir darauf Rücksicht, so können wir die Zylinderfunktionen allgemein darstellen in der Form:

$$Z = \text{const} \cdot \int e^{inw} e^{\pm ikr\cos w} dw. \tag{3}$$

Obwohl es eigentlich überflüssig ist, wollen wir dies Resultat noch verifizieren. Wir führen also in (1) ein:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad u = Z(r) e^{in\varphi}$$

und gelangen dann zu der bekannten Differentialgleichung der Zylinderfunktionen:

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dZ}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) Z = 0. \tag{4}$$

Setzen wir den Ausdruck (3) ein, so erhalten wir auf der linken Seite von (4):

$$\int dw\, e^{inw} e^{\pm ikr\cos w}\left[-k^2\cos^2 w \pm \frac{ik\cos w}{r} + k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right]. \tag{5}$$

Wir formen das Integral $\int dw e^{inw} e^{\pm ikr\cos w} \cdot \frac{ik\cos w}{r}$ durch partielle Integration um und erhalten, da an den Grenzen $e^{\pm ikr\cos w}$ verschwindet:

$$\int dw e^{inw} e^{\pm ikr\cos w} \cdot \frac{ik\cos w}{r} = \int dw e^{inw} e^{\pm ikr\cos w}\left[\frac{kn\sin w}{r} \mp k^2\sin^2 w\right]$$

$$= \int dw e^{inw} e^{\pm ikr\cos w}\left[\pm\frac{n^2}{r^2} \mp k^2\sin^2 w\right].$$

Setzen wir dies Resultat in (5) ein, so ist Gleichung (4) verifiziert.

§ 2. Die Hankelschen Funktionen.

Definition für reelles Argument: Schreiben wir $w = w_1 + iw_2$, so ist leicht einzusehen, daß

$$\cos w = \cos w_1 \mathfrak{Cof}\, w_2 - i\sin w_1 \mathfrak{Sin}\, w_2$$

auf der komplexen w-Ebene in allen Gebieten, welche in Fig. 2 schraffiert sind, einen positiv imaginären Teil hat, in allen andern einen negativ imaginären Teil. Es wird deshalb das natürlichste sein, wenn wir als fundamentale Funktionen, aus denen sich jede Lösung der Differentialgleichung (1) bei den angegebenen Symmetriebedingungen aufbauen läßt, zunächst für reelles Argument die folgenden definieren:

$$H_n^{(1)}(z) = \text{const} \int_{\mathcal{A}} e^{inw} e^{iz\cos w} dw, \tag{7}$$

Digitized by Google

wobei der Weg A aus dem positiv Unendlichen des Streifens I etwa über $w = 0$ nach dem negativ Unendlichen des Streifens II führt, und

$$H_n^{(2)}(z) = \text{const} \int_{A'} e^{inw} e^{-iz\cos w} dw, \tag{8}$$

wobei der Weg A' aus dem negativ Unendlichen des Streifens I etwa über $w = 0$ nach dem positiv Unendlichen des Streifens II führt.

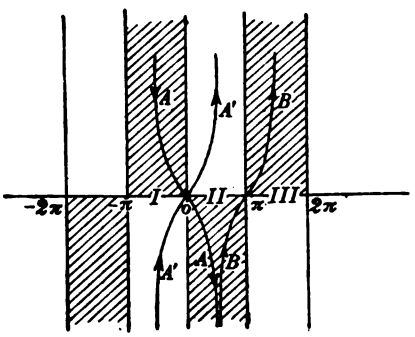


Fig. 2. w-Ebene

Letzteren Ausdruck können wir auf gleichen Integranden wie (7) bringen, indem wir statt w die Variable $w + \pi$ einführen (welche wir wieder mit w bezeichnen). Dann wird:

$$H_n^{(2)}(z) = \text{const} \int_{B} e^{inw} e^{iz\cos w} dw, \tag{9}$$

wobei ein Faktor $e^{-in\pi}$ in die Konstante hereingenommen ist, und nun der Weg B im negativ Unendlichen des Streifens II beginnt und etwa über $w = \pi$ nach dem positiv Unendlichen des Streifens III gelangt.

Die beiden Funktionen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$, welche den beiden Funktionen e^{+iz} und e^{-iz} entsprechen (den Lösungen der Differentialgleichung (1) im linearen Falle), werden identisch mit den Zylinderfunktionen, welche man (nach Nielsen) die Hankelschen zu nennen pflegt, wenn wir noch die unbestimmte Konstante in (7) und (9) festsetzen als

$$\text{const} = \frac{1}{\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}}. \tag{9a}$$

Man trifft gerade diese Festsetzung, weil dadurch $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ für reelles Argument konjugierte Funktionen werden. Am leichtesten sieht man dies, wenn man in (8) die neue Variable $-w$ einführt und beachtet, daß die Konstante jetzt entsprechend als

$$\frac{1}{\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}} \cdot e^{+in\pi}$$

festgesetzt ist.

Komplexes Argument; Verhalten im Unendlichen: Schreiben wir $z = \varrho e^{i\vartheta}$, so nimmt der reelle Teil des Exponenten $iz\cos w$ die Gestalt an:

$$\varrho(\cos\vartheta \sin w_1 \operatorname{Sin} w_2 - \sin\vartheta \cos w_1 \operatorname{Cof} w_2).$$

Für große positive w_2 schreiben wir einfacher $\frac{\varrho}{2} e^{w_2} \sin(w_1 - \vartheta)$.

Digitized by Google

Der Weg A muß in einem Gebiete beginnen, wo dieser Ausdruck negativ wird, d. h. wo

$$-\pi+\vartheta<w_1<\vartheta.$$

Dies entspricht für $\vartheta=0$ dem Streifen I in Fig. 2, rückt für positive ϑ nach rechts und für negative ϑ nach links, wie in Fig. 3 gezeichnet ist.

Analog bekommt $i\varrho\cos w$ für große negative w_2 die Gestalt:

$$-\frac{\varrho}{2}e^{-w_2}\sin(w_2+\vartheta).$$

Das Gebiet, in welchem A enden und B beginnen muß, ist also gegeben durch

$$-\vartheta<w_1<\pi-\vartheta,$$

d. h. es rückt stets in der entgegengesetzten Richtung vom Gebiet reeller Argumente fort, wie das entsprechende Gebiet der positiven Halbebene.

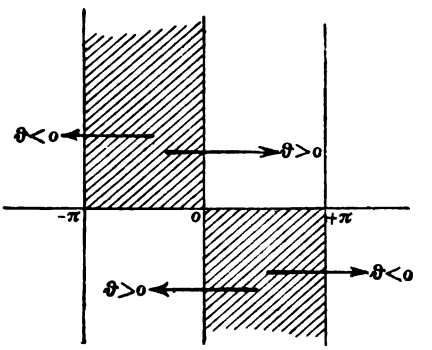


Fig. 3. *w-Ebene*

So werden die Integrationswege A und B zum Beispiel für $\vartheta=+\frac{\pi}{2}$ in der in Fig. 4 gezeichneten Weise verlaufen müssen.

Man sieht nun durch Vergleichung der Fig. 2 und 4 ohne weiteres, daß sich für $0<\vartheta<\pi$ der Integrationsweg A stets so führen läßt, daß in seiner ganzen Ausdehnung überall $\varrho\cos w$ einen positiv imaginären Teil erhält, dagegen der Integrationsweg B notwendig durch Gebiete mit negativ imaginärem Teil hindurch muß. Gehen wir also zu $\varrho=\infty$ über, so folgt, daß $H^{(1)}$ im Unendlichen der betrachteten Halbebene exponentiell verschwinden, $H^{(2)}$ dort exponentiell unendlich werden muß.

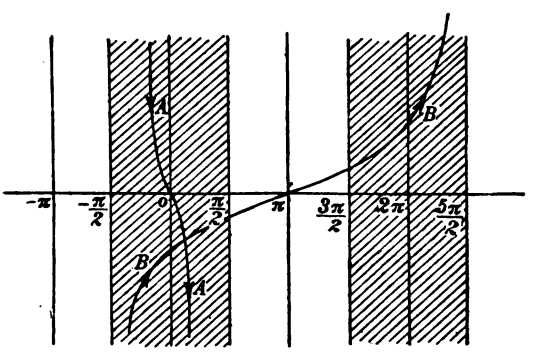


Fig. 4. *w-Ebene*

Ebenso ist zu ersehen, daß umgekehrt für $-\pi<\vartheta<0$ im Unendlichen $H^{(1)}$ exponentiell unendlich wird und $H^{(2)}$ verschwindet. Dieses Verhalten im Unendlichen bedingt die große Wichtigkeit der Hankelschen Funktionen und wird meistens zu deren Definition verwandt.

Digitized by Google

Umlaufsrelationen: Lassen wir ϑ nun um ein Vielfaches von π, zunächst etwa um $+2\pi$ zunehmen, so beginnt der Weg A und endet B in Gebieten, welche um $+2\pi$, und endet A, bzw. beginnt B in Gebieten, welche um -2π gegen die ursprünglichen verschoben sind; Fig. 5 gibt den nunmehrigen Verlauf an.

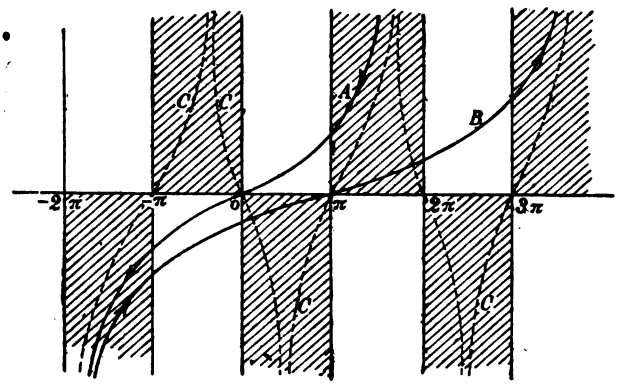


Fig. 5. *w-Ebene*

Wir verschieben nun diese Integrationswege so, daß sie sich aus Stücken C zusammensetzen, deren jedes analog einem Wege A oder B aus Fig. 2 verläuft. Summieren wir diese, so erhalten wir, da der Integrand

$$e^{in(w\pm 2\pi)}e^{iz e^{i2\pi}\cos(w\pm 2\pi)} = e^{\pm 2in\pi}e^{inw}e^{iz\cos w},$$

die Beziehungen:

$$H_n^{(1)}(ze^{i2\pi}) = -H_n^{(-)}(z) - (1+e^{-2in\pi})H_n^{(2)}(z)$$

und

$$H_n^{(2)}(ze^{i2\pi}) = (1+e^{2in\pi})H_n^{(1)}(z) + (e^{-2in\pi}+1+e^{+2in\pi})H_n^{(2)}(z).$$

Sei nun ν eine beliebige ganze Zahl, und lassen wir ϑ um $\nu\pi$ wachsen, so beginnt Integrationsweg A zwischen $(\nu-1)\pi + i\infty$ und $\nu\pi + i\infty$ und endet zwischen $-\nu\pi - i\infty$ und $-(\nu-1)\pi - i\infty$. Integrationsweg B beginnt zwischen $-\nu\pi - i\infty$ und $-(\nu-1)\pi - i\infty$ und endet zwischen $(\nu+1)\pi + i\infty$ und $(\nu+2)\pi + i\infty$. So gelangen wir in gleicher Weise, wie beim speziellen Beispiel $\nu = 2$, zu den allgemeinen Umlaufsrelationen:

$$(10)\qquad H_n^{(1)}(ze^{i\nu\pi}) = -\sum_{m=-\nu+2}^{m=\nu-2} e^{imn\pi}H_n^{(1)}(z) - \sum_{m=-\nu}^{m=\nu-2} e^{imn\pi}H_n^{(2)}(z)$$

$$= -\frac{\sin(\nu-1)n\pi}{\sin n\pi}H_n^{(1)}(z) - e^{-in\pi}\frac{\sin\nu n\pi}{\sin n\pi}H_n^{(2)}(z)$$

und

$$(11)\qquad H_n^{(2)}(ze^{i\nu\pi}) = \sum_{m=-\nu+2}^{m=\nu} e^{imn\pi}H_n^{(1)}(z) + \sum_{m=-\nu}^{m=\nu} e^{imn\pi}H_n^{(2)}(z)$$

$$= e^{in\pi}\frac{\sin\nu n\pi}{\sin n\pi}H_n^{(1)}(z) + \frac{\sin(\nu+1)n\pi}{\sin n\pi}H_n^{(2)}(z).$$

Digitized by Google

Diese Umlaufsrelationen sind dieselben, welche auch bei Nielsen, l. c. § 5 stehen, doch ist unsere Form die übersichtlichere.

Asymptotische Darstellung: Wir beschränken uns auf den speziellen Fall eines reellen z und eines im Vergleich zu z kleinen n. Wir führen dann den Weg A durchweg auf dem schraffierten Gebiet, also durch den Punkt $w = 0$, und zwar so, daß der imaginäre Teil von $\cos w$ möglichst schnell wächst; denn dann wird bei großem z nur ein kleines Stück des Weges, wo der imaginäre Teil seinen absolut kleinsten Wert hat, in Betracht kommen.

Ist also $\cos w = \mathfrak{R} + i\mathfrak{J}$, so muß $\mathfrak{J}$ in Richtung s des Integrationsweges am steilsten wachsen und daher in Richtung n senkrecht zum Integrationsweg sich gar nicht ändern; dieser Weg ist also charakterisiert durch

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dn} = 0,$$

oder, was nach der allgemeinen Funktionentheorie dasselbe ist,

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = 0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{R} = \text{const.}$$

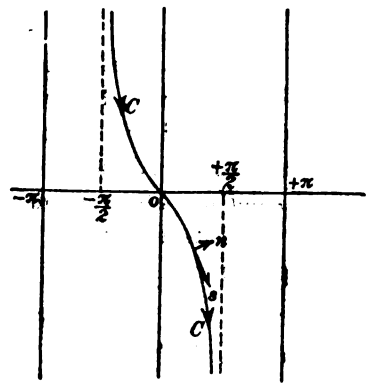


Fig. 6. *w-Ebene*

Im Punkte $w = 0$ ist $\mathfrak{R} = 1$, dadurch ist der Weg in Fig. 6 festgelegt. In diesem Punkte hat $\mathfrak{J}$ seinen kleinsten Wert $\mathfrak{J} = 0$. Infolgedessen ist hier $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial s} = 0$, und da auch $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial s} = 0$ ist, liegt hier ein „Sattelpunkt". Die Umgebung dieses Sattelpunktes ist für die Auswertung des Integrals allein maßgebend.

Wir entwickeln $\cos w$ in der Umgebung des Sattelpunktes:

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2}.$$

Wegen $\mathfrak{R} = 1$ muß $\mathfrak{R}(w^2)$ verschwinden; schreiben wir

$$w = xe^{i\beta},$$

so folgt also $\beta = \pm \frac{\pi}{4}$. Mit der allgemeinen Form des Weges A ist offenbar nur $\beta = -\frac{\pi}{4}$ verträglich, also

$$w = xe^{-i\frac{\pi}{4}},$$

und es wird:

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inxe^{-i\frac{\pi}{4}} - z\frac{x^2}{2}} dx.$$

Digitized by Google

Führen wir $\sqrt{\frac{z}{2}}x = y$ als neue Variable ein, so können wir bis auf Glieder von der Größenordnung $\frac{n}{\sqrt{z}}$ schreiben:

$$(12) \quad H_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} e^{i\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \sqrt{\frac{2}{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}.$$

Analog erhält man:

$$(13) \quad H_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}.$$

Diese Ausdrücke machen den Verlauf und die Bedeutung der Hankelschen Funktionen am klarsten; denn sie zeigen — wie es nach unserer Ableitung zu erwarten war —, daß diese Funktionen bei Zylindersymmetrie dieselbe Rolle spielen, wie die Exponentialfunktionen bei Abhängigkeit von nur einer rechtwinkligen Koordinatenachse.

Denken wir uns Gleichung (1) entstanden aus der Schwingungsgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

durch Einführung periodischer Abhängigkeit von der Zeit $u = f(r, \varphi, z) e^{-ikct}$, so stellen uns die Gleichungen (12) und (13) Züge *fortschreitender Zylinderwellen* dar und zwar $H^{(1)}$ eine vom Nullpunkt aus divergierende, $H^{(2)}$ eine in den Nullpunkt hinein konvergierende Welle.

Wie man allgemein von den komplexen Integraldarstellungen zu asymptotischen Reihen für die Hankelschen Funktionen gelangen kann, und zwar für beliebig großes n und für komplexes z, soll hier nicht dargelegt werden. Wir verweisen auf die Arbeiten von P. Debye, Math. Ann. **67**, p. 535 und in den Sitzungsberichten der bayr. Akademie der Wissenschaften vom 5. Febr. 1910, denen die obige Methode des Sattelpunktes entnommen ist.[1])

Verhalten im Nullpunkt: Schließlich wollen wir das Bild dieser Funktionen vervollständigen, indem wir im speziellen Falle der einfachen symmetrischen, durch $n = 0$ charakterisierten Zylinderwelle den Quellpunkt $z = 0$ untersuchen.

Zu diesem Zweck führen wir in (7) die neue Variable ein:

$$x = iz \cos w.$$

Es wird dann

$$dw = \frac{i dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

1) Debye verweist für das erstmalige Auftreten dieser Methode auf Riemann, Ges. math. Werke, Leipzig 1876, S. 400.

Digitized by Google

und mit Rücksicht auf (9a)

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{i}{\pi}\int e^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

Dabei verläuft der Integrationsweg, wie in Fig. 7 angegeben, und zwar auf den Punkt iz zu im Blatte negativen reellen Teiles von $\sin w = \frac{1}{z}\sqrt{x^2+z^2}$, von ihm weg im Blatte positiven reellen Teiles; wir können darum schreiben:

$$H_0^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{iz} e^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}, \tag{14}$$

wenn wir festsetzen, daß die Wurzel $\sqrt{x^2+z^2}$ im Falle eines reellen z mit positiv reellem Teil genommen werden soll.

Bezeichnet nun ε eine Zahl, die klein gegen 1, aber immer noch groß gegen das der Null sich nähernde z sei, so können wir das Integral (14) in zwei Teilintegrale zerspalten, eines von $-\infty$ bis ε und eines von ε bis iz; im ersteren können wir z^2 gegen x^2 vernachlässigen, dies Integral wird also von z unabhängig; im zweiten Teilintegral können wir $e^x = 1$ setzen; dann wird also das Verhalten der Funktion $H_0^{(1)}(z)$ im Nullpunkt charakterisiert durch

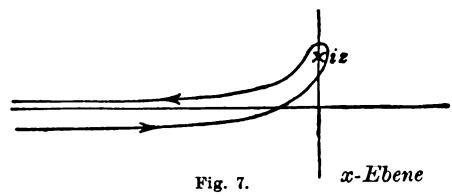


Fig. 7.

$$\frac{-2i}{\pi}\int_{\varepsilon}^{iz}\frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{-2i}{\pi}\left(-\log iz + \log 2\varepsilon\right).$$

In der Summe beider Teilintegrale muß sich $\frac{-2i}{\pi}\log 2\varepsilon$ offenbar herausheben, $H_0^{(1)}(z)$ wird also im Nullpunkt unendlich wie $\frac{2i}{\pi}\log z$.

Untersuchen wir in der gleichen Weise $H_0^{(2)}(z)$ im Nullpunkt, so kommen wir zum gleichen Integral; nur geht der Integrationsweg nach $-iz$, und zwar im Blatt positiv reellen Teils von $\sin w$ auf diesen Punkt zu, im andern Blatt von ihm weg; das Verhalten im Nullpunkt ist also charakterisiert durch $\frac{-2i}{\pi}\log z$.

Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, daß die logarithmische Quelle bei zweidimensionalen Schwingungsproblemen durchaus dem logarithmischen Potential bei zweidimensionalen Problemen der Potentialtheorie entspricht.

§ 3. Die Besselsche und die Neumannsche Zylinderfunktion.

Definition: Wie man zwei fortschreitende ebene Wellen e^{iz} und e^{-iz} zusammensetzen kann zu stehenden Wellen $\sin x$ und $\cos x$, so kann

Digitized by Google

man auch mit den Zylinderwellen verfahren, und es hat sich als praktisch erwiesen, ganz in Analogie zu sin und cos aus den beiden für reelle Argumente konjugiert komplexen Hankelschen Funktionen die zwei reellen Zylinderfunktionen zu bilden:

(15) $$J_n = \frac{H_n^{(1)} + H_n^{(2)}}{2}$$ (Besselsche Funktion)

und

(16) $$N_n = \frac{H_n^{(1)} - H_n^{(2)}}{2i}$$ (Neumannsche[1]) Funktion).

Allgemeiner bekannt ist die Besselsche Funktion; sie ist auch für uns interessanter, weil für sie die beiden Integrationswege der Hankelschen Funktionen sich einfach zusammenfassen (siehe Fig. 8) in einen einzigen Integrationsweg, der im positiven Unendlichen des Streifens I beginnend im positiven Unendlichen des Streifens III endet. Diesem Weg können wir einige interessante Eigenschaften ansehen; vor allem ist ohne weiteres einzusehen, daß für ganzzahliges n die beiden Streifen I und III einander vollkommen gleichwertig werden, darum sich die beiden ins Unendliche verlaufenden Schenkel des Integrationsweges A aufheben, und das Integral sich auf das lange bekannte reduziert:

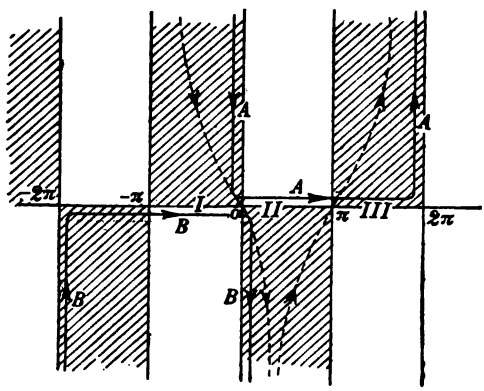


Fig. 8. *w-Ebene*

$$J_n = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inw} e^{iz\cos w} dw \,.$$[2])

Für gebrochenes n versagt dagegen diese Darstellung auf reellem Wege natürlich und ist sinngemäß auf die komplexe zu erweitern.

J_n und J_{-n}: Ist der Index der Besselschen Funktion negativ, so ist sie leicht in die Form zu bringen:

(17) $$J_{-n}(z) = \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_B e^{inw} e^{iz\cos w} dw$$ (s. Fig. 8),

1) In der Benennung folgen wir dem Vorschlage von Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909, B. G. Teubner, S. 93.

2) Dieses Integral findet man bei Graf und Gubler „Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen" S. 16 nach Schläfli in komplexer Form geschrieben, und S. 52 in unserem Sinne auf gebrochene Indizes erweitert.

Digitized by Google

wobei also der Integrand der gleiche ist, wie bei J_n, nur der Integrationsweg gegen den Nullpunkt gespiegelt und im umgekehrten Sinne durchlaufen. J_n und J_{-n} sind voneinander linear unabhängig, solange n keine ganze Zahl ist. In diesem Grenzfall heben sich die ins Unendliche verlaufenden Schenkel des Weges B auf, und es bleibt nur ein Integral von -2π bis 0; infolgedessen wird:

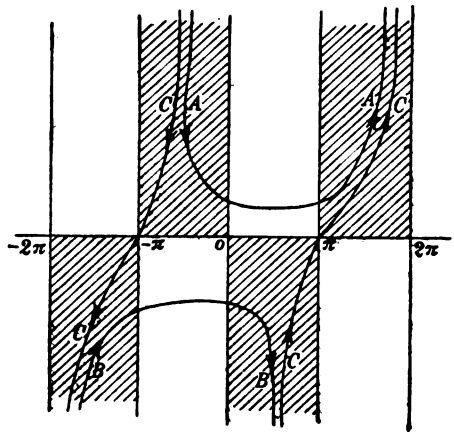


Fig. 9. *w-Ebene*

$$J_{-n} = (-1)^n J_n. \tag{18}$$

Für ganzzahliges n kann also $aJ_n + bJ_{-n}$ nicht als vollständige Lösung der Differentialgleichung (4) angesehen werden (während dies bei $aH_n^{(1)} + bH_n^{(2)}$ stets der Fall ist).

Wir können in diesem Grenzfall eine von J_n linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung auf folgende einfache Weise finden:

Wir nehmen n beliebig an und bilden:

$$J_n - e^{-in\pi} J_{-n} = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_C e^{inw} e^{iz\cos w}\, dw,$$

wobei der Weg C in zwei in Fig. 9 gezeichnete Teile zerfällt.

Es wird:

$$J_n - e^{-in\pi} J_{-n} = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2in\pi}) H_n^{(2)}(z),$$

und also stets

$$\frac{J_n - e^{-in\pi} J_{-n}}{\sin n\pi} = i e^{-in\pi} H_n^{(2)}(z). \tag{19}$$

Dies entspricht für ganzzahliges n einem Grenzübergangsverfahren, das bei linearen Differentialgleichungen allgemein üblich ist, wenn sich 2 Wurzeln der Fundamentalgleichung nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Natürlich kann man in gleicher Weise bei wenig abgeänderter Figur und Vertauschung von $e^{-in\pi}$ mit $e^{+in\pi}$ zu einer entsprechenden Formel für $H_n^{(1)}(z)$ gelangen.

Umlaufsrelation und Verhalten im Unendlichen: Die Haupteigenschaften der Besselschen Funktion sind analog denen der Hankelschen zu finden. Gehen wir hier von reellem zu komplexem Argument über, so verschieben sich Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges in gleicher Weise; der Weg wird also seine Gestalt nicht ändern,

Digitized by Google

es werden keine additiven Terme in die Umlaufsrelation eingehen, und die Verzweigung im Nullpunkt wird eine rein multiplikative sein nach der Formel:

$$J_n(ze^{i\nu\pi}) = e^{i\nu n\pi} J_n(z). \tag{20}$$

Ebenso ist ohne weiteres ersichtlich, daß der jetzige Integrationsweg nie ganz in Gebieten verlaufen kann, wo $z \cos w$ einen positiv imaginären Teil hat, und daß dies bei reellem (positivem und negativem) Argument auch nur mit Ausschluß der Punkte $w = 0$ und $w = \pi$ möglich ist (vgl. Fig. 10). Infolgedessen können die J-Funktionen nirgends im Unendlichen exponentiell verschwinden und werden für nicht rein reelle Argumente überall im Unendlichen exponentiell unendlich.

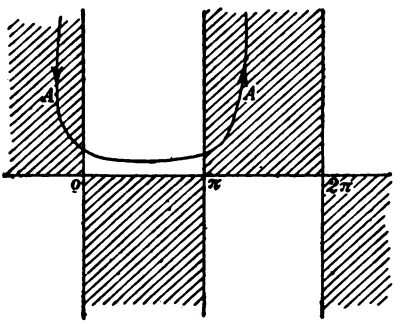


Fig. 10. *w-Ebene*

Die asymptotische Darstellung für große Argumente bei reellem z und im Vergleich zu z kleinem n läßt sich aus Gl. (12) und (13) unmittelbar entnehmen als

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2n+1}{4}\pi\right). \tag{21}$$

Wir haben also den Charakter *stehender Zylinderwellen.*

Reihenentwicklung: Die Hauptbedeutung der Besselschen Zylinderfunktionen beruht auf ihrem Verhalten im Nullpunkt; dort verschwinden sie nämlich für positives n und lassen sich von dort für jedes n in überall konvergente, übersichtliche Reihen entwickeln. Auch diese können wir aus unsern Integraldarstellungen entnehmen, und zwar am einfachsten in folgender Weise:

Wir führen in die Gleichung

$$J_n(z) = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_A^{\cdot} e^{inw} e^{i\frac{z}{2}e^{iw}} e^{i\frac{z}{2}e^{-iw}} dw$$

als neue Variable ein:

$$x = i\frac{z}{2} e^{-iw}.$$

Es wird dann:

$$dw = i\frac{dx}{x}, \quad e^{inw} = \left(\frac{iz}{2x}\right)^n,$$

$$i\frac{z}{2} e^{iw} = -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{x}, \quad e^{i\frac{z}{2}e^{iw}} = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\, x^\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}$$

Digitized by Google

und

$$J_n(x) = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \cdot i \cdot \int_\sigma \left(\frac{iz}{2x}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\, x^\nu} e^x \frac{dx}{x},$$

wobei der Weg σ oberhalb der negativ reellen Achse aus dem Unendlichen herkommt, sich um den Nullpunkt herumschlingt und unterhalb derselben Achse wieder ins Unendliche verläuft (Fig. 11).

Nun ist nach einer bekannten Formel[1])

$$\int_\sigma \frac{e^x}{x^t}\, dx = -\frac{2\pi i}{\Gamma(t)}.$$

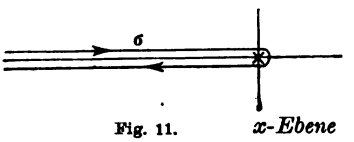


Fig. 11.

Es wird also:

$$(22) \qquad J_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+n}}{\nu!\, \Gamma(n+\nu+1)}.$$

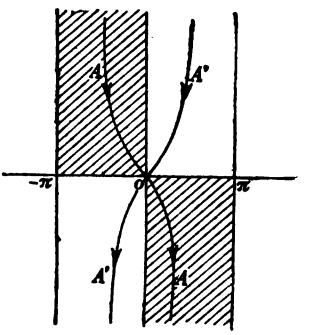


Fig. 12. *w-Ebene*

Dadurch, daß die Besselschen Funktionen für $n > 0$ im Nullpunkt verschwinden und $J_0(0) = 1$ wird, bekommen diese Funktionen große Bedeutung bei allen Aufgaben der theoretischen Physik, bei welchen Zylindersymmetrie ohne Singularität im Nullpunkt gefordert wird.

Die Neumannsche Funktion erhält in der w-Ebene keinen charakteristischen Integrationsweg, ist daher für uns nicht von großem Interesse. Wir wollen hier nur eine Integraldarstellung für $n = 0$ ableiten. Wir greifen zu diesem Zweck auf die Formeln (7) und (8) zurück, und erhalten durch Einsetzen in (16):

$$N_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_A e^{iz\cos w}\, dw + \frac{1}{2i\pi} \int_{A'} e^{-iz\cos w}\, dw,$$

wobei die Wege A und A' zu führen sind wie in Fig. 12. Wir können beide Wege auf die imaginäre Achse schieben und erhalten:

$$N_0 = \frac{1}{i\pi} \int_{+i\infty}^{-i\infty} \cos(z \cos w)\, dw$$

oder, wenn wir $w = iv$ setzen

$$(22) \qquad N_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z \operatorname{Cof} v)\, dv.^2)$$

---

1) Vgl. z. B. Nielsen, l. c. pag. 373 (Γ_{13}).

2) In Übereinstimmung mit Heine, Kugelfunktionen, S. 185; denn es ist Heines $K = -\frac{\pi}{2} N$.

Digitized by Google

Da aber bei dieser Darstellung der Integrationsweg nicht verschiebbar ist, fallen alle Vorteile der komplexen Integration weg.

§ 4. Integrale mit Zylinderfunktionen.

Besonders gut anwendbar sind die komplexen Integraldarstellungen, wenn kompliziertere Integrale mit Zylinderfunktionen im Integranden auszuwerten sind; denn in diesen Fällen kann man bei Vertauschung der Integrationsfolge die einfachen Sätze der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie benutzen. Wir wollen dies an zwei Beispielen zeigen (auf welche wir bei hydrodynamischen Arbeiten[1]) gelegentlich stießen). Vergleicht man die folgenden Ableitungen mit den mehr formalen an den entsprechenden unten zitierten Stellen bei Nielsen, so wird man die Überlegenheit der komplexen Integrationsmethode erkennen.

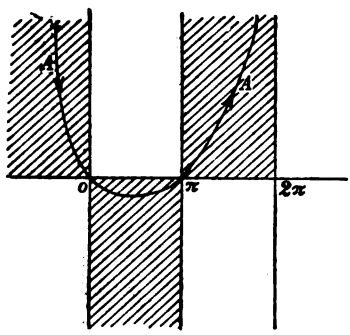


Fig. 13. *w-Ebene*

1. $$\int_0^x J_n(z)\cos tz\,dz = X,$$

n und t seien reelle positive Größen. Wir wenden unsre komplexe Darstellung an und schreiben:

$$X = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{4\pi}\int_A e^{inw}dw\int_0^\infty e^{iz\cos w}(e^{itz}+e^{-itz})dz. \tag{23}$$

Den Integrationsweg A führen wir (Fig. 13) durchweg auf schraffiertem Gebiet, so daß $\cos w$ stets einen positiv imaginären Teil hat; sonst würde das Integral über z nicht konvergieren. Führen wir die Integration nach z aus, so wird:

$$X = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{4\pi}\cdot i\cdot\int_A e^{inw}\left[\frac{1}{\cos w+t}+\frac{1}{\cos w-t}\right]dw.$$

Benutzen wir nun die neue Variable $x = e^{iw}$, so wird:

$$\cos w = \tfrac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$dw = -i\frac{dx}{x}$$

1) L. Hopf, Über Schiffswellen, Diss. München, S. 55 ff.

Digitized by Google

und

$$X = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_A x^n \left[\frac{1}{x^2 + 2tx + 1} + \frac{1}{x^2 - 2tx + 1} \right] dx,$$

wobei nun der Integrationsweg A auf der x-Ebene in der in Fig. 14 angegebenen Weise geschlossen verläuft.

Wir bestimmen die Pole unsres Integranden und untersuchen, welche im Innern unseres Integrationsgebietes liegen. Die Pole sind:

$$x_1 = -t + \sqrt{t^2 - 1} = -e^{-i\varphi},$$
$$x_2 = -t - \sqrt{t^2 - 1} = -e^{+i\varphi},$$
$$x_3 = +t + \sqrt{t^2 - 1} = +e^{+i\varphi},$$
$$x_4 = +t - \sqrt{t^2 - 1} = +e^{-i\varphi},$$

wobei die Hilfsgröße φ bestimmt ist durch die Beziehungen:

$$\cos\varphi = t, \quad i\sin\varphi = +\sqrt{t^2 - 1}. \tag{24}$$

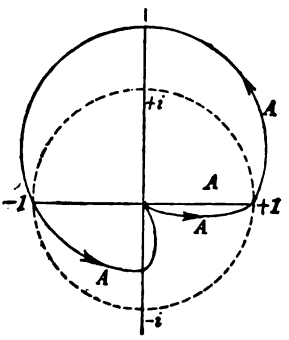


Fig. 14. *x-Ebene*

Wir ziehen unsern Integrationsweg zusammen auf Umläufe um die im Innern des Integrationsweges liegenden Pole und bilden die Residuen.

Ist $t < 1$, also nach (24) φ reell und $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so liegen alle Pole auf dem Einheitskreis, innerhalb unseres Gebietes liegen also x_1 und x_3; denn diese beiden Werte haben einen positiv imaginären Teil. Bilden wir das Residuum, so erhalten wir:

$$X = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \cdot 2\pi i \left\{ \frac{(-1)^n e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} + \frac{e^{in\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \right\} \tag{25}$$
$$= \frac{\cos n\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\varphi} = \frac{\cos(n \arcsin t)}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Ist $t > 1$, also nach (24) φ negativ imaginär, so liegen alle Pole auf der reellen Achse, x_1 und x_4 im Inneren unseres Gebietes, und es wird:

$$X = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \cdot 2\pi i \cdot \left\{ \frac{(-1)^n e^{-in\varphi}}{e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}} + \frac{e^{-in\varphi}}{e^{-i\varphi} - e^{+i\varphi}} \right\} \tag{25a}$$
$$= i \sin n\frac{\pi}{2} \frac{e^{-in\varphi}}{\sin\varphi} = -\sin n\frac{\pi}{2} \frac{(t - \sqrt{t^2 - 1})^n}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

in Übereinstimmung mit Nielsen, l. c. § 74, (3) und (4).

Digitized by Google

$$2.\ \int_0^\infty z^\varrho H_n^{(1)}(itz)\,dz = Y.$$

Wir setzen unsere komplexe Integraldarstellung ein und erhalten:

$$Y = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{\pi}\int_A e^{inw}\,dw \int_0^\infty z^\varrho e^{-tz\cos w}\,dw, \tag{26}$$

wobei der Weg verläuft wie in Fig. 2.

Nun ist bekanntlich[1]):

$$\int_0^\infty z^\varrho e^{-tz\cos w}\,dz = \frac{\Gamma(\varrho+1)}{(t\cos w)^{\varrho+1}}.$$

Setzen wir dies in (26) ein, so ergibt sich:

$$Y = \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}\Gamma(\varrho+1)}{\pi t^{\varrho+1}}\int_A e^{inw}\cos^{-\varrho-1}w\,dw. \tag{27}$$

Wir führen wieder $e^{iw} = x$ als Variable ein; dann kann der Weg A in der x-Ebene auf der positiven Achse von 0 bis ∞ verlaufen, und es wird:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}\Gamma(\varrho+1)}{\pi t^{\varrho+1}}\cdot(-i)\cdot\int_0^\infty x^{n-1}\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)^{-\varrho-1} dx \\ &= \frac{e^{-i(n+1)\frac{\pi}{2}}\cdot\Gamma(\varrho+1)\cdot 2^{\varrho+1}}{\pi t^{\varrho+1}}\int_0^\infty x^{n+\varrho}(x^2+1)^{-\varrho-1}dx \\ &= \frac{e^{-i(n+1)\frac{\pi}{2}}\cdot\Gamma(\varrho+1)\cdot 2^{\varrho+1}}{\pi t^{\varrho+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma(\varrho+1)}.^{2}) \end{aligned}$$

So erhalten wir schließlich:

$$Y = e^{-i(n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{2^\varrho}{\pi t^{\varrho+1}}\Gamma\left(\frac{\varrho+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-n+1}{2}\right) \tag{28}$$

in Übereinstimmung mit Nielsen, l. c. § 72 (7).

---

1) Vgl. z. B. Nielsen, l. c. pag. 373 (Γ_{14}).

2) Vgl. z. B. Nielsen, pag. 374 (Γ_{18}).

Digitized by Google

Das Relativitätsprinzip.

Von W. v. Ignatowsky in Berlin.

(Fortsetzung und Schluß von Bd. 17, S. 24.)

8. Linien-, Flächen- und Volumenelemente. Bevor wir zu den Anwendungen des Relativitätsprinzipes auf einige Gebiete der theoretischen Physik übergehen, müssen wir die Vektoranalysis diesem Prinzip anpassen und müssen deshalb vorerst wissen, wie sich hierbei Linien-, Flächen- und Volumenelemente transformieren werden.

Auf Grund von (19) Nr. 5 erhalten wir, ganz analog wie (3) Nr. 6, für die Entfernung zweier benachbarter Punkte eines bewegten Mediums

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r} - pq dt \mathfrak{c}_0 \tag{1}$$

und

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}' + pq dt' \mathfrak{c}_0 . \tag{2}$$

Hier bedeutet $d\mathfrak{r}$ bzw. $d\mathfrak{r}'$ nicht die vom ungestrichenen Beobachter (System K), resp. vom gestrichenen Beobachter (System K'), synchron gemessene Entfernung der beiden Punkte, sondern die Entfernung derjenigen zum System K, resp. K' festen Raumpunkte, in welchen sich die beiden beweglichen Punkte zu den Zeiten t_1 und t_2, resp. t_1' und t_2', befanden. Es ist also $t_2 - t_1 = dt$ und $t_2' - t_1' = dt'$.[1])

Wir nehmen nun an, der gestrichene Beobachter messe die Entfernung der beiden beweglichen Punkte synchron und zwar im Moment t'. Dann ist $dt' = 0$ und

$$dt = qn\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r} \tag{3}^2)$$

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{v}dt = d\mathfrak{r}_2 + qn\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}, \tag{4}^2)$$

wo $d\mathfrak{r}_2$ die vom ruhenden Beobachter synchron gemessene Entfernung der beiden Punkte bedeutet, zu einer Zeit t, welche dem Moment t' entspricht.

Multiplizieren wir (4) skalar mit $\mathfrak{c}_0$, so erhalten wir

$$\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_0}{1 - qn\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}} . \tag{5}$$

---

1) Ausführlicheres hierüber siehe im Artikel des Verfassers: „Der starre Körper und das Relativitätsprinzip". Ann. d. Phys. Bd. 33 S. 607, 1910.

2) Siehe den eben zitierten Artikel des Verfassers S. 623 Formel (4) und (5).

Digitized by Google

Es folgt deshalb aus (1), indem wir wieder $d\mathfrak{r}$ statt $d\mathfrak{r}_2$ schreiben,

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + pqn\mathfrak{v} \cdot \frac{c_0\, d\mathfrak{r}}{A} - \frac{(p-1)c_0 \cdot c_0\, d\mathfrak{r}}{A}, \tag{6}$$

wo jetzt aber $d\mathfrak{r}'$ und $d\mathfrak{r}$ die von K', resp. K aus synchron gemessenen Linienelemente bedeuten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist diejenige des unendlich kleinen Volumenelementes, des bewegten Mediums, innerhalb dessen sich das Linienelement $d\mathfrak{r}$ befindet.

Innerhalb dieses Volumenelementes nehmen wir drei nicht in einer Ebene liegende Linienelemente und erhalten dann für diese

$$\begin{cases} d\mathfrak{r}_1' = d\mathfrak{r}_1 + pqn\mathfrak{v} \cdot \frac{c_0\, d\mathfrak{r}_1}{A} - \frac{(p-1)c_0 \cdot c_0\, d\mathfrak{r}_1}{A} \\ d\mathfrak{r}_2' = d\mathfrak{r}_2 + pqn\mathfrak{v} \cdot \frac{c_0\, d\mathfrak{r}_2}{A} - \frac{(p-1)c_0 \cdot c_0\, d\mathfrak{r}_2}{A} \\ d\mathfrak{r}_3' = d\mathfrak{r}_3 + pqn\mathfrak{v} \cdot \frac{c_0\, d\mathfrak{r}_3}{A} - \frac{(p-1)c_0 \cdot c_0\, d\mathfrak{r}_3}{A}. \end{cases} \tag{7}$$

Wir bilden jetzt das Produkt

$$[d\mathfrak{r}_2' d\mathfrak{r}_3'] = d\mathfrak{f}', \tag{8}$$

welches nichts anderes ist, als ein gerichtetes Flächenelement für den gestrichenen Beobachter.

Aus (7) erhalten wir

$$d\mathfrak{f}' = d\mathfrak{f} - \frac{pqn}{A}[\mathfrak{v}[c_0 d\mathfrak{f}]] + \frac{p-1}{A}[c_0[c_0 d\mathfrak{f}]] \tag{9}$$

oder unter Berücksichtigung der Bedeutung von A aus (18) Nr. 6

$$\frac{d\mathfrak{f}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{d\mathfrak{f} + (p-1)\,c_0 \cdot c_0 d\mathfrak{f} - pqn\,c_0 \cdot \mathfrak{v} d\mathfrak{f}\}, \tag{10}$$

wobei augenscheinlich $d\mathfrak{f}'$ bzw. $d\mathfrak{f}$ die von K' bzw. K synchron gemessenen Flächenelemente bedeuten.

Aus (10) und (7) ergibt sich weiter für das Produkt

$$d\mathfrak{r}_1'[d\mathfrak{r}_2' d\mathfrak{r}_3'] = d\mathfrak{r}_1' d\mathfrak{f}'$$

$$d\mathfrak{r}_1' d\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{r}\, d\mathfrak{f}}{A} \tag{11}$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{r}_1' d\mathfrak{f}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{f}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}. \tag{11a}$$

Nun sind $d\mathfrak{r}_1' d\mathfrak{f}'$ bzw. $d\mathfrak{r}\, d\mathfrak{f}$ nichts anderes als die entsprechenden Volumenelemente dv' bzw. dv, synchron gemessen von K' bzw. K aus. Aus (11a) folgt demnach

$$\frac{dv'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = dJ, \tag{12}$$

Digitized by Google

und wir ersehen hieraus, daß dJ bei dem Übergang von K' zu K eine Invariante ist.

Multiplizieren wir (12) mit (26) Nr. 6, so erhalten wir

$$dJd\tau = dv'dt' = dvdt. \tag{13}$$

Woraus folgt, daß auch $dvdt$ eine Invariante ist, denn dies gilt ja für dJ und $d\tau$.

9. Vektoranalytische Transformationen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Beziehungen zwischen den vektoranalytischen Transformationen im System K' und denjenigen im System K bestehen.

Die vektoranalytischen Transformationen beruhen in der Hauptsache auf der Anwendung des Zeichens Nabla $= \nabla$, was eine Abkürzung für eine gewisse Oberflächenintegration darstellt.[1])

Wir werden an der Operation div den Übergang von dem einen System zum anderen ausführlicher erklären, woraus sich dann leicht der Übergang bei den anderen Operationen ableiten läßt.

Es sei im gestrichenen System ein Vektor $\mathfrak{A}'$ gegeben, für welchen der gestrichene Beobachter die Operation div' bestimmt.

Es ist dann für diesen Beobachter (siehe (45) I)

$$\operatorname{div}'\mathfrak{A}' = \frac{\int \mathfrak{A}' d\mathfrak{f}'}{V'}. \tag{1}$$
$$\lim V' = 0$$

Wir müssen jetzt die rechte Seite von (1) so umformen, durch Einführung von ungestrichenen Größen, daß der ungestrichene Beobachter denselben Zahlenwert von div' $\mathfrak{A}'$ berechnen kann wie der gestrichene.

Zu dem Zweck denken wir uns zuerst in $\mathfrak{A}'$ statt x', y', z', t' ihre Werte mit Hilfe von (19) Nr. 5 durch x, y, z, t ausgedrückt. Was müssen wir nun weiter für $d\mathfrak{f}'$ und V' einsetzen?

Bei der Ausrechnung der rechten Seite von (1) bezieht der gestrichene Beobachter $d\mathfrak{f}'$ und V' auf den Raum, der zu ihm *ruht*, zugleich mißt er aber auch $d\mathfrak{f}'$ und V' *synchron*. Nun wird der ungestrichene Beobachter bei der Ausrechnung der vektoranalytischen Transformationen mit $d\mathfrak{f}$ und V (oder dv) operieren, die sich auf einen Raum beziehen, der zu ihm ruht, und außerdem werden die Größen von ihm aus synchron gemessen. Wir müssen demnach $d\mathfrak{f}'$ und V' durch solche Größen $d\mathfrak{f}$ und V ersetzen, welche zu dem System K ruhen

1) Siehe „Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik" des Verfassers. Math.-Physik. Schriften für Ing. und Stud., herausgegeb. von E. Jahnke, Nr. 6, Leipzig 1909/10, B. G. Teubner. Im folgenden soll bei den Zitaten der erste Teil durch I und der zweite durch II bezeichnet werden.

Digitized by Google

und im Moment t, welcher dem Moment t' entspricht (d. h. demjenigen Moment, bei welchem der gestrichene Beobachter sein Integral berechnet), für den gestrichenen Beobachter mit $d\mathfrak{f}'$ bzw. V' nach Größe und Richtung zusammenfallen.

D. h. aber, wir müssen in (10) und (12) Nr. 8 $\mathfrak{v} = 0$ setzen, und erhalten dann, da nun $\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = p$ ist,

$$d\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{f}}{p} + \frac{(p-1)}{p}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f} \tag{2}$$

$$dV' = \frac{dV}{p}. \tag{3}$$

Und diese Werte müssen wir statt $d\mathfrak{f}'$ und V' in (1) einsetzen.

Es folgt deshalb aus (1)

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{div}' \mathfrak{A}' &= \frac{\int \mathfrak{A}' d\mathfrak{f}'}{\lim V' = 0 \; V'} = \frac{\int \mathfrak{A}' \{ d\mathfrak{f} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\}}{\lim V = 0 \; V} \\ &= \operatorname{div}\{\mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}'\}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Obwohl sich div in (4) auf einen zum System K ruhenden Raum bezieht, so ist dennoch der Ausdruck (4) noch nicht vollständig. Denn, wie oben bemerkt, berechnet der gestrichene Beobachter die rechte Seite von (1) in einem bestimmten Moment t', also bei *konstanter* Zeit t'.

Der ungestrichene Beobachter berechnet aber seine vektoranalytischen Transformationen auch bei konstanter Zeit t. Nun ist aber die rechte Seite von (4) bei konstantem t' berechnet. Wir müssen sie deshalb für ein konstantes t umformen. Dies geschieht folgendermaßen. Aus (19) Nr. 5 folgt für konstantes t'

$$\frac{dt}{dx} = q\boldsymbol{n} \tag{5}$$

oder in Vektorform geschrieben

$$q\boldsymbol{n} = \mathfrak{c}_0 \nabla t. \tag{5a}$$

Nun fällt der Gradient von t (bei konstantem t') in die Richtung von $\mathfrak{c}_0$, was auch aus (27) Nr. 6 folgt. Es ist deshalb

$$\nabla t = \mathfrak{c}_0 \cdot q\boldsymbol{n}; \quad t' = \text{konst.} \tag{6}$$

Wir ersehen hieraus, daß im Ausdruck unter div in (4), t als Parameter betrachtet werden muß, in welchem implizite noch x enthalten ist.

Bezeichnen wir den Ausdruck unter div in (4) durch $\mathfrak{B}$, so müssen wir in (4) statt div $\mathfrak{B}$, infolge (134) I, schreiben

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \nabla t = \operatorname{div}\mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}\mathfrak{c}_0}{\partial t} \cdot q\boldsymbol{n} \tag{7}$$

Digitized by Google

und erhalten dann endgültig

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{A}' = \operatorname{div}\{\mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}'\} + pqn \frac{\partial \mathfrak{A}' \mathfrak{c}_0}{\partial t},$$

wo nun div bei konstantem t zu nehmen ist.

Ganz analog erhalten wir auf Grund von (44) I und (136) I für einen Skalar a'

$$\text{(9)} \qquad \nabla' a' = \nabla a' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \nabla a' + pqn \mathfrak{c}_0 \frac{\partial a'}{\partial t}.$$

Aus (68) I folgt, da $\mathfrak{c}_0 =$ konst. ist,

$$\text{(10)} \qquad \nabla(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) = (\mathfrak{c}_0 \nabla)\mathfrak{B} + [\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{B}]$$

und aus (63) I

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] = (\mathfrak{c}_0 \nabla)\mathfrak{B} - \mathfrak{c}_0 \operatorname{div} \mathfrak{B}$$

oder

$$\text{(11a)} \qquad (\mathfrak{c}_0 \nabla)\mathfrak{B} = \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] + \mathfrak{c}_0 \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Hieraus und aus (10) ergibt sich

$$\text{(12)} \qquad \nabla(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) = \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] + [\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + \mathfrak{c}_0 \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Daraus folgt

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{c}_0 \nabla(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) = \operatorname{div}(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) = \mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] + \operatorname{div} \mathfrak{B}$$

oder

$$\text{(13a)} \qquad \mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] = \operatorname{div}(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) - \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Weiter ergibt (65) I

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] = \mathfrak{c}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{B}$$

und (69) I und (12)

$$\text{(15)} \qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) = -[\mathfrak{c}_0 \nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0)] = -[\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0]] - \\ - [\mathfrak{c}_0[\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{B}]] = -[\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0]] - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{B}$$

oder unter Berücksichtigung von (14)

$$\text{(16)} \qquad [\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0]] = \operatorname{rot}(\mathfrak{B} - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{B}) - \mathfrak{c}_0 \operatorname{div}[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0].$$

Auf Grund von (2), (3) und (46) I erhalten wir

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{rot}' \mathfrak{A}' = \lim_{V'=0} \frac{\int [d\mathfrak{f}' \mathfrak{A}']}{V'} = \lim_{V=0} \frac{\int [d\mathfrak{f}\, \mathfrak{A}']}{V} + (p-1) \lim_{V=0} \frac{\int \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f} \cdot [\mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}']}{V}$$

$$= \operatorname{rot} \mathfrak{A}' + (p-1) \left[\mathfrak{c}_0 \lim_{V=0} \frac{\int \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{A}'}{V} \right]$$

oder wegen (57) I und (11a)

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{A}' = \operatorname{rot} \mathfrak{A}' + (p-1)[\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}[\mathfrak{A}' \mathfrak{c}_0]]$$

und wegen (16)

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{A}' = \operatorname{rot}\{p\mathfrak{A}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}'\} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}[\mathfrak{A}' \mathfrak{c}_0].$$

Digitized by Google

Oder endlich, unter Berücksichtigung, daß $t' = \text{konst.}$ ist, und wegen (134) I und (135) I

$$\text{(18)} \quad \text{rot}' \mathfrak{A}' = \text{rot}\{p\mathfrak{A}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}'\} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \text{div}\,[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0] - pqn \frac{\partial [\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0]}{\partial t}.$$

Weiter folgt aus (20) Nr. 5 bei $x' = \text{konst.}$

$$\text{(19)} \quad \frac{\partial a'}{\partial t'} = \frac{\partial a'}{\partial t}\frac{dt}{dt'} + \frac{\partial a'}{\partial x}\frac{dx}{dt'} = \frac{\partial a'}{\partial t} p + pq\mathfrak{c}_0 \nabla a'$$

und analog

$$\text{(20)} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} p + pq(\mathfrak{c}_0 \nabla)\mathfrak{A}'$$

oder wegen (11a)

$$\text{(21)} \quad \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} p + pq\,\text{rot}\,[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0] + pq\,\mathfrak{c}_0 \cdot \text{div}\,\mathfrak{A}'.$$

10. Vektoren erster und zweiter Art. Wir kehren zu dem Ausdruck (3) Nr. 6 zurück und ersetzen dort $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}$ und t allgemein durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ und b; wir erhalten dann

$$\text{(1)} \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A} - pq b \mathfrak{c}_0.$$

Einen solchen Vektor, der sich nach dem Schema (1) transformiert, nennen wir, nach Minkowski[1]), einen Vektor erster Art. Abkürzungsweise und um zugleich die unbekannte Größe b, die bei der Transformation vom System K zu dem System K' auftritt, hervorzuheben, werden wir einen solchen Vektor durch $(\mathfrak{A}, b)$ bezeichnen, wobei das Schema (1) immer im Auge zu behalten ist.

Analog (1) erhalten wir

$$\text{(2)} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}' + pq b' \mathfrak{c}_0.$$

Hieraus folgen leicht die Beziehungen

$$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}' = p \mathfrak{A} \mathfrak{c}_0 - pq b,$$

$$\text{(3)} \quad \mathfrak{A}' - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A},$$

$$\text{(4)} \quad b = p b' + pqn \mathfrak{A}' \mathfrak{c}_0,$$

$$\text{(5)} \quad b' = pb - pqn \mathfrak{A} \mathfrak{c}_0,$$

$$\text{(6)} \quad \mathfrak{A}'^2 - \frac{b'^2}{n} = \mathfrak{A}^2 - \frac{b^2}{n} = F,$$

$$\text{(7)} \quad \mathfrak{A}' + \frac{(p-1)}{pqn} b' \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{A} - \frac{(p-1)}{pqn} b \mathfrak{c}_0.$$

1) Minkowski l. c. S. 65.

Digitized by Google

Aus (6) ist ersichtlich, daß F eine Invariante ist. Weiter ergibt sich für zwei Vektoren erster Art $(\mathfrak{A}_1, b_1)$ und $(\mathfrak{A}_2, b_2)$

$$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' - \frac{b_1' b_2'}{n} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \frac{b_1 b_2}{n} \tag{8}$$

und endlich auf Grund der vorigen Nr.

$$\operatorname{div}' \mathfrak{A}' + \frac{\partial b'}{\partial t'} = \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial b}{\partial t} = G. \tag{9}$$

Also auch G ist eine Invariante.

Aus (16) Nr. 4 und (18) Nr. 6 erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0\} \tag{10}$$

d. h. es ist $\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\right)$ ein Vektor erster Art. Somit ergibt sich aus (9)

$$\operatorname{div}' \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} + \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{\partial t'} = \operatorname{div} \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{\partial t}. \tag{11}$$

Es seien gegeben zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, die sich folgendermaßen transformieren

$$\begin{cases} \mathfrak{H}' = p\mathfrak{H} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{H} + pqn[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0] \\ \mathfrak{E}' = p\mathfrak{E} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{E} - pq[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0] \end{cases} \tag{12}$$

und entsprechend

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = p\mathfrak{H}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{H}' - pqn[\mathfrak{E}'\mathfrak{c}_0] \\ \mathfrak{E} = p\mathfrak{E}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{E}' + pq[\mathfrak{H}'\mathfrak{c}_0]. \end{cases} \tag{13}$$

Diesen Komplex von zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ nennen wir, nach Minkowski, einen Vektor *zweiter* Art, bezeichnen ihn durch $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ und berücksichtigen dabei wieder das Schema (12).

Aus (12) und (13) folgt

$$\mathfrak{E}\mathfrak{H} = \mathfrak{E}'\mathfrak{H}' = R, \tag{14}$$

$$\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}'^2 - \mathfrak{E}'^2 = S, \tag{15}$$

wo R und S demnach Invarianten sind, und

$$\begin{cases} \mathfrak{E}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{E}'\mathfrak{c}_0 \\ \mathfrak{H}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{H}'\mathfrak{c}_0. \end{cases} \tag{16}$$

Auf Grund von Nr. 9 erhalten wir weiter

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{E}' + \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} - \frac{p-1}{pqn} \mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}' \mathfrak{H}' = \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{p-1}{pqn} \mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{H} \tag{17}$$

und

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{H}' - n\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} + \frac{p-1}{pq} \mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}' \mathfrak{E}' = \operatorname{rot} \mathfrak{H} - n\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - \frac{p-1}{pq} \mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}. \tag{18}$$

Digitized by Google

Aus (12) und (10) folgt weiter

$$\frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{H}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{p}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{H}\mathfrak{v} - q\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0 + qn\mathfrak{v}[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0]\} \tag{19}$$

und

$$\frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{E}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{p}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{E}\mathfrak{v} - q\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0 - q\mathfrak{v}[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0]\}. \tag{20}$$

11. Dichte. Massenänderung. Kontinuitätsgleichung. Wir verfolgen jetzt die Bewegung eines Mediums, greifen ein Volumenelement desselben heraus und transformieren es auf Ruhe (System K', $\mathfrak{v}' = 0$) im Moment t. Im selben Moment mißt der Beobachter auf K' die Masse m_0, Dichte ϱ_0 und die Änderung D_0 der Masse pro Volumen- und Zeiteinheit. Es ist also

$$D_0 = \frac{dm_0}{dv'dt'} = \frac{d\varrho_0 dv'}{dv'dt'}. \tag{1}$$

Man bezeichnet m_0 als Ruhemasse, ϱ_0 als Ruhedichte und D_0 kann entsprechend als Ruhemassenänderung bezeichnet werden.

Da nun m_0 und ϱ_0 gewisse Zahlenwerte bedeuten, so folgt wegen (13) und (12) Nr. 8, da hier $\mathfrak{v}' = 0$ und infolgedessen

$$dv' = \frac{dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

ist, aus (1)

$$D_0 = \frac{d\frac{\varrho_0 dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dvdt} = \frac{dm_0}{dvdt}. \tag{1a}$$

D. h. D_0 ist eine Invariante, falls wir die Ruhemasse m_0 resp. Ruhedichte ϱ_0 im Auge behalten.

Gesetzt wir bestimmen die Dichte ϱ_1 und die Massenänderung D pro Volumen- und Zeiteinheit vom ruhenden System aus. Dann ist

$$D = \frac{d\varrho_1 dv}{dvdt}. \tag{2}$$

Ein Vergleich von (2) und (1a) führt uns dazu,

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \tag{3}$$

auch als eine Dichte aufzufassen, die aber nicht gleich ϱ_1 zu sein braucht, sondern sich aus der Ruhedichte berechnet. Aus (3) ergibt sich augenscheinlich

$$\varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} = \varrho'\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2} = \varrho_0. \tag{4}$$

Angenommen es sei

$$D = D', \tag{5}$$

Digitized by Google

d. h. die Massenänderung ist eine für alle Systeme gleiche Größe. Dann ist auch $D = D_0$ und es folgt aus (1a), (2) und (3)

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \varrho = \dfrac{\varrho_0}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} \\ \varrho_1\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = \varrho_1'\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = \varrho_0 \\ m = m' = m_0. \end{cases}$$

Ist im speziellen Fall $D = D' = D_0 = 0$, d. h. ist die Kontinuitätsgleichung für alle Systeme erfüllt, so gelten auch hierbei die Beziehungen (6).

Bei Innehaltung von (5) ist es leicht, die Beziehung zwischen D_0 und der Invariante G der vorigen Nr. nachzuweisen. Aus (10) Nr. **10** und (4) folgt, daß $(\varrho\mathfrak{v}, \varrho)$ ein Vektor erster Art ist. Hieraus und aus (9) Nr. **10** ergibt sich

$$(7)\qquad G = \operatorname{div}\varrho\mathfrak{v} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}$$

oder wegen (3) II Nr. **22**

$$(8)\qquad G = \operatorname{div}\varrho\mathfrak{v} + \frac{d\varrho}{dt} - \mathfrak{v}\nabla\varrho = \varrho\operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{d\varrho}{dt}.$$

Anderseits folgt aus (2), (4) und (a) II Nr. 23

$$(9)\qquad D = D_0 = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\operatorname{div}\mathfrak{v},$$

woraus $D_0 = G$ folgt.

12. Die Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen. Die Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen lauten, falls $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft und ϱ die Dichte der Elektrizität bedeuten, da $n = \frac{1}{\varrho^2}$ (alle Größen im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt),

$$(1)\qquad 4\pi\varrho\mathfrak{v} + n\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H},$$

$$(2)\qquad -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E},$$

$$(3)\qquad \varrho = \frac{n}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E},$$

$$(4)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Für die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität erhalten wir aus (1)

$$(5)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\varrho\mathfrak{v} = 0.$$

Das Relativitätsprinzip fordert, daß für das gestrichene System die Form obiger Gleichungen erhalten bleibt und daß auch (5) erfüllt wird.

Digitized by Google

Es ist demnach $D = D' = D_0 = 0$. Aus den Erörterungen der vorigen Nr. und aus (7) Nr. **10** und (3) folgt dann

$$4\pi\varrho'\mathfrak{v}' + \frac{(p-1)}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}'\mathfrak{E}' = 4\pi\varrho\mathfrak{v} - \frac{(p-1)}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}\mathfrak{E} \tag{6}$$

und außerdem ist

$$\varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} = \varrho'\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}. \tag{7}$$

Nehmen wir nun an, $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ sei ein Vektor zweiter Art, und setzen (6) in (18) Nr. **10** ein, so erhalten wir aus letzterer Gleichung und aus (17) Nr. **10**, bei Berücksichtigung von (4)

$$\operatorname{rot}'\mathfrak{H}' - n\frac{\partial\mathfrak{E}'}{\partial t'} - 4\pi\varrho'\mathfrak{v}' = \operatorname{rot}\mathfrak{H} - n\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} - 4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{8}$$

und

$$\operatorname{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial\mathfrak{H}'}{\partial t'} = \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{9}$$

Demnach führt die Annahme, daß $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ ein Vektor zweiter Art ist, zu den Gleichungen (8) und (9), welche uns zeigen, daß durch diese Annahme dem Relativitätsprinzip genügt ist. Bei der Ableitung von (9) aus (17) Nr. **10** ist $\operatorname{div}'\mathfrak{H}' = 0$ gesetzt worden. Dies kann man mit Hilfe von (8) Nr. **9** und den Lorentzschen Gleichungen nachweisen.

Bezeichnet e die Ladung eines Volumenelementes dv, so folgt aus (12) Nr. 8 und aus (7)

$$e = \varrho dv = \varrho' d'v' = e'. \tag{10}$$

Die auf die Ladung e wirkende ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ ist nach Lorentz

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{E} + [e\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{11}$$

und entsprechend für den gestrichenen Beobachter

$$\mathfrak{K}' = e'\mathfrak{E}' + [e'\mathfrak{v}'\mathfrak{H}']. \tag{12}$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, daß

$$\frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{K} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{K} - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{K}\mathfrak{v}\}, \tag{13}$$

d. h. $\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}, \frac{n\mathfrak{K}\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\right)$ ein Vektor erster Art ist.

Nämlich die Kraft $\mathfrak{K}_1$ auf die Volumeneinheit ist gleich

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{E}\varrho + [\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{14}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{E}'\varrho' + [\varrho'\mathfrak{v}'\mathfrak{H}']. \tag{15}$$

Digitized by Google

Da nun $\mathfrak{K}_1 dv = \mathfrak{K}$ ist, so ergibt (13) wegen (12) Nr. 8

(16) $$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1 + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{K}_1 - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{K}_1 \mathfrak{v}.$$

Also ist $(\mathfrak{K}_1, n\mathfrak{K}_1\mathfrak{v})$ ein Vektor erster Art.

13. Die Minkowskischen Grundgleichungen für bewegte Körper.[1]) Die Grundgleichungen für ruhende isotrope Körper lauten:

(1) $$4\pi\mathfrak{J} + 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathfrak{H},$$

(2) $$-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathfrak{E},$$

(3) $$\varrho = \text{div}\,\mathfrak{D},$$

(4) $$\text{div}\,\mathfrak{B} = 0.$$

Aus (1) und (2) folgt dann

(5) $$\text{div}\,\mathfrak{J} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0.$$

Hier bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische bzw. die magnetische Kraft.

(9) $$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi c^2} = \frac{\varepsilon n\mathfrak{E}}{4\pi}$$

ist die elektrische Erregung, resp. Verschiebung und

(7) $$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

die magnetische Erregung, resp. Induktion. ϱ ist die Dichte der wahren Elektrizität und

(8) $$\mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}$$

der Leitungsstrom, σ die Leitfähigkeit. Alle Größen sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt.

Wir gehen jetzt zu bewegten Körpern über. Es bezeichne wie früher $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes der bewegten Materie, vom System K aus gemessen, und desgleichen $\mathfrak{v}'$ für das System K'.

Nun nimmt Minkowski an:

I. Wenn wir einen Punkt der bewegten Materie in einem Moment t auf Ruhe transformieren ($\mathfrak{v}' = 0$), so behalten für den gestrichenen Beobachter auf K' im selben Moment für diesen Punkt die Grundgleichungen (1)—(8) ihre Gültigkeit.

Weiter nimmt Minkowski an:

II. $\left(\mathfrak{H}, \frac{4\pi}{n}\mathfrak{D}\right)$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$ sind Vektoren zweiter Art und $(\mathfrak{J}, \varrho)$ ein Vektor erster Art.

---

1) Minkowski l. c. S. 72.

Digitized by Google

Aus II. folgt dann, wegen (18) und (17) Nr. **10**

$$\text{(9)}\qquad \operatorname{rot}'\mathfrak{H}' - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial t'} + \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0\cdot\operatorname{div}'\mathfrak{D}' = \\ = \operatorname{rot}\mathfrak{H} - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} - \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0\cdot\operatorname{div}\mathfrak{D}$$

und

$$\text{(10)}\qquad \operatorname{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t'} - \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0\cdot\operatorname{div}'\mathfrak{B}' = \\ = \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0\cdot\operatorname{div}\mathfrak{B}$$

und

$$\text{(11)}\qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{J} - pq\mathfrak{c}_0\varrho.$$

Woraus sich wegen (7) Nr. **10** ergibt

$$\text{(12)}\qquad \mathfrak{J}' + \frac{(p-1)}{pqn}\varrho'\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{J} - \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0\cdot\varrho.$$

Da nun allgemein

$$\text{(13)}\qquad \begin{cases}\varrho' = \operatorname{div}'\mathfrak{D}'\\ \varrho = \operatorname{div}\mathfrak{D}\end{cases}$$

ist, so folgt aus (9) wegen (12)

$$\text{(14)}\qquad \operatorname{rot}'\mathfrak{H}' - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial t'} - 4\pi\mathfrak{J}' = \operatorname{rot}\mathfrak{H} - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} - 4\pi\mathfrak{J}.$$

Aus II. haben wir ganz allgemein

$$\text{(15)}\qquad \begin{cases}\mathfrak{H}' = p\mathfrak{H} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{H} + 4\pi pq[\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0]\\ \frac{4\pi\mathfrak{D}'}{n} = \frac{4\pi p\mathfrak{D}}{n} - \frac{4\pi}{n}(p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{D} - pq[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0]\end{cases}$$

und

$$\text{(16)}\qquad \begin{cases}\mathfrak{B}' = p\mathfrak{B} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{B} + pqn[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0]\\ \mathfrak{E}' = p\mathfrak{E} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{E} - pq[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0].\end{cases}$$

Ersetzen wir in (8) Nr. **9** die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen und q durch $-q$, so folgt hieraus und aus (16) unter Berücksichtigung von (14) Nr. **9**

$$\text{(17)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = p\operatorname{div}'\mathfrak{B}' - pqn\,\mathfrak{c}_0\operatorname{rot}'\mathfrak{E}' - pqn\frac{\partial\mathfrak{B}'\mathfrak{c}_0}{\partial t'}.$$

Transformieren wir jetzt auf Ruhe, so verschwindet infolge I. die rechte Seite von (17), und es folgt

$$\text{(18)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Digitized by Google

Zugleich verschwinden aber auch die linken Seiten von (10) und (14), und wir erhalten dann unter Berücksichtigung von (18)

$$4\pi\mathfrak{J} + 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \tag{19}$$

$$-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}. \tag{20}$$

Diese Gleichungen (18)—(20) zusammen mit (13) gelten für eine beliebige Geschwindigkeit der Materie. Wir ersehen, daß sie dieselbe Form haben, wie für ruhende Körper. Weiter folgt aus (17)

$$\operatorname{div}'\mathfrak{B}' = p\operatorname{div}\mathfrak{B} + pqnc_0\operatorname{rot}\mathfrak{E} + pqn\frac{\partial\mathfrak{B}c_0}{\partial t} \tag{21}$$

oder wegen (18) und (20)

$$\operatorname{div}'\mathfrak{B}' = 0. \tag{22}$$

Hieraus und aus (18) erhalten wir statt (10)

$$\operatorname{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t'} = \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{23}$$

Aus (23) und (14) ersehen wir, daß die Gleichungen (18)—(20) nicht nur dieselbe Form wie bei ruhenden Körpern haben, sondern, daß sie auch ihre Form behalten bei dem Übergang von einem System zum anderen. D. h. die eben aufgestellten Gleichungen für bewegte Körper genügen, infolge der Annahme II dem Relativitätsprinzip.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Beziehungen zwischen $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ für bewegte Körper aufzustellen.

Auf Grund von I folgt augenscheinlich

$$\mathfrak{J}' = \sigma\mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{B}' = \mu\mathfrak{H}'; \quad 4\pi\mathfrak{D}' = n\varepsilon\mathfrak{E}'. \tag{24}$$

Hieraus und aus (15) und (16) erhalten wir, unter Berücksichtigung, daß bei der Transformation auf Ruhe $\mathfrak{v}' = 0$, $\mathfrak{v} = c_0 q$, $p = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$ ist,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{v}\varrho + \frac{\sigma}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{E} - n\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\}, \tag{25}$$

$$\mathfrak{B} + n[\mathfrak{E}\mathfrak{v}] = \mu\{\mathfrak{H} + 4\pi[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]\}, \tag{26}$$

$$\frac{4\pi\mathfrak{D}}{n} - [\mathfrak{H}\mathfrak{v}] = \varepsilon\{\mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\} \tag{27}$$

oder

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}_1 - n[\mathfrak{E}\mathfrak{v}] \tag{26a}$$

$$\frac{4\pi\mathfrak{D}}{n} = \varepsilon\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{H}\mathfrak{v}], \tag{27a}$$

wo

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] \tag{28}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} + 4\pi[\mathfrak{D}\mathfrak{v}] \tag{29}$$

bedeuten.

Digitized by Google

Verstehen wir unter $\mathfrak{J}_1$ den Leitungsstrom, so ist

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} - \mathfrak{v}\varrho. \tag{30}$$

Aus (5) Nr. **10** und (11) ergibt sich

$$\varrho' = p\varrho - pqn\mathfrak{J}\mathfrak{c}_0 \tag{31}$$

oder

$$\varrho' = A\varrho - pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0 \tag{32}$$

oder endlich

$$\varrho'\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2} = \varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} - \frac{pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0\cdot\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{A}. \tag{33}$$

Vergleichen wir dies mit den Ausführungen der vorigen Nr., so sehen wir, daß wir hier eigentlich ϱ_1 statt ϱ geschrieben haben müßten. Für die Ruhedichte ϱ_0 erhalten wir aus (33) ($\mathfrak{v}' = 0$)

$$\varrho_0 = \varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} - \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{v}\cdot n}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \tag{34}$$

und für die Ruhemasse e_0

$$e_0 = e - \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{v}\cdot n dv}{1-n\mathfrak{v}^2}. \tag{35}$$

Weiter folgt aus (32)

$$\frac{e'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{Ae - pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0\cdot dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}. \tag{36}$$

Berechnen wir jetzt $\mathfrak{v}'\varrho'$ mit Hilfe von (32), so ergibt uns (30) und (11)

$$\mathfrak{J}_1' = \mathfrak{J}_1 - \frac{(p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{J}_1}{A} + \frac{pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{v}}{A} \tag{37}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{J}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{p\mathfrak{J}_1 - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{J}_1 - pqn[\mathfrak{c}_0[\mathfrak{J}_1\mathfrak{v}]]\}. \tag{38}$$

Für den Ruheleitungsstrom ($\mathfrak{v}' = 0$) erhalten wir dann aus (37), (16) und (25)

$$\mathfrak{J}_1' = \sigma\mathfrak{E}' \quad (\mathfrak{v}' = 0) \tag{39}$$

in Übereinstimmung mit (8) und der Annahme I.

Wir haben weiter

$$\frac{\mathfrak{E}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{E}' - [\mathfrak{B}'\mathfrak{v}']}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{E} + (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{E} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] - pqn\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{E}\mathfrak{v}\}. \tag{40}$$

Hieraus und aus (37) erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{E}_1'\mathfrak{J}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{E}_1\mathfrak{J}_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = W, \tag{41}$$

Digitized by Google

wo W eine Invariante ist. Dies Resultat ist für das Folgende überaus wichtig. Die Bedeutung von W ergibt sich aus folgender Überlegung.

Transformieren wir auf Ruhe, so erhalten wir aus (41) auf Grund von (39)

$$W = \sigma \mathfrak{E}'^2, \tag{42}$$

d. h. nichts anderes als die pro Zeit- und Volumeneinheit entwickelte Joulesche Wärme für ein ruhendes Medium.

Es seien gegeben drei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$. Wir bilden hieraus den Ausdruck

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{A}] - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \mathfrak{G}. \tag{43}$$

Multiplizieren wir nun $\mathfrak{G}$ mit einem Vektor $\mathfrak{n}$, so folgt aus (43)

$$\mathfrak{G}\mathfrak{n} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{t} - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{t} = \mathfrak{A}[\mathfrak{t}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{A}\mathfrak{t}][\mathfrak{A}\mathfrak{M}],$$

wo $\mathfrak{t} = [\mathfrak{A}\mathfrak{n}]$ bedeutet.

Hieraus folgt

$$\mathfrak{G}\mathfrak{n} = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A}^2,$$

und da $\mathfrak{n}$ beliebig ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{A}] - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{M}]. \tag{44}$$

Ist im speziellen Fall $\mathfrak{A}$ ein Einheitsvektor z. B. $\mathfrak{c}_0$, so ergibt (44)

$$\mathfrak{c}_0\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{c}_0] - \mathfrak{c}_0\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] = \mathfrak{c}_0[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{c}_0 - [\mathfrak{B}\mathfrak{M}]. \tag{45}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{N} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}] = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}], \tag{46}$$

so läßt sich leicht mit Hilfe der entsprechenden Transformationsgleichung und (45) zeigen, daß

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} + (p-1)\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{N} - pq\mathfrak{c}_0 \cdot n\mathfrak{J}\mathfrak{E},$$

d. h.

$$(\mathfrak{N},\ n\mathfrak{J}\mathfrak{E}) = \text{ein Vektor erster Art}, \tag{47}$$

oder da

$$\mathfrak{J}\mathfrak{E} = \mathfrak{v}\mathfrak{N} + \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1 \tag{48}$$

ist,

$$(\mathfrak{N},\ n\mathfrak{v}\mathfrak{N} + n\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1) = \text{Vektor erster Art}. \tag{49}$$

Aus (26) und (27) folgt

$$\begin{cases} \mathfrak{B}\mathfrak{v} = \mu\mathfrak{H}\mathfrak{v} \\ \dfrac{4\pi\mathfrak{D}\mathfrak{v}}{n} = \varepsilon\mathfrak{E}\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{50}$$

Setzen wir nun den Wert von $\mathfrak{B}$ aus (26) in (27), so folgt

$$\frac{4\pi}{n}(1 - \mu\varepsilon n\mathfrak{v}^2)\mathfrak{D} = (1-\varepsilon\mu)\{[\mathfrak{H}\mathfrak{v}] + \varepsilon n\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{v}\} + \varepsilon\mathfrak{E} \cdot (1 - n\mathfrak{v}^2). \tag{51}$$

Digitized by Google

Analog ergibt sich aus (26) durch Einsetzen des Wertes von $\mathfrak{D}$ aus (27)

$$(52)\qquad (1-\varepsilon\mu n\mathfrak{v}^2)\mathfrak{B}=(1-\varepsilon\mu)\{[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]+n\mu\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{H}\mathfrak{v}\}+\mu\mathfrak{H}\cdot(1-n\mathfrak{v}^2).$$

Ist $\varepsilon=1$ und $\mu=1$, so ergeben uns (51) und (52)

$$(53)\qquad \begin{cases}\mathfrak{D}=\dfrac{\mathfrak{E}n}{4\pi}\\ \mathfrak{B}=\mathfrak{H}.\end{cases}$$

14. Die Bewegungsgleichungen eines Massenteilchens. Aus den thermodynamischen Betrachtungen von Herrn M. Planck[1]) folgt, daß bei isobaren Prozessen die Änderung der Ruhemasse des Massenteilchens gleich nQ ist, wo Q die von außen dem Teilchen zugeführte Wärme bedeutet. Dies gilt für beliebige reversible und irreversible Prozesse. Demnach können wir schreiben, falls wir unter Q_1' die von außen der Ruhemasse m_0 des Teilchens pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte Wärme verstehen

$$(1)\qquad \frac{dm_0}{dv'dt'}=nQ_1'.$$

Ist T die Temperatur und S die Entropie, so folgt weiter nach M. Planck[2])

$$(2)\qquad \begin{cases}\dfrac{T}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}=\dfrac{T'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}\\ S=S'.\end{cases}$$

Da nun nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik $Q=TdS$ ist, so erhalten wir infolgedessen aus (2)

$$(3)\qquad \frac{Q}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}=\frac{Q'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}$$

oder wegen (13) Nr. 8

$$(4)\qquad \frac{Q_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}=\frac{Q_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}.$$

Transformieren wir auf Ruhe ($\mathfrak{v}'=0$), so ergibt sich

$$(5)\qquad Q_1'=\frac{Q_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}.$$

Und dieser Wert von Q_1' ist derjenige, der für (1) in Betracht kommt, da wir doch bei der Aufstellung von (1) die Ruhemasse betrachtet haben. Infolge Nr. **11** und (5) können wir schreiben

$$(6)\qquad D_0=\frac{dm_0}{dv'dt'}=Q_1'n=\frac{Q_1 n}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}=\frac{dm_0}{dvdt},$$

1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsberichte der Berl. Akad. XXIX S. 25, 1907.

2) l. c. S. 14.

Digitized by Google

woraus sich ergibt

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{n Q_1 dv}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}. \tag{7}$$

Bewegt sich das Teilchen adiabatisch, so ist $Q_1 = 0$ und demnach $\frac{dm_0}{dt} = 0$.

Die Energiegleichung des Massenteilchens lautet

$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{R} + Q_1 dv, \tag{8}$$

wo E die kinetische Energie des Teilchens bedeutet und $\mathfrak{R}$ die auf dasselbe von außen wirkende Kraft.

Wegen (7) kann man statt (8) auch schreiben

$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{R} + \frac{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}{n} \frac{dm_0}{dt}. \tag{9}$$

Bei adiabatischer Bewegung ist

$$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{R}, \tag{10}$$

wo augenscheinlich E in (10) und (8) dieselbe Größe sein muß. Diese Bemerkung ist für das Folgende von Wichtigkeit.

Nun kehren wir zu Nr. 12 zurück. Wir sahen dort, daß die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{R}$ auf die Ladung e wirkt, und daß dabei

$$\left(\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}, \frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{R}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}\right) = \text{Vektor erster Art} \tag{11}$$

ist. Auch ist e eine von der Zeit unabhängige Größe.

Wir nehmen nun an, ein Massenteilchen sei mit der Ladung e geladen und bewege sich adiabatisch im elektrischen Feld. Dann wird auf das Teilchen dieselbe Kraft $\mathfrak{R}$ wirken.

Wirkt nun auf das adiabatisch bewegte Teilchen eine beliebige ponderomotorische Kraft $\mathfrak{R}$, so müssen wir nach dem Obigen annehmen, daß dieses $\mathfrak{R}$ auch der Bedingung (11) genügt.

Nun sagt die Mechanik, daß die Kraft gleich dem Produkte aus Ruhemasse und Beschleunigung ist, d. h.

$$m_0 \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{R}. \tag{12}$$

Infolge des Relativitätsprinzips muß aber auch gelten

$$m_0 \frac{d\mathfrak{v}'}{dt'} = \mathfrak{R}'. \tag{13}$$

Da nun $\mathfrak{R}$ der Bedingung (11) genügen muß, so muß auch, wegen (12) und (13) (da $\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}\, dt = d\tau$ ist), $\left(\frac{m_0 d\mathfrak{v}}{d\tau}, \frac{m_0 n\mathfrak{v} d\mathfrak{v}}{d\tau}\right)$ ein Vektor

Digitized by Google

erster Art sein. Dies ist aber nicht der Fall, wie man sich leicht überzeugen kann. Folglich ist der Ansatz (12) falsch.

Wir schreiben nun

$$m_0 \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K}. \tag{14}$$

Da

$$\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \frac{n\mathfrak{v}}{(1-n\mathfrak{v}^2)^{3/2}} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = n\mathfrak{v} \cdot \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} \tag{15}$$

ist, so folgt aus (10) Nr. **10**, daß

$$\left(\frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{d\tau}, \; n\mathfrak{v} \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{d\tau} \right) = \text{Vektor erster Art} \tag{16}$$

ist. Demnach genügt der Ansatz (14) dem Relativitätsgesetz bei adiabatischer Bewegung.

Aus (14) und (15) folgt weiter

$$\mathfrak{K}\mathfrak{v} = \frac{m_0}{n} \frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}, \tag{17}$$

und dies ergibt auf Grund von (10) für die kinetische Energie E den Wert

$$E = \frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}, \tag{18}^{1})$$

wobei wir eine Konstante unterdrücken, die für uns belanglos ist, da wir doch nur die Änderungen von E beobachten.

Wir gehen jetzt zu nicht adiabatischen Bewegungen über. Es ist also $Q_1 \neq 0$ und demnach $\frac{dm_0}{dt} \neq 0$. Die linke Seite der entsprechenden Bewegungsgleichung muß bei dem Übergang zur adiabatischen Bewegung in die linke Seite von (14) übergehen.

Wir werden deshalb überhaupt die linke Seite von (14) als richtig ansehen auch bei nicht adiabatischer Bewegung. Da aber in (14) m_0 ebensogut unter dem Differential stehen kann, so wissen wir nicht, ob wir bei nicht adiabatischer Bewegung

$$m_0 \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{19}$$

1) M. Planck, Verhandl. d. deutsch. Phys. Ges. 1906, S. 137.

Digitized by Google

oder

$$\frac{d\frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{20}$$

schreiben müssen. Denn beide Gleichungen (19) und (20) gehen in (14) für $m_0 =$ konst. über.

Wir nehmen erst (19) als richtig an. Wegen (16) wird auch $\mathfrak{K}$ der Bedingung (11) genügen, und auch (17) behält seine Gültigkeit. Anderseits folgt aus der Energiegleichung (9) wegen (17)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{m_0}{n}\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + \frac{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{n}\frac{dm_0}{dt} = \\ &= \frac{d\frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} - \frac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\cdot\frac{dm_0}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Hieraus folgt für E ein von (18) verschiedener Ausdruck, was wir nicht annehmen wollen.

Nun untersuchen wir (20). Auf Grund des Relativitätsprinzips muß sein

$$\frac{d\frac{m_0 \mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{dt'} = \mathfrak{K}'. \tag{22}$$

Anderseits haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{m_0 \mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\Bigg\{ &\frac{d\frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\frac{d\frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} \\ &- pq\mathfrak{c}_0\cdot\frac{d\frac{m_0}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Hieraus ergibt sich auf Grund von (15), (20) und (22)

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} &+ (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\frac{\mathfrak{c}_0\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \\ &- pq\mathfrak{c}_0\cdot\left\{\frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt}\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Also ist

$$\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}},\ \frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt}\right) = \text{Vektor erster Art.} \tag{25}$$

Für adiabatische Bewegung $\left(\frac{dm_0}{dt} = 0\right)$ geht (25) in (11) und (20) in (14) über.

Digitized by Google

Weiter ergibt (20) infolge von (15)

$$\mathfrak{R}\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\frac{dm_0}{dt} + \frac{m_0}{n}\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}. \tag{26}$$

Hieraus und aus (9) folgt dann

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{n}\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + \frac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\frac{dm_0}{dt} \tag{27}$$

$$+ \frac{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{n}\frac{dm_0}{dt} = \frac{d\frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}$$

und demnach

$$E = \frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}. \tag{28}$$

Also derselbe Ausdruck wie (18), weshalb wir (20) als richtig annehmen wollen, auch soll die Kraft $\mathfrak{R}$ bei nicht adiabatischer Bewegung der Bedingung (25) genügen.[1])

15. Ponderomotorische Kraft im elektromagnetischen Feld. Wir nehmen jetzt an, die ponderomotorischen Kräfte auf ein Massenteilchen seien elektromagnetischer Natur, und entsprechend sei die in dem Teilchen entwickelte Wärme nur die Joulesche Wärme.

Aus (41) Nr. **13** und (4) Nr. **14** folgt

$$\frac{\mathfrak{J}_1'\mathfrak{E}_1'}{Q_1'} = \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1}{Q_1}. \tag{1}$$

Da nun laut (42) Nr. **13** für ein auf Ruhe transformiertes Teilchen die Joulesche Wärme $W = \mathfrak{J}_1'\mathfrak{E}_1'$ ist, so folgt aus (1) allgemein für die pro Volumen- und Zeiteinheit entwickelte Wärme Q_1 der Ausdruck

$$Q_1 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1 \tag{2}$$

in Übereinstimmung mit M. Abraham.[1])

Aus (7) Nr. **14** und (2) ergibt sich

$$\frac{n\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1 dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \frac{dm_0}{dt}. \tag{3}$$

Die Kraft $\mathfrak{R}$ auf ein Massenteilchen muß der Bedingung (25) Nr. **14** genügen, d. h. es muß sein

$$\frac{\mathfrak{R}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{(p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{R}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \tag{4}$$

$$- pq\mathfrak{c}_0\left\{\frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{R}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt}\right\},$$

1) Siehe diesbezüglich die Arbeiten von G. Nordström, Phys. Ztsch. 1909, S. 681, 1910, S. 440 und M. Abraham, dieselbe Ztsch. 1909, S. 737 und 1910, S. 527.

Digitized by Google

oder auf die Volumeneinheit berechnet und unter Berücksichtigung von (3)

$$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1 + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{K}_1 - pq\mathfrak{c}_0 \{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1\}, \tag{5}$$

wo $\mathfrak{K}_1$ die Kraft auf die Volumeneinheit bedeutet. D. h.

$$(\mathfrak{K}_1,\ n\mathfrak{v}\mathfrak{K}_1 + n\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1) = \text{Vektor erster Art.} \tag{6}$$

Wir kehren jetzt zu Nr. **13** zurück und setzen

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}_1. \tag{7}$$

Ein Vergleich von (6) und (49) Nr. **13** liefert sofort, daß

$$(\mathfrak{N}_1,\ n\mathfrak{v}\mathfrak{N}_1) = \text{Vektor erster Art} \tag{8}$$

sein muß.

Nun nehmen wir an, es sei überall $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$. Dann folgt nach allen Theorien für ein auf Ruhe transformiertes Volumenelement für die Kraft $\mathfrak{K}_1'$ der Ausdruck

$$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{E}'\varrho' + [\mathfrak{J}_1'\mathfrak{B}'], \tag{9}$$

wo wegen (39) Nr. **13** $\mathfrak{J}_1' = \sigma\mathfrak{E}'$ ist.

Aus der Bedeutung von $\mathfrak{N}$,

$$\mathfrak{N} = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}] \tag{10}$$

ersehen wir, daß in (9) $\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{N}'$ ist, also $\mathfrak{N}_1' = 0$. Da nun $\mathfrak{N}_1$ der Bedingung (8) genügen muß, so wird also überhaupt $\mathfrak{N}_1 = 0$ sein, und wir erhalten dann aus (7) und (10) für den Fall, daß $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, für die Kraft pro Volumeneinheit den Wert

$$\mathfrak{K}_1 = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}]. \tag{11}$$

16. Energiegleichung. Impulsgleichung. Es bezeichne W die gesamte im Volumen V enthaltene elektromagnetische Energie und ψ ihre Dichte. Dann ist

$$W = \int_V \psi\, dv. \tag{1}$$

Wir wollen annehmen, daß die Oberfläche F von V sich zusammen mit dem Medium bewegt. Es ergibt sich dann aus (1) und (9) Nr. **22** II

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{v}\psi\right) dv. \tag{2}$$

Ist F eine geometrische *ruhende* Fläche oder ruht das Medium, so ist $\mathfrak{v}$ auf F gleich Null, und wir erhalten für diesen Fall statt (2)

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dv. \tag{3}$$

395617

Digitized by Google

Wir beschäftigen uns jetzt vorläufig mit dem ersten Fall, daß F sich mit dem Medium bewegt.

Es bezeichne weiter $\mathfrak{S}$ den Vektor der Energieströmung pro Zeiteinheit durch eine mit dem Medium bewegte Flächeneinheit, vom ruhenden Beobachter aus gemessen, $\mathfrak{P}$ die Spannung auf der Oberfläche F, herrührend von den inneren Kräften, also auf den Teil des Mediums wirkend, welcher außerhalb V liegt. Es ist dann

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V (\operatorname{div}\mathfrak{S} + Q_1 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{v})\,dv + \int_F \mathfrak{P}\mathfrak{v}\,df, \tag{4}$$

wo $Q_1 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1$ die Joulesche Wärme und $\mathfrak{K}_1$ die Kraft, beide auf die Volumeneinheit bezogen, bedeuten.

Setzen wir weiter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{v} = \mathfrak{N}\mathfrak{n}, \tag{5}$$

wo $\mathfrak{n}$ die zu F äußere Normale ist, so erhalten wir anstatt (4)

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \{\operatorname{div}(\mathfrak{S} + \mathfrak{N}) + Q_1 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{v}\}\,dv. \tag{6}$$

Ein Vergleich von (6) und (2) gibt die Energiegleichung pro Volumeneinheit

$$\operatorname{div}(\mathfrak{S} + \psi\mathfrak{v} + \mathfrak{N}) + Q_1 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Spannung auf F, herrührend von dem außerhalb von F befindlichen Medium, so ist

$$\mathfrak{T} = -\mathfrak{P}. \tag{8}$$

Ist f die Trennungsfläche zweier Medien 1 und 2, so ist die Spannung auf der Oberfläche f, die positive Normale vom Medium 1 zu Medium 2 gerechnet:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1. \tag{9}$$

Es lautet deshalb die Impulsgleichung

$$\int_\infty \mathfrak{K}_1\,dv + \int_f \mathfrak{M}\,df = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}, \tag{10}$$

wo

$$\mathfrak{G} = \int_\infty \mathfrak{g}\,dv \tag{11}$$

die elektromagnetische Bewegungsgröße oder Impuls und $\mathfrak{g}$ dessen Dichte bedeuten. Auf Grund von (96) I haben wir allgemein

$$\int_F \left(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}\,d\mathfrak{f} - \frac{d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{A}^2}{2}\right) = \int_V \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{A}\,dv - \int_V [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{A}]\,dv. \tag{12}$$

Digitized by Google

Nun nehmen wir wieder $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ an. Dann ist infolge von (53) Nr. **13**

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}] = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}] = \\ \quad = \frac{n}{4\pi}\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} - \frac{n}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}] - \frac{[\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]}{4\pi} - \frac{n}{4\pi}\frac{\partial[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\partial t}. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung von (12) und $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$, erhalten wir demnach aus (13)

$$(14)\quad \int_{\overset{\cdot}{V}} \mathfrak{K}_1\,dv = \int_{\overset{\cdot}{F}} \mathfrak{T}\,df - \int \frac{n}{4\pi}\frac{\partial[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\partial t}\,dv,$$

wo

$$(15)\quad \mathfrak{T} = \frac{n}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\frac{\mathfrak{E}^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{2}\right)$$

ist. Aus (8) und (5) folgt dann weiter

$$(16)\quad \mathfrak{R} = -\frac{n}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E} - \mathfrak{v}\cdot\frac{\mathfrak{E}^2}{2}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{H} - \mathfrak{v}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{2}\right).$$

Aus (14) und (9) ergibt sich dann

$$(17)\quad \int_{\overset{\cdot}{\infty}} \mathfrak{K}_1\,dv + \int_{\overset{\cdot}{F}} \mathfrak{M}\,df = -\frac{d}{dt}\int \frac{n[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi}\,dv,$$

und demnach ist die Impulsdichte

$$(18)\quad \mathfrak{g} = \frac{n}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

also genau dieselbe wie bei den Lorentzschen Gleichungen.

Weiter erhalten wir unter Heranziehung der beiden Hauptgleichungen (1) und (2) Nr. **13** und der Beziehung

$$(19)\quad \mathrm{div}\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H},$$

$$(20)\quad \mathfrak{K}_1\mathfrak{v} + Q_1 = \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1 + \varrho\mathfrak{E}_1\mathfrak{v} + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}]\mathfrak{v} = \mathfrak{J}\mathfrak{E} = \\ = -\frac{\mathrm{div}\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathfrak{E}^2 n + \mathfrak{H}^2\}.$$

Wir setzen nun

$$(21)\quad \psi = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 n + \mathfrak{H}^2).$$

Dann folgt aus (20) und (7)

$$\mathrm{div}\left(\mathfrak{S} - \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} + \psi\mathfrak{v} + \mathfrak{R}\right) = 0,$$

weshalb wir schreiben

$$(22)\quad \mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} - \psi\mathfrak{v} - \mathfrak{R}.$$

Digitized by Google

Berücksichtigen wir nun, daß

$$[\mathfrak{E}_1\mathfrak{H}_1] = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - n[\mathfrak{E}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]] - [\mathfrak{H}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]] + \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]n$$

ist, so können wir statt (22) infolge von (16) und (21) auch schreiben

$$\mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E}_1\mathfrak{H}_1]}{4\pi} - \frac{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]n}{4\pi}, \tag{23}$$

wobei, wie schon betont, unter $\mathfrak{S}$ die Energieströmung durch eine bewegte Flächeneinheit zu verstehen ist, vom ruhenden Beobachter aus beurteilt.

Würden wir die Oberfläche F als ruhend angenommen haben, so würden wir von (3) ausgegangen sein. Zugleich würde das Oberflächenintegral in (4) verschwinden, und wir hätten dann statt (7) bekommen

$$\operatorname{div}\mathfrak{S}_1 + Q_1 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{24}$$

woraus dann folgen würde

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi}, \tag{25}$$

wo also jetzt $\mathfrak{S}_1$ die Energieströmung durch eine ruhende Flächeneinheit bedeutet, auch vom ruhenden Beobachter aus beurteilt.

Transformieren wir auf Ruhe, so folgt aus (23)

$$\mathfrak{S}' = \frac{[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']}{4\pi}, \tag{26}$$

wo jetzt $\mathfrak{S}'$ die vom mitbewegten Beobachter wahrgenommene Strömung bedeutet und nicht gleich $\mathfrak{S}_1$ ist, da $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ nicht gleich $\mathfrak{E}$ resp. $\mathfrak{H}$ sind.[1])

Berlin, den 9. Dez. 1910.

Bemerkungen zur mechanischen Quadratur von Gauß.

Von L. MAURER in Tübingen.

Im letzten Heft des Archivs (Bd. 17, S. 113) hat Herr H. Weber eine Darstellung des Verfahrens von Gauß gegeben, „die nicht viel Vorkenntnisse aus der Theorie der Kugelfunktionen fordert“. Ich erlaube mir im Anschluß daran eine Darstellung mitzuteilen, die ich in meinen Vorlesungen benütze. Sie hat den Vorzug, daß sie weder von Reihen-

1) Zu Nr. 15 und 16 vergleiche auch die Arbeit von M. Abraham: „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo XXVIII S. 1, 1909.

Digitized by Google

entwicklungen noch vom Begriff der Kugelfunktionen Gebrauch macht. Diese Funktionen stellen sich vielmehr im Verlauf der Entwicklung von selbst ein.

Um für das Integral $J = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ einen Näherungswert zu gewinnen, benutze ich die Lagrangesche Interpolationsformel. Ich schalte zwischen den Grenzen -1 und $+1$ n Zwischenwerte $a_1, a_2, \ldots a_n$ in beliebiger Reihenfolge ein und setze:

$$(1) \qquad y_\nu = f(a_\nu) \quad g(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

und

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{g(x)}{g'(a_\nu)(x - a_\nu)}\, y_\nu.$$

Das Integral $J_1 = \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ ist ein Näherungswert des Integrals J. Substituiert man den Wert (2) von $F(x)$, so ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$(3) \qquad J_1 = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_n y_n,$$

wo

$$(4) \qquad R_\nu = \int_{-1}^{+1} \frac{g(x)\,dx}{g'(a_\nu)(x - a_\nu)}$$

ist. Wenn von den n Größen R_ν eine gewisse Anzahl — etwa die Größen

$$R_{n-k+1}, \quad R_{n-k+2}, \quad \ldots R_n$$

verschwinden, so wird der Näherungswert J_1 nur von den Größen

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots y_{n-k},$$

aber nicht von den übrigen k Funktionswerten abhängen.

Wir sehen zu, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintritt. Ich setze zur Abkürzung

$$(5) \qquad \begin{cases} n = m + k, \quad g(x) = \varphi(x)\,\psi(x), \\ \varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m), \\ \psi(x) = (x - a_{m+1})(x - a_{m+2})\ldots(x - a_{m+k}). \end{cases}$$

Es ist nun

$$g'(a_\nu) = \begin{cases} \varphi'(a_\nu)\,\psi(a_\nu) & \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots m \\ \psi'(a_\nu)\,\varphi(a_\nu) & \text{für} \quad \nu = m+1, m+2, \ldots m+k. \end{cases}$$

Aus (4) folgt daher

$$(6) \qquad R_\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,\psi(x)\,dx}{\varphi'(a_\mu)\,\psi(a_\mu)(x - a_\mu)}, \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots m,$$

Digitized by Google

und auf Grund unserer Voraussetzung

$$(7)\quad R_{m+\varkappa}\varphi'(a_{m+\varkappa}) = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \cdot \frac{\psi(x)\,dx}{\psi'(a_{m+\varkappa})\,(x - a_{m+\varkappa})} = 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2, \ldots k.$$

Weil sich jede ganze rationale Funktion $\chi(x)$, deren Grad $\leqq k-1$ ist, in der Form

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{k} \frac{\psi(x)}{\psi'(a_{m+\varkappa})\,(x - a_{m+\varkappa})}\,\chi(a_{m+\varkappa})$$

darstellen läßt, so folgt

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,\chi(x)\,dx = 0,$$

wo $\chi(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $(k-1)^{\text{ten}}$ Grad bedeutet. Sie kann sich natürlich auch auf eine Konstante reduzieren.

Diese Gleichung (8) ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem (7). Die Gleichung (8) forme ich durch k-malige partielle Integration um. Die ganze Funktion $(m+k)^{\text{ten}}$ Grades, die aus $\varphi(x)$ durch k-malige Integration zwischen den Grenzen -1 und x hervorgeht, bezeichne ich mit $\Phi(x)$. Es ist also

$$(9)\quad \varphi(x) = \Phi^{(k)}(x), \quad \Phi(-1) = 0, \quad \Phi'(-1) = 0, \ldots \Phi^{(k-1)}(-1) = 0$$

und wegen (8) auch $\Phi^{(k-1)}(1) = 0$.

Aus (8) folgt nun durch partielle Integration mit Rücksicht auf (9):

$$\int_{-1}^{+1} \Phi^{(k-1)}(x)\,\chi'(x)\,dx = 0,$$

und hier bedeutet $\chi'(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $(k-2)^{\text{ten}}$ Grade.

Aus der letzten Gleichung schließt man mit Rücksicht auf (9) weiter, daß

$$\Phi^{(k-2)}(1) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \Phi^{(k-2)}(x)\,\chi''(x)\,dx = 0$$

ist. Diese Schlußweise fortsetzend, erkennt man, daß

$$\Phi^{(k-1)}(1) = 0, \quad \Phi^{(k-2)}(1) = 0, \quad \ldots \Phi(1) = 0$$

ist. Diese Gleichungen zeigen im Zusammenhalt mit den Gleichungen (9), daß sich die ganze Funktion $(m+k)^{\text{ten}}$ Grades $\Phi(x)$ in der Form $\Phi(x) = (x^2-1)^k \Psi(x)$ darstellen läßt, wo $\Psi(x)$ eine ganze Funktion $(m-k)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Es muß also $k \leqq m$ sein.

Digitized by Google

Weil $\Phi(x)$ jedenfalls $2k$ reelle Linearfaktoren besitzt, besitzt $\varphi(x) = \Phi^{(k)}(x)$ jedenfalls k reelle Linearfaktoren. Wenn $k < m$ ist, so müssen die Koeffizienten von $\Psi(x)$ so gewählt werden, daß auch die übrigen $m - k$ Linearfaktoren von $\varphi(x)$ reell sind.

Die eben festgestellten Bedingungen sind, wie aus der durchgeführten Rechnung hervorgeht, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, damit aus der Näherungsformel

$$J_1 = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_m y_m + R_{m+1} y_{m+1} + \cdots + R_{m+k} y_{m+k}$$

die Größen $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots y_{m+k}$ herausfallen. Die übrig bleibenden Koeffizienten $R_1, R_2, \ldots R_m$ sind von den Wurzeln $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_{m+k}$ der Gleichung $\psi(x) = 0$ unabhängig. Aus (6) folgt nämlich:

$$R_\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\varphi'(a_\mu)(x - a_\mu)} + \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x) - \psi(a_\mu)}{(x - a_\mu)\varphi'(a_\mu)\psi(a_\mu)} \varphi(x)\,dx \quad (\mu = 1, 2, \ldots m).$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite kommen die Größen $a_{m+1}, \ldots a_{m+k}$ nicht vor, das zweite verschwindet auf Grund von (8).

Man kommt also zu demselben Näherungswert, gleichviel ob man zur Interpolation die ganze Funktion m^{ten} Grades $\varphi(x) = \frac{d^k (x^2 - 1)^k \Psi(x)}{dx^k}$ oder die Funktion $(m + k)^{\text{ten}}$ Grades $g(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ benützt.

Tübingen, Januar 1911.

Ein Gegenstück zur projektiven Geometrie.

Von Hans Beck in Charlottenburg.

Die Schönheit vieler Aussagen der projektiven Geometrie beruht auf der Einführung der *uneigentlichen* Elemente, durch die die *eigentlichen* Elemente — Punkt, Gerade, Ebene — zu *abgeschlossenen Kontinuis* ergänzt werden. Dieser Begriff ist für die algebraische Geometrie nicht minder grundlegend, wie der der Transformationsgruppe, dessen Bedeutung kürzlich in einer ausgezeichneten Darstellung von Herrn G. Fano die verdiente Würdigung zuteil geworden ist. (Math. Enzykl. III AB4b). Noch weniger Beachtung, als sie dem Gruppenbegriff bisher zuteil wurde, haben Kontinuitätsfragen erfahren, zu denen der folgende Aufsatz einen kleinen Beitrag liefern soll.

Indem wir zeigen, daß die eigentlichen Punkte des Raumes auf eine andere Art zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt werden können, werden wir zu dem Ergebnis gelangen, daß es neben der pro-

Digitized by Google

jektiven Geometrie noch mindestens eine zweite gibt, die wir als *konforme Geometrie* bezeichnen.

Lineare Punktmannigfaltigkeiten der konformen Geometrie werden die *„Kugeln"*, d. i. außer den in der Elementargeometrie so genannten Figuren noch einige Gebilde verwandter Natur. Der Leser bemerkt bereits, daß wir den Stoff der Geometrie auf diese Weise nicht gerade bereichern; aber es wird doch, wie wir hoffen, zutage treten, daß unserer Unterscheidung der beiden Kontinua ein *systematisches* Interesse zukommt.

Auch in höheren Räumen läßt sich die erwähnte Zweiteilung durchführen. Nicht wenige Deutsche Mathematiker lehnen freilich Betrachtungen dieser Art ab; ja sogar die Einführung komplexer Elemente wird zuweilen von denselben Geometern für unzulässig erklärt, die in der Flächentheorie keinen Anstand nehmen, von Minimalkurven usw. zu reden.

Unsere Darstellung soll Lesern dieser Art soweit entgegenzukommen suchen, als dies irgend möglich erscheint. Alle vorkommenden Größen werden demgemäß als reell vorausgesetzt; mehrdimensionale Räume werden nur gelegentlich betrachtet werden, und nur da, wo es, ohne der Sache zu schaden, nicht unterbleiben konnte.

1. *Das konforme Punktkontinuum.* — Ein eigentlicher Punkt des Raumes ist durch *drei* rechtwinklige Cartesische Koordinaten x, y, z definiert. Zu uneigentlichen Punkten gelangt man durch Einführung *homogener* Koordinaten, die wir durch folgende Gleichungen erklären:

$$(1) \qquad \frac{x_{00}}{x_0} = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y, \quad \frac{x_3}{x_0} = z.$$

Jedem eigentlichen Punkte läßt sich so eindeutig ein System von *fünf* homogenen Koordinaten $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ zuordnen. Diese sind freilich überzählig in dem Sinne, daß zwischen ihnen die Relation besteht

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(xx) \equiv x_0 x_{00} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Ist umgekehrt ein System von fünf homogenen Verhältnisgrößen $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ gegeben, welches die Gleichung (2) befriedigt, so kann man daraus x, y, z wiedergewinnen, *vorausgesetzt, daß* $x_0 \neq 0$ *ist.* Jedem solchen System entspricht also ein eigentlicher Punkt des Raumes.

Im ausgeschlossenen Falle $x_0 = 0$ muß nach (2) noch $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ sein, sodaß als einziges System, dem kein eigentlicher Punkt zugeordnet ist, übrig bleibt

$$(3) \qquad x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0 : 0 : 0.$$

Wir sagen, das System (3) stellt einen *accessorischen Punkt* dar.

Digitized by Google

Dieser entzieht sich der Darstellung durch inhomogene Koordinaten und auch der durch die homogenen *projektiven* Koordinaten.

Die Gesamtheit der eigentlichen Punkte des Raumes wird durch den accessorischen Punkt zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt. (Konformes Kontinuum.)

2. *Die Hauptgruppe.* Wir stellen jetzt die „Hauptgruppe" des Raumes, d. i. die Gruppe G_7 der Ähnlichkeiten in den neuen Koordinaten auf. Dabei können wir die Ergebnisse der Arbeit von Herrn *E. Study*, Von den Bewegungen und Umlegungen[1]), verwerten. Demnach setzen wir:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0' = kA_{00}x_0 \\ x_i' = A_{i0}x_0 + A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

wo die x *projektive* Koordinaten sind. Die Größe k darf nicht verschwinden; zwischen den A bestehen die bekannten Relationen zweiten Grades, die identisch erfüllt werden, wenn man setzt:

$$(5)\qquad \begin{cases} A_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad A_{ii} = \alpha_0^2 + \alpha_i^2 - \alpha_k^2 - \alpha_l^2, \\ A_{kl} = 2(\alpha_k\alpha_l + \alpha_0\alpha_i), \qquad A_{ik} = 2(\alpha_k\alpha_l - \alpha_0\alpha_i), \\ A_{i0} = 2(\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k - \alpha_0\beta_i + \alpha_i\beta_0). \\ \qquad (i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2). \end{cases}$$

Die *Parameter* $\alpha_0 \ldots \alpha_3$, $\beta_0 \ldots \beta_3$ gestatten dabei Multiplikation mit einem gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor, ohne daß sich die dargestellte Transformation ändert. Sie sind noch an die Ungleichung gebunden

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0;$$

ferner ist es zweckmäßig, sie der Relation zu unterwerfen

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

wie wir im Nachfolgenden tun werden.

Führen wir nun *konforme* Koordinaten ein, so ist den Gleichungen (4) noch ein Ausdruck für x_{00}' hinzuzufügen. Setzt man noch

$$(6)\qquad \begin{cases} A_{0i} = 2(\alpha_k\beta_l - \alpha_l\beta_k + \alpha_0\beta_i - \alpha_i\beta_0), \\ A_0 = 4(\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2), \end{cases}$$

so erhalten wir für die Hauptgruppe die Darstellung

$$(7)\qquad \begin{cases} k \cdot x_{00}' = A_{00}x_{00} + A_0x_0 - 2A_{01}x_1 - 2A_{02}x_2 - 2A_{03}x_3 \\ x_0' = * \quad kA_{00}x_0 \quad * \quad * \quad * \\ x_1' = * \quad A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ x_2' = * \quad A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ x_3' = * \quad A_{30}x_0 + A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3, \end{cases}$$

1) Math. Ann. 39, S. 527—528. 1891.

Digitized by Google

bei deren Ableitung die Relation zu beachten ist:

$$A_{00}A_{0i} + A_{10}A_{1i} + A_{20}A_{2i} + A_{30}A_{3i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Für $k = +1$ gibt das System (7) die Bewegungen, für $k = -1$ die Umlegungen. Die Transformationen von G_7 sind also auch in den konformen Koordinaten linear. Sie lassen den accessorischen Punkt in Ruhe, und können durch diese Eigenschaft erklärt werden.

3. *Die konforme Gruppe.* — Wie im projektiven Kontinuum die Ähnlichkeiten eine Untergruppe der Kollineationen bilden, läßt sich auch im konformen Kontinuum eine umfassendere Gruppe linearer Transformationen aufstellen. In fünf Veränderlichen gibt es eine G_{24} von linearen Transformationen; diese sind aber im allgemeinen nicht Transformationen *von Punkten*, da sie die Gleichung (2) nicht invariant lassen. Die größte Untergruppe von G_{24}, deren Transformationen Punkte in Punkte überführen, ist zehngliedrig; wir nennen sie kurz G_{10} und werden noch nachweisen, daß sie mit der *konformen Gruppe* des Raumes identisch ist. Die Transformationen von G_{10}, soweit sie nicht Ähnlichkeiten sind, verwandeln den accessorischen Punkt in einen eigentlichen Punkt. Erst in der Geometrie der Gruppe G_{10} tritt ein wirkliches Bedürfnis nach Einführung des accessorischen Punktes hervor.

Gegenüber den konformen Transformationen muß nun der Ausdruck

$$(xy) \equiv (yx) \equiv x_{00}y_0 + x_0y_{00} - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 \tag{8}$$

die Invarianteneigenschaft besitzen, der durch Polarisierung aus dem durch Gleichung (2) erklärten Ausdruck (xx) hervorgeht und diesen demnach als speziellen Fall umfaßt.

Die Gruppe G_{10} erhält man jetzt, wenn man die Ähnlichkeiten zusammensetzt mit Transformationen, die durch die Identität geliefert werden:

$$(px') \equiv 2(ax)(ap) - (aa)(xp). \tag{9}$$

Diese Identität in den p vertritt die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{00}' &= 2(ax)a_{00} - (aa)x_{00} \\ x_0' &= 2(ax)a_0 \ - (aa)x_0 \\ x_1' &= 2(ax)a_1 \ - (aa)x_1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Dabei soll noch $(aa) \neq 0$ sein, d. i. die fünf Verhältnisgrößen $a_{00} : a_0 : a_1 : a_2 : a_3$ sollen *keine Punktkoordinaten* sein.

Die Transformation (9) ist *involutorisch.* Man findet leicht

$$(x'y') = (aa)^2(xy). \tag{10}$$

Legt man den a alle möglichen Werte bei, für die $(aa) \neq 0$, so erhält man durch Zusammensetzung aller Transformationen (9) mit Ähnlichkeiten die ganze Gruppe G_{10}, wie später evident wird.

Digitized by Google

Da man durch Zusammensetzung von Transformationen (9) auch alle Transformationen der Gruppe G_7 erhalten kann (vgl. **6**), so läßt sich die ganze Gruppe G_{10} aus Transformationen dieser Art aufbauen.

Die explizite Darstellung der Gruppe G_{10} bietet jetzt keine Schwierigkeit; wir glauben sie uns ersparen zu können, da ein Gewinn an Übersichtlichkeit nicht erzielt wird.

Im konformen Kontinuum sind die konformen Transformationen überall wohldefiniert, eindeutig und stetig.

4. *Lineare Punktmannigfaltigkeiten.* — Alle konformen Transformationen sind *linear* in den konformen Koordinaten (nicht aber in projektiven Koordinaten); sie führen also lineare Punktmannigfaltigkeiten in ebensolche über; solche Mannigfaltigkeiten sind natürlich durch homogene lineare Gleichungen in den *konformen* Koordinaten definiert.

Um mit diesem Begriff eine Anschauung zu verbinden, ersetzen wir in der Gleichung

$$(11) \qquad (ax) \equiv a_0 x_{00} + a_{00} x_0 - 2a_1 x_1 - 2a_2 x_2 - 2a_3 x_3 = 0$$

die konformen Koordinaten durch ihre Werte aus den Gleichungen (1). Das gibt

$$a_0(x^2 + y^2 + z^2) + a_{00} - 2a_1 x - 2a_2 y - 2a_3 z = 0.$$

Hier sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden.

1. $a_0 \neq 0$, $(aa) < 0$. Eine *Kugel* vom Radius $\sqrt{-\frac{1}{2}(aa)} : a_0$, deren Mittelpunkt die projektiven Koordinaten $a_0 : a_1 : a_2 : a_3$ besitzt.

2. $a_0 \neq 0$, $(aa) = 0$. Ein *eigentlicher Punkt*, dessen konforme Koordinaten die a sind.

3. $a_0 \neq 0$, $(aa) > 0$. Die Gleichung (11) hat keine Nullstellen. Man spricht trotzdem hier bekanntlich von einer („reellen") Kugel, die man auch wohl *nullteilig* genannt hat; sie hat reellen „Mittelpunkt" und rein imaginären „Radius".

4. $a_0 = 0$, $(aa) < 0$. Ein *Paar von Ebenen*, von denen die eine eigentlich und die andere uneigentlich ist (im Sinne der *projektiven* Geometrie); im konformen Kontinuum wird man als geometrischen Repräsentanten der Gleichung (11) die *eigentliche Ebene* ansehen.

5. $a_0 = 0$, $(aa) = 0$. *Der accessorische Punkt.*

Alle diese Gebilde werden wir mit dem Namen Kugeln belegen, denn von den Transformationen von G_{24} werden diese Figuren transitiv untereinander vertauscht. Als *Koordinaten der Kugel* (11) benutzen wir die sechs Verhältnisgrößen $a_{00} : a_0 : a_1 : a_2 : a_3$, die jetzt also nur in den Fällen 2 und 5 an die Relation $(aa) = 0$ gebunden sind. Bezeichnen wir entsprechend die Koordinaten einer veränderlichen Kugel durch

Digitized by Google

$x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, so ist klar, daß die Gleichungen (7) und (9) auch Transformationen *von Kugeln* sind.

Aus (10) folgt aber

$$(x'x') = (aa)^2(xx),$$

sodaß das Vorzeichen der Invariante (xx) durch eine konforme Transformation nicht abgeändert werden kann. Demgemäß gibt es gegenüber konformen Transformationen drei Klassen von Kugeln:

1. $(aa) < 0$. „*Einteilige*" Kugeln. Dahin gehören auch die Ebenen, d. i. diejenigen einteiligen Kugeln, die durch den accessorischen Punkt gehen.

2. $(aa) = 0$. Punkte (im Sinne der *konformen* Geometrie).

3. $(aa) > 0$. Nullteilige Kugeln.

Die Kugeln jeder dieser drei Klassen werden durch die Transformation von G_{10} unter sich transitiv vertauscht; zwei Kugeln verschiedener Klassen können niemals durch eine Transformation von G_{10} ineinander übergeführt werden. Dagegen kann eine Transformation von G_{10} eine Ebene in eine Kugel (im Sinne der Elementargeometrie) überführen und umgekehrt. Die Ebenen sind also in der konformen Geometrie von den übrigen einteiligen Kugeln nicht unterscheidbar; der Unterschied tritt erst hervor, wenn wir uns auf Transformationen der Hauptgruppe beschränken.

Wir weisen zum Schlusse dieses Abschnitts noch darauf hin, was für bemerkenswerte Änderungen gegen die projektive Geometrie die Einführung des neuen Punktkontinuum zufolge hat. Während in der projektiven Geometrie eine Ebene niemals einer Kugel äquivalent ist, eine Kugel aber jedem sonstigen Ellipsoid, bilden in der konformen Geometrie die Ebenen gar keinen selbständigen Begriff, sie sind eben „Kugeln", die *niemals* einem sonstigen Ellipsoid äquivalent sind. Die Ebene hat nur einen einzigen nicht-eigentlichen Punkt. Alle geraden Linien des Raumes haben einen (den accessorischen) Punkt gemeinsam. *Zwei Gerade können sich in zwei getrennten Punkten treffen.*

Überhaupt werden *alle* geometrischen Gebilde in andrer Weise abzuschließen sein, als im projektiven Kontinuum.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Kontinuis läßt sich aber erschöpfend nur angeben, wenn man entweder in einen höheren Raum übergeht (vgl. 8), oder die Beschränkung auf das reelle Gebiet aufhebt.

5. *Das komplexe Gebiet.* Legen wir den an die Relation (2) gebundenen fünf Koordinaten $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ nunmehr *komplexe* Werte bei, so ergeben sich statt des einen einzigen accessorischen Punktes

Digitized by Google

($x_0 = 0$) deren ∞^4. Diese lassen sich auf die ∞^4 uneigentlichen komplexen Punkte des projektiven Kontinuum *nicht* lückenlos eindeutig umkehrbar abbilden; sie haben vielmehr den Zusammenhang eines irreduziblen *Kegels* 2. Ordnung ($x_0 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$).

Das jetzt zu einer sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit komplexer Punkte ausgedehnte konforme Kontinuum hat den Zusammenhang eines nicht-speziellen *Gewindes* (linearer Linienkomplex), wobei dieses ins komplexe Gebiet des projektiven Kontinuum fortzusetzen ist. Dabei lassen sich reellen Punkten im allgemeinen nicht reelle Gewindegerade zuordnen (andernfalls wäre der Exkurs ins komplexe Gebiet überflüssig).

Die nunmehr von zehn *komplexen* Parametern abhängige konforme Gruppe erweist sich als holomorph zur Gruppe der (komplexen) automorphen Kollineationen des nicht-speziellen Gewindes.

Nennen wir zwei Punkte x und y *orthogonal*, sobald die durch Gleichung (11) gegebene bilineare Simultaninvariante (xy) verschwindet, so können wir aussprechen: Orthogonalen Punkten lassen sich Gewindegerade zuordnen, die sich schneiden.

Der Unterschied zwischen einteiligen und nullteiligen Kugeln verschwindet. Den Kugeln sind die linearen Kongruenzen des Gewindes zugeordnet. Die Leitgeraden der Kongruenz entsprechen sich in der durch das Gewinde vermittelten Korrelation.[1])

Verschwindet für die Kugel $(ax) = 0$ die Invariante (aa), so ist sie jetzt nicht mehr mit einem Punkte identisch, sondern Ort von ∞^4 Punkten, die alle zu einem von ihnen (Doppelpunkt) orthogonal liegen. Die diesen „Punktkugeln" zugeordneten linearen Kongruenzen sind solche mit zusammenfallenden Leitlinien, die dann ebenfalls Gewindegerade sind. Die Punktkugeln dürfen nicht (vgl. G. Fano, Math. Enzykl. III. AB 4b, S. 314) als Minimalkegel bezeichnet werden, obwohl sie denselben Zusammenhang haben. Das steht im Zusammenhang damit, daß es im accessorischen Gebiet (welches eine *Kugel* bildet) außer dem Doppelpunkt (reeller accessorischer Punkt) *keine* gegenüber allen Ähnlichkeiten invariante Teilpunktmannigfaltigkeit derart gibt, wie im projektiven Kontinuum den absoluten Kegelschnitt (imaginärer Kugelkreis). Zwei Kugeln brauchen eben nicht dieselben accessorischen Punkte zu haben; das ist nur für „konzentrische" Kugeln der Fall.

Die Schnittfigur zweier getrennter Kugeln wird man als *Kreis* bezeichnen. Derer gibt es drei Klassen, deren Individuen von sechs, fünf

1) Vgl. Lie-Scheffers, Geom. der Berührungstransformationen. S. 464, wo aber Kontinuitätsfragen nicht berührt werden.

Digitized by Google

und drei Konstanten abhängen. Bilder im Gewinde sind: die Erzeugenden der einen Schar einer singularitätenfreien Fläche 2. Ordnung, zwei Geradenbüschel, die eine Gewindegerade gemeinsam haben, endlich die Geradenbüschel. Die „Kreise" der letzten Klasse sind die überhaupt einfachsten Punktmannigfaltigkeiten der konformen Geometrie; die Punktkoordinaten lassen sich durch homogene Parameter *linear* darstellen.

Der Leser bestätigt die Behauptungen dieses Abschnitts leicht an der Hand der Formeln:

$$x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 2i\mathfrak{X}_{01} : 2\mathfrak{X}_{23} : -\mathfrak{X}_{31} + i\mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{31} i - \mathfrak{X}_{02} : -\mathfrak{X}_{12} + i\mathfrak{X}_{03},$$

wo die $\mathfrak{X}_{ik}$ Plückersche Linienkoordinaten sind. Vermöge dieser Gleichungen ist das konforme Punktkontinuum auf das Gewinde abgebildet

$$\mathfrak{X}_{03} - i\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

Damit verlassen wir das komplexe Gebiet.

6. *Die Inversionen.* Die simultane Invariante (ab) zweier Kugeln a und b sagt durch ihr Verschwinden im Falle einteiliger Kugeln aus, daß sich beide senkrecht durchsetzen, wie der Leser leicht selbst nachweist. In allen übrigen Fällen dient die Gleichung $(ab) = 0$ zur *Definition orthogonaler Lage* der beiden Kugeln. Insbesondere liegt ein Punkt zu einer einteiligen Kugel orthogonal, wenn er mit ihr vereinigt liegt (im Sinne der projektiven Geometrie). Aus Gleichung (10) folgt jetzt:

Eine Transformation von G_{10} verwandelt orthogonale Kugeln wieder in ebensolche.

Ferner besitzen zwei Kugeln gegenüber solchen Transformationen auch eine transzendente *absolute* Invariante, die unter Umständen den Winkel der beiden Kugeln darstellt. Damit ist aber der noch fehlende Nachweis erbracht, daß die Gruppe G_{10} wirklich mit der konformen Gruppe des Raumes übereinstimmt; damit sind ferner die meisten von uns eingeführten Termini motiviert.

In der Transformation (9) erkennen wir jetzt die *Inversion an der Kugel a.* In der Tat folgt aus

$$x' = 2(ax)a - (aa)x,$$

daß alle *Punkte* in Ruhe bleiben, die zur Kugel a orthogonal liegen ($(ax) = 0$). Deuten wir die x als *Kugel*koordinaten, so ergibt sich, daß die Transformation sich auf die Identität reduziert für alle *Kugeln*, die zu a orthogonal liegen. Ferner bleibt auch die Kugel a in Ruhe.

Im besonderen Falle wird die Transformation zur *Spiegelung an der Ebene*, wenn nämlich $a_0 = 0$ ist.

Digitized by Google

Eine Umlegung läßt sich durch Zusammensetzung von höchstens drei, eine Bewegung durch höchstens vier Spiegelungen an Ebenen darstellen. Eine perspektive Ähnlichkeit läßt sich durch zwei Spiegelungen an konzentrischen Kugeln erzeugen. Demnach läßt sich die ganze konforme Gruppe aus Inversionen aufbauen, wie ja längst bekannt ist.

Wir haben uns noch kurz mit dem eingangs erwähnten Geometer auseinander zu setzen. Der Begriff der nullteiligen Kugel kann nicht entbehrt werden, wenn man nicht zu recht umständlichen Umschreibungen seine Zuflucht nehmen will; hier interessiert uns besonders, daß auch die Inversion an einer nullteiligen Kugel eine durchaus *reelle* Transformation ist, die reelle Punkte in ebensolche, reelle Kugeln in ebensolche verwandelt.

7. *Die Nichteuklidische Geometrie im konformen Raume.* Die Ähnlichkeiten können jetzt auch erklärt werden als diejenigen konformen Transformationen, die die accessorische *Kugel* in sich selbst überführen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, Nichteuklidische Geometrien im konformen Kontinuum zu definieren, wie wir noch kurz andeuten wollen.

Als „Bewegungen" wird man die automorphen konformen Transformationen einer Kugel erklären, *die sich nicht auf einen Punkt reduziert.* Je nachdem diese Kugel nullteilig oder einteilig ist, haben wir die *sphärische* oder *pseudosphärische* Geometrie vor uns, die also im *konformen* Kontinuum sich abspielen, während die *elliptische* und *hyperbolische* Geometrie im *projektiven* Kontinuum arbeiten.

Während es im Falle der pseudosphärischen Geometrie „Bewegungen', gibt, die das Innere der absoluten Kugel mit dem Äußeren vertauschen (z. B. die „absolute Spiegelung"), gibt es hyperbolische „Bewegungen" dieser Art nicht. Daraus folgt, daß die Bewegungsgruppen nur *meroëdrisch* isomorph sind.

Absolutes Gebilde der hyperbolischen Geometrie ist eine singularitätenfreie *Fläche 2. Ordnung* mit reellen Punkten aber ohne reelle Erzeugende, die also eine Kugel sein *kann*; in der pseudosphärischen Geometrie ist das absolute Gebilde dagegen eine einteilige *Kugel*, die zwar eine Ebene sein kann, aber niemals z. B. ein sonstiges Ellipsoid.

Lineare Mannigfaltigkeiten der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie sind die ∞^3 Ebenen; lineare Mannigfaltigkeiten der sphärischen bzw. pseudosphärischen Geometrie die ∞^4 Kugeln.

Es gibt aber kleinere invariante lineare Mannigfaltigkeiten, im ersten Falle die ∞^2 Minimalebenen (Tangentialebenen der absoluten Fläche), das anderemal die ∞^3 Kugeln, die zur absoluten Kugel orthogonal sind. Der Umstand, daß diese letzteren zu den Ebenen der

Digitized by Google

elliptischen (hyperbolischen) Geometrie in eine gewisse Analogie gesetzt werden können, scheint uns schuld daran zu sein, daß die Unterschiede zwischen den Nichteuklidischen Disziplinen der beiden Kontinua neuerdings so häufig verkannt werden. Demgegenüber betonen wir:

Es gibt (unbeschadet ihrer weiteren Gabelung im reellen Falle) *zwei* Nichteuklidische Geometrien, eine projektive und eine konforme.[1])

Genaueres über diesen Gegenstand, besonders über das Verhältnis der beiden Bewegungsgruppen muß einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben; doch hat der Verfasser diese Dinge für den Fall der Ebene eingehend auseinander gesetzt.[2])

8. *Höhere Räume. Liniengeometrie und Kinematik.* Die konforme Geometrie der Ebene ist die Möbiussche Geometrie der Kreisverwandtschaften; die konforme Gruppe im Sinne unserer bisherigen Überlegungen ist dann sechsgliedrig. Die konforme Gruppe im üblichen Sinne des Wortes ist unendlich. Es liegt hier eine Inkonsequenz unserer Terminologie vor, die wir aber nicht zu vermeiden wissen; auch das Wort *sphärisch* statt konform, welches sonst sehr geeignet wäre, kollidiert mit dem Sprachgebrauch der Nichteuklidischen Geometrie, und zwar in *allen* Räumen, während das Wort konform nur in der Ebene schlecht paßt. Die Bezeichnung *zyklisches* Kontinuum statt konformes Kontinuum liegt in höheren Räumen dem Gegenstande zu fern und würde jedenfalls andere Begriffsbildungen voraussetzen. Der erwähnte Übelstand läßt sich übrigens heben, wenn man ein Adjektivum hinzunimmt und von der *sechsgliedrigen* konformen Gruppe im Gegensatz zur *unendlichen* konformen Gruppe spricht.

Im Raume von n Dimensionen (R_n) dienen als konforme Punktkoordinaten $n+2$ homogene Größen $x_{00} : x_0 : x_1 : \cdots : x_n$, die der Relation genügen

$$\tfrac{1}{2}(xx) = x_0 x_{00} - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 0;$$

die Gesamtheit der eigentlichen Punkte ($x_0 \neq 0$) wird durch den accessorischen Punkt $(1:0:0:\cdots:0)$ zum konformen Kontinuum abgeschlossen. Die konforme Gruppe wird $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$-gliedrig und kann

1) Die wohl zuerst von Beltrami aufgestellte Behauptung, daß es von *der* Nichteuklidischen Geometrie *zwei Bilder* gäbe, ist unhaltbar. Man versuche, *die* Nichteuklidische Geometrie zu definieren.

2) *Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften.* Am. Trans. Vol. XI Nr. 4, 1910. S. 439—442. Das konforme Punktkontinuum der Ebene ist dort als zyklisches Kontinuum bezeichnet.

Digitized by Google

ebenfalls durch involutorische Transformationen erzeugt werden; in der Gleichung (11) ist nur das Symbol (ax) zu ersetzen durch

$$(ax) = x_0 a_{00} + x_{00} a_0 - 2a_1 x_1 - \cdots - 2a_n x_n.$$

Die konforme Gruppe umfaßt die Ähnlichkeitstransformationen und die Nichteuklidischen Bewegungen des R_n.

Das konforme Kontinuum des R_n läßt sich durchaus eindeutig umkehrbar abbilden auf eine singularitätenfreie n-fach ausgedehnte *quadratische* Punktmannigfaltigkeit M_n^2, die im R_{n+1} verläuft.[1]) Die konforme Gruppe besteht aus den automorphen Kollineationen dieser M_n^2.

Im Falle $n = 1$ fallen beide Kontinua, das projektive und das konforme, zusammen, weil eben der R_1 sich auf eine M_1^2 im R_2 abbilden läßt. Später ist das nicht mehr der Fall.

Von besonderem Interesse sind die Fälle $n = 4$ und $n = 6$. In den konformen Geometrien dieser Räume haben wir getreue Abbilder der *Plückerschen Liniengeometrie*, sowie der *Kinematik*[2]), freilich erfolgt der Zusammenhang durch das komplexe Gebiet hindurch. In diesen Räumen sind bekanntlich die projektiven Disziplinen weniger wichtig. Es scheint auch hierin der gerade bzw. ungerade Charakter der Dimensionszahlen mitzuspielen.

Dem Leser wird die Plückersche Liniengeometrie geläufig sein. Die Art und Weise, wie dort sechs Verhältnisgrößen bald als Linien-, bald als Gewindekoordinaten benutzt werden, findet ihr Analogon in der konformen Geometrie des Raumes in der abwechselnden Benutzung unserer fünf Verhältnisgrößen a als Punkt- bzw. Kugelkoordinaten. Auch sonst wird das Heranziehen von Vorstellungen aus der Liniengeometrie dazu dienen können, manchen unserer Schritte als nicht willkürlich, sondern in gewissem Sinne notwendig erkennen zu lassen. Eine ausführlichere Darstellung verschiedener hier nur sehr kurz behandelten Dinge gedenken wir in nächster Zeit zu geben, wo dann auch einige historische Bemerkungen Platz finden sollen.

Geometry is not all projective.

Charlottenburg, 4. Februar 1911.

---

1) Die M_n^2 hat demnach anderen Zusammenhang, als der R_n. Wir sehen uns zu dieser trivialen Bemerkung veranlaßt, weil in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ kürzlich das Gegenteil behauptet worden ist. Gebilde, die nur durch 1-2-deutige Abbildung lückenlos aufeinander bezogen werden können, haben eben *verschiedenen* Zusammenhang.

2) E. Study, Geometrie der Dynamen. S. 555—596. Math. Ann. **39.** 1891. S. 441—566. Jahrb. d. D. Math.-Vgg. XIX. 1910. S. 255—263.

Digitized by Google

Zur Tetraedergeometrie.

Von J. NEUBERG in Lüttich.

(Fortsetzung und Schluß von Bd. 16, S. 20.)

4. Das isodynamische Tetraeder.

1. Zum leichteren Verständnis der nachfolgenden Entwicklungen bringe ich einige Sätze aus der Dreiecksgeometrie in Erinnerung.

Die Tangenten in den Ecken eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ an den Umkreis (Zentrum O) bilden das *Tangentialdreieck* $B_1B_2B_3$. Die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (*Symmedianen, Gegenmittellinien*) treffen sich in einem Punkte K (*Lemoinescher Punkt, Punkt von Grebe*) mit den baryzentrischen Koordinaten a_1^2, a_2^2, a_3^2. Jede Symmediane A_iB_i halbiert die A_i-Antiparallelen.[1])

K ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Seitenmitten von $A_1A_2A_3$ mit den zugehörigen Höhenmitten.

Die drei sich in K treffenden Antiparallelen sind einander gleich; ihre sechs Endpunkte liegen mithin auf einem Kreise aus dem Mittelpunkte K (*zweiter Lemoinescher Kreis*).

Zieht man durch K Parallelen zu den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, so treffen sie die anderen Seiten in sechs Punkten eines Kreises (*erster Lemoinescher Kreis*), dessen Zentrum die Strecke OK halbiert.

Diese Kreise sind besondere Fälle der Tuckerschen Kreise, welche folgende Definitionen zulassen.

a) Es sei $C_1C_2C_3$ ein zu $A_1A_2A_3$ in bezug auf K homothetisches Dreieck; seine Seiten treffen die nichtentsprechenden Seiten von $A_1A_2A_3$ in sechs Punkten eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Geraden OK liegt.

b) Es sei $D_1D_2D_3$ ein zu $B_1B_2B_3$ in bezug auf K homothetisches Dreieck; die sechs Schnittpunkte der nichtentsprechenden Seiten der Dreiecke $D_1D_2D_3$, $A_1A_2A_3$ liegen auf einem Kreise.

Von einer dritten Definition wird hier nicht die Rede sein.

Ein merkwürdiger Kreis dieser Art ist der *Taylorsche Kreis*, welcher die Projektionen der Höhenfußpunkte von $A_1A_2A_3$ auf die Nachbarseiten enthält.

---

1) Ich nenne z. B. A_1-Antiparallele jede zu B_2B_3 parallele und durch die Geraden A_1A_2, A_1A_3 begrenzte Gerade.

Digitized by Google

2. In der Folge werde ich nachstehende Bezeichnungen anwenden:

$A_1A_2A_3A_4$ ist das *Grundtetraeder* T_A;

Δ_i das der Ecke A_i gegenüberliegende Dreieck und auch dessen Inhalt;

a_{ik} die Länge der Kante A_iA_k und auch der entsprechende Flächenwinkel von T_A;

O_i und R_i bedeuten das Zentrum und den Halbmesser des Umkreises des Dreiecks Δ_i; K_i den Lemoineschen Punkt von Δ_i;

O und R das Zentrum und den Halbmesser der Umkugel von T_A;

h_1, h_2, h_3, h_4 die Höhen A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 von T_A;

$B_1B_2B_3B_4 \equiv T_B$ das *Tangentialtetraeder*, dessen Ebenen die Umkugel in A_1, A_2, A_3, A_4 berühren.

Die Dreikante der Tetraeder T_A, T_B werden einfach durch ihren Scheitel bezeichnet.

3. Im allgemeinen bilden die vier Geraden A_iB_i einen hyperboloidischen Wurf. Obschon dieser Satz sehr bekannt ist, scheint es mir geeignet, folgenden Beweis wiederzugeben. Die Ebene $A_2A_3A_4$ schneidet aus der Kugel O den Kreis O_1, aus dem Dreikant B_1 ein Dreieck $B_2'B_3'B_4'$ aus, dessen Seiten den Kreis O_1 in A_2, A_3, A_4 berühren. Folglich schneiden sich die Geraden A_2B_2', A_3B_3', A_4B_4' im Punkte K_1, und haben die Ebenen $B_1B_2A_2$, $B_1B_3A_3$, $B_1B_4A_4$ eine gemeinschaftliche Schnittlinie B_1K_1, welche die drei Geraden B_2A_2, B_3A_3, B_4A_4 trifft. Hieraus schließt man, daß die vier Geraden B_iA_i Erzeugende einer Schar und die vier Geraden B_iK_i Erzeugende der zweiten Schar einer Regelfläche sind.

4. Damit die vier Geraden A_iB_i sich in einem Punkte treffen, müssen sie respektive mit den Geraden B_iK_i zusammenfallen; dann haben die vier Geraden A_iK_i einen gemeinschaftlichen Punkt K. Die Geraden A_2K_2, A_3K_3 liegen jetzt in einer und derselben Ebene, und die Symmedianen A_2K_3, A_3K_2 teilen die Kante A_1A_4 nach demselben Verhältnisse; mithin hat man

$$A_1A_2^2 : A_4A_2^2 = A_1A_2^2 : A_4A_3^2.$$

Hieraus folgert man, daß die vier Geraden A_iB_i einen gemeinsamen Punkt K besitzen, wenn

$$a_{12}a_{34} = a_{13}a_{24} = a_{14}a_{23}, \tag{1}$$

oder, was gleichbedeutend ist, wenn

$$\sin a_{12} \cdot \sin a_{34} = \sin a_{13} \cdot \sin a_{24} = \sin a_{14} \cdot \sin a_{23}.$$

Ein solches Tetraeder habe ich *isodynamisch* (gleichproduktisch) benannt.

Digitized by Google

Auch die Geraden, welche die Ecken von T_A mit den Inzentren der gegenüberliegenden Dreiecke verbinden, treffen sich in einem Punkte.

Wegen seiner Eigenschaften könnte man K den *Lemoineschen Punkt* des isodynamischen Tetraeders nennen; der Punkt L, dessen Abstände von den Ebenen eines (beliebigen) Tetraeders die kleinste Quadratsumme haben, würde dann *Punkt von Lhuilier* heißen.

5. Aus der Matrix der baryzentrischen Koordinaten:

$$\begin{array}{llllll} K_1 & \ldots & 0 & a_{34}^2 & a_{42}^2 & a_{23}^2 \\ K_2 & \ldots & a_{34}^2 & 0 & a_{41}^2 & a_{13}^2 \\ K_3 & \ldots & a_{24}^2 & a_{41}^2 & 0 & a_{12}^2 \\ K_4 & \ldots & a_{23}^2 & a_{31}^2 & a_{12}^2 & 0\,, \end{array}$$

folgert man die baryzentrischen Koordinaten von K:

$$\frac{a_{34}^2 a_{42}^2}{a_{41}^2},\quad a_{34}^2,\quad a_{42}^2,\quad a_{23}^2.$$

Multipliziert man diese Ausdrücke mit $\frac{a_{23} a_{41}^2}{a_{34} a_{42}}$ und berücksichtigt man die Relationen (1), so bekommt man

$$a_{23} a_{34} a_{42},\quad a_{34} a_{41} a_{12},\quad a_{41} a_{12} a_{24},\quad a_{12} a_{23} a_{31},$$

oder nach Weglassung des Faktors 4

$$\Delta_1 R_1,\quad \Delta_2 R_2,\quad \Delta_3 R_3,\quad \Delta_4 R_4.$$

Für die Normalkoordinaten δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 des Punktes K hat man

$$\frac{\delta_1}{R_1} = \frac{\delta_2}{R_2} = \frac{\delta_3}{R_3} = \frac{\delta_4}{R_4} = \frac{3V}{\Sigma \Delta_1 R_1},$$

wo V das Volumen des Tetraeders T_A bezeichnet.

Dieses Resultat läßt eine Deutung zu, welche an das erste Brocardsche Dreieck erinnert: Es seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Projektionen des Punktes K auf die Geraden OO_1, OO_2, OO_3, OO_4; die Kreise O_1, O_2, O_3, O_4 werden aus den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 durch vier ähnliche Kegel projiziert.

6. Die Schnittgeraden der entsprechenden Ebenen der zwei perspektiven Tetraeder T_A, T_B liegen in der Polarebene des Punktes K in bezug auf die Kugel O; folglich steht die Gerade OK senkrecht zu dieser Polarebene (*Lemoinesche Ebene* des Tetraeders T_A).

Die Ebene der Parallelen AH_i, OO_i enthält offenbar die Geraden A_iB_i, OK; mithin sind die Punkte H_i, K_i, O_i kollinear und OK *gehört zur Höhenfläche des Tetraeders* T_A.

Eine Kollineation, welche die Lemoinesche Ebene ins Unendliche verlegt, verwandelt K in den Schwerpunkt des an Stelle von T_B tre-

Digitized by Google

tenden Tetraeders T_B' und A_1, A_2, A_3, A_4 in die Schwerpunkte der Seitenflächen von T_B'. Mit Beibehaltung der alten Bezeichnungen findet man leicht in dem neuen Gebilde die Relationen

$$KA_i : KB_i = -1:3, \quad K_iA_i : K_iB_i = -1:2,$$

mithin

$$\frac{KA_i}{K_iA_i} : \frac{KB_i}{K_iB_i} = \frac{2}{3}.$$

Ein Doppelverhältnis bleibt unverändert in einer Kollineation; kehrt man also zum Urgebilde zurück und projiziert den Wurf $KK_iA_iB_i$ aus dem Punkte O_i auf die Höhe A_iH_i, so erhält man

$$(Q_iH_iA_i\,\infty) = \frac{A_iQ_i}{A_iH_i} = \frac{2}{3},$$

wo Q_i den Punkt $(O_iK,\ A_iH_i)$ bezeichnet.

Mithin ist K der gemeinschaftliche Punkt der vier Geraden, welche das Umzentrum einer Seitenfläche von T_A mit dem Punkte verbinden, der die entsprechende Höhe A_iH_i nach dem Verhältnisse 2 : 1 teilt.

7. Zur Abkürzung nenne ich *semiinvers* zwei Dreiecke oder zwei Tetraeder, deren Ecken sich zwei zu zwei in einer Inversion entsprechen.

Es seien $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ zwei semiinverse Dreiecke, A_4 das Inversionszentrum, m die Potenz. Die ähnlichen Dreiecke $A_4A_1'A_2'$, $A_4A_2A_1$ geben

$$(1) \qquad \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \frac{A_4A_1'}{A_4A_2} = \frac{m}{A_4A_1 \cdot A_4A_2}.$$

Aus dieser Gleichheit und den analogen in $A_2'A_3'$ und $A_3'A_1'$ schließt man

$$(2) \qquad \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2 \cdot A_3A_4} = \frac{A_2'A_3'}{A_2A_3 \cdot A_1A_4} = \frac{A_3'A_1'}{A_3A_1 \cdot A_2A_4}.$$

Liegt A_4 außerhalb der Ebene $A_1A_2A_3$, so ist die Ebene $A_1'A_2'A_3'$ parallel zur Tangentenebene in A_4 an die Umkugel des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, und das Dreieck $A_1'A_2'A_3'$ heißt ein *Antiparallelschnitt* dieses Tetraeders. Die Umkreise der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ entsprechen sich in der Inversion und sind antiparallele Schnitte eines Kegels aus dem Scheitel A_4; die Tangentialdreiecke von $A_1A_2A_3$, $A_1'A_2'A_3'$ sind perspektiv und die Lemoineschen Punkte der semiinversen Dreiecke sind kollinear mit A_4. Diese Resultate bestehen auch offenbar für die Schnitte des Tetraeders durch Ebenen, welche zu den Tangentenebenen in A_1, A_2, A_3 an die Umkugel parallel sind.

Hieraus zieht man folgende Schlüsse:

1. Die antiparallelen Schnitte eines isodynamischen Tetraeders sind gleichseitige Dreiecke; das Zentrum eines

Digitized by Google

solchen Schnittes liegt auf der Geraden, welche die entsprechende Ecke von T_A mit dem Lemoineschen Punkte des gegenüberliegenden Tetraederdreiecks verbindet.

2. Eine Inversion aus einem außerhalb der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks $A_1'A_2'A_3'$ gelegenen Zentrum A_4 verwandelt die Ecken A_1', A_2', A_3' in die Ecken A_1, A_2, A_3 eines isodynamischen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$.

Es seien jetzt A_1', A_2', A_3', A_4' die inversen Punkte der Ecken eines isodynamischen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in bezug auf ein beliebiges Zentrum A_5; dann hat man

$$\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \frac{m}{A_5A_1 \cdot A_5A_2}, \quad \frac{A_3'A_4'}{A_3A_4} = \frac{m}{A_5A_3 \cdot A_5A_4},$$

und mithin

$$\frac{A_1'A_2' \cdot A_3'A_4'}{A_1A_2 \cdot A_3A_4} = \frac{m^2}{A_5A_1 \cdot A_5A_2 \cdot A_5A_3 \cdot A_5A_4}.$$

Aus der Symmetrie des zweiten Gliedes fließt

$$\frac{A_1'A_2' \cdot A_3'A_4'}{A_1A_2 \cdot A_3A_4} = \frac{A_2'A_3' \cdot A_1'A_4'}{A_2A_3 \cdot A_1A_4} = \frac{A_3'A_1' \cdot A_2'A_4'}{A_3A_1 \cdot A_2A_4}.$$

Folglich verwandelt eine Semiinversion ein isodynamisches Tetraeder in ein Tetraeder derselben Art.

8. Der Ort der vierten Ecke A_4 der isodynamischen Tetraeder mit gemeinsamer Grundfläche $A_1A_2A_3$ ist eine Kreislinie.

Der Punkt A_4 muß nämlich den Gleichheiten

$$\frac{A_4A_1}{A_4A_2} = \frac{A_3A_1}{A_3A_2}, \quad \frac{A_4A_2}{A_4A_3} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

genügen. Nennt man V_{12}, V_{12}', V_{23}, V_{23}', V_{31}, V_{31}' die Fußpunkte der inneren und äußeren Halbierenden der Winkel A_3, A_1, A_2 im Dreiecke $A_1A_2A_3$, so ist der gesuchte Ort die Durchschnittslinie der beiden Kugeln, welche respectiv die Strecken $V_{12}V_{12}'$, $V_{23}V_{23}'$ zum Durchmesser haben; folglich eine Kreislinie, deren Ebene senkrecht zur Ebene $A_1A_2A_3$ ist und von der die isodynamischen Zentren des Dreiecks $A_1A_2A_3$ die Endpunkte eines Durchmessers sind. Auch die Kugel über dem Durchmesser $V_{13}V_{13}'$ enthält diese Linie. Ich werde die drei hier auftretenden Kugeln die *Apollonischen Kugeln* des Dreiecks $A_1A_2A_3$ nennen, sie (und ihre Zentren) mit W_{12}, W_{23}, W_{31} und ihren gemeinsamen Schnitt mit γ_4 bezeichnen.

Die Kreislinie γ_4 ist auch der Ort der Inversionszentren, aus denen die Punkte A_1, A_2, A_3 in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks übergehen.

Digitized by Google

9. In einem isodynamischen Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ treffen die Halbierenden der Winkel $A_1A_3A_2$, $A_1A_4A_2$ und ihrer Außenwinkel die Kante A_1A_2 in denselben Punkten V_{12}, V'_{12}. Folglich kann man sechs Apollonische Kugeln betrachten, welche je durch die Eckpunkte einer Kante gehen und deren Zentren auf der Gegenkante liegen. Das Zentrum der Kugel W_{12} ist auch der Treffpunkt der Kante A_1A_2 mit den Tangenten in A_3 und A_4 an die Kreise $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ oder mit den Tangentenebenen in A_3 und A_4 an die Umkugel des Tetraeders; es ist mithin der Schnittpunkt der Kante A_1A_2 mit der entsprechenden Kante B_3B_4 des Tangentialtetraeders T_B. Hieraus schließt man, daß die Zentren der sechs Apollonischen Kugeln die Ecken eines vollständigen Vierseits in der Lemoineschen Ebene sind.

Die Kugeln W_{12}, W_{34}, W_{41} haben einen gemeinsamen Schnitt γ_3, und die Linien γ_3, γ_4, welche auf derselben Kugel W_{12} liegen, schneiden sich in zwei Punkten A_5, A'_5; es ist leicht zu sehen, daß diese Punkte auch zur Kugel W_{34} gehören.

Da die sechs Apollonischen Kugeln zur Umkugel orthogonal sind, liegen ihre Schnittpunkte A_5, A'_5 auf dem Durchmesser OK, der zu der Zentralebene senkrecht ist, und $OA_5 \cdot OA'_5 = R^2$.

Ich nenne A_5 und A'_5 die *isodynamischen Zentren* des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Je vier Punkte der Punktgruppe $A_1A_2A_3A_4A_5$ (oder $A_1A_2A_3A_4A'_5$) sind Ecken eines isodynamischen Tetraeders.

Eine Semiinversion aus dem Zentrum A_5 verwandelt $A_1A_2A_3A_4$ in ein regelmäßiges Tetraeder $N_1N_2N_3N_4$ und den Punkt A'_5 in das Zentrum N dieses Tetraeders; denn die Dreiecke $N_1N_2N_3$, $N_2N_3N_4$, ... sind gleichseitig (7) und die Tetraeder $NN_1N_2N_3$, $NN_2N_3N_4$ ... sind isodynamisch.

5. Die Tuckerschen Kugeln des isodynamischen Tetraeders.

1. Es sei $C_1C_2C_3C_4 \equiv T_C$ ein zu dem isodynamischen Tetraeder T_A in bezug auf den Lemoineschen Punkt K homothetisches Tetraeder. Die Ebene $C_2C_3C_4$ trifft die Kanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 in den Punkten P_{12}, P_{13}, P_{14}; die Ebene $C_3C_4C_1$ schneidet die Kanten A_2A_1, A_2A_3, A_2A_4 in den Punkten P_{21}, P_{23}, P_{24} usw.

Die zwölf Punkte P_{ik} liegen auf einer Kugel, deren Zentrum zur Geraden OK gehört.

Zum Beweise betrachte man zuerst die sechs Punkte P_{ik} der Ebene $A_2A_3A_4$. Die Geraden $P_{23}P_{24}$, $P_{32}P_{34}$, $P_{43}P_{42}$ bilden offenbar ein zum Dreieck $\triangle_1$ in bezug auf K_1 homothetisches Dreieck; somit liegen diese Punkte auf einem Tuckerschen Kreise, dessen Zentrum O'_1 zur Geraden

Digitized by Google

O_1K_1 gehört. Ähnlicherweise sieht man, daß die Punkte P_{ik} der anderen Seitenebenen von T_A auf Kreisen liegen, deren Zentren O_2', O_3', O_4' bezüglich zu den Geraden O_2K_2, O_3K_3, O_4K_4 gehören. Nun haben die beiden Kreise O_1', O_2' zwei gemeinschaftliche Punkte P_{34}, P_{43}; folglich kann man durch diese Linien eine Kugel legen, deren Zentrum O' auf der Geraden OK liegt, welche die Schnittlinie der zu den Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ senkrecht durch O_1K_1, O_2K_2 errichteten Ebenen ist. Dieselbe Kugel enthält auch die Kreise O_3', O_4', mit denen sie schon drei gemeinsame Punkte besitzt.

Man kann die Rollen der Tetraeder T_A, T_C vertauschen, indem man die Treffpunkte Q_{ik} der Kanten von T_C mit den Ebenen von T_A nimmt. So gelangt man zu einer zweiten Zwölfpunktkugel von T_A, deren Bestimmungspunkte Q_{ik} drei zu drei in den Ebenen von T_A liegen.

2. Die Geraden $P_{21}P_{31}$, $P_{31}P_{41}$, $P_{41}P_{21}$ sind antiparallel zu A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 in den Dreiecken $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$; mithin sind sie die Seiten eines antiparallelen Schnittes von T_A. Auch die Dreiecke $P_{12}P_{32}P_{42}$, $P_{13}P_{23}P_{43}$, $P_{14}P_{24}P_{34}$ sind antiparallele Schnitte von T_A. Die Ebenen dieser vier Schnitte bilden ein zu T_B in bezug auf K homothetisches Tetraeder $D_1D_2D_3D_4 \equiv T_D$. Daher eine zweite Bestimmungsart der Tuckerschen Kugeln.

3. Unter diesen Kugeln sind besonders folgende zu bemerken:

a) Die vier antiparallelen Schnitte, deren Ebenen durch den Punkt K gehen, sind einander gleiche reguläre Dreiecke, deren Ecken auf einer Kugel aus dem Zentrum K liegen (*zweite Lemoinesche Kugel*).

b) Die vier durch K zu den Tetraederebenen von T_A parallelen Ebenen schneiden die Kanten in zwölf Punkten einer Kugel (*erste Lemoinesche Kugel*).

c) Parallelen zu den Kanten von T_A durch den Punkt K treffen die Ebenen von T_A in zwölf Punkten einer Kugel (*dritte Lemoinesche Kugel*).

Eine Verallgemeinerung des Taylorschen Kreises scheint mir zu fehlen.

4. Die analytische Behandlung der Tuckerschen Kugeln knüpfe ich an folgende Aufgabe an:

Wann liegen die zwölf Schnittpunkte der Kanten eines Tetraedes T_A mit den Ebenen eines zu T_A in bezug auf einen Punkt K homothetischen Tetraeders T_C auf einer Kugel?

Ich behalte die obigen Bezeichnungen bei, jedoch ohne vorläufig besondere Voraussetzungen über T_A, T_C und K zu machen.

Digitized by Google

Bekanntlich ist die Gleichung der Umkugel von T_A in baryzentrischen Koordinaten

$$U \equiv a_{12}^2 x_1 x_2 + a_{13}^2 x_1 x_3 + \cdots + a_{34}^2 x_3 x_4 = 0$$

und die jeder anderen Kugel

$$V \equiv -U + \Sigma x_1 \Sigma u_1 x_1 = 0.$$

Die Koeffizienten u_1, u_2, u_3, u_4 sind die Koordinaten der Potenzebene der Kugeln U, V und gleich den Potenzen der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in bezug auf V.

Die Gleichungen der Ebenen von T_C seien

$$x_1 = \gamma_1, \quad x_2 = \gamma_2, \quad x_3 = \gamma_3, \quad x_4 = \gamma_4.$$

Nimmt man als *absolute Koordinaten* solche, welche der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ genügen, und setzt man

$$\gamma_1' = 1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4, \quad \gamma_2' = 1 - \gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_4 \text{ usw.},$$

so haben die absoluten Koordinaten der Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 die Werte: γ_1', γ_2, γ_3, γ_4; γ_1, γ_2', γ_3, γ_4 usw.

Hieraus folgt, daß die Koordinaten des Punktes K zu den Größen γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 proportional sind.

Für die Koordinaten der Punkte P_{12}, P_{13}, P_{14} findet man

$$\gamma_1,\ 1-\gamma_1,\ 0,\ 0; \quad \gamma_1,\ 0,\ 1-\gamma_1,\ 0; \quad \gamma_1,\ 0,\ 0,\ 1-\gamma_1.$$

Sollen diese Punkte auf der Kugel V liegen, so muß man haben

$$(1) \qquad -a_{12}^2\gamma_1(1-\gamma_1) + u_1\gamma_1 + u_2(1-\gamma_1) = 0,$$

$$(2) \qquad -a_{13}^2\gamma_1(1-\gamma_1) + u_1\gamma_1 + u_3(1-\gamma_1) = 0,$$

$$(3) \qquad -a_{14}^2\gamma_1(1-\gamma_1) + u_1\gamma_1 + u_4(1-\gamma_1) = 0.$$

Die gestellte Aufgabe gibt zwölf solcher Bedingungsgleichungen zwischen den acht Unbekannten u, γ; es genügt, noch die auf die Punkte P_{21}, P_{31}, P_{41} bezüglichen Gleichungen hinzuschreiben:

$$(4) \qquad -a_{21}^2\gamma_2(1-\gamma_2) + u_2\gamma_2 + u_1(1-\gamma_2) = 0,$$

$$(5) \qquad -a_{31}^2\gamma_3(1-\gamma_3) + u_3\gamma_3 + u_1(1-\gamma_3) = 0,$$

$$(6) \qquad -a_{41}^2\gamma_4(1-\gamma_4) + u_4\gamma_4 + u_1(1-\gamma_4) = 0.$$

Man löse jetzt (1) und (4) nach u_1 und u_2, (2) und (3) nach u_1 und u_3, (2) und (6) nach u_1 und u_4 auf; so bekommt man

$$(a) \qquad \begin{cases} u_1 = a_{12}^2\gamma_2(1-\gamma_1), & u_2 = a_{12}^2\gamma_1(1-\gamma_2), \\ u_1 = a_{13}^2\gamma_3(1-\gamma_1), & u_3 = a_{13}^2\gamma_1(1-\gamma_3), \\ u_1 = a_{14}^2\gamma_4(1-\gamma_1), & u_4 = a_{24}^2\gamma_1(1-\gamma_4). \end{cases}$$

Digitized by Google

Die nicht hingeschriebenen Gleichungen geben noch zwei Werte für jede der Größen u_2, u_3, u_4. Das ursprüngliche Gleichungssystem ist so zurückgeführt auf ein gleichbedeutendes von 12 Werten der u.

Die Elimination der u gibt jetzt die acht Gleichungen

$$a_{12}^2\gamma_2 = a_{13}^2\gamma_3 = a_{14}^2\gamma_4, \tag{7}$$

$$a_{21}^2\gamma_1 = a_{23}^2\gamma_3 = a_{24}^2\gamma_4, \tag{8}$$

$$a_{31}^2\gamma_1 = a_{32}^2\gamma_2 = a_{34}^2\gamma_4, \tag{9}$$

$$a_{41}^2\gamma_1 = a_{42}^2\gamma_2 = a_{43}^2\gamma_4, \tag{10}$$

welche nur die Verhältnisse $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \gamma_4$ bestimmen. Für jedes Verhältnis erhält man zwei Werte; z. B. aus (9) und (10) schließt man

$$\gamma_1 : \gamma_2 = a_{32}^2 : a_{31}^2 = a_{42}^2 : a_{41}^2,$$

und folglich $a_{13}a_{24} = a_{14}a_{23}$. Mithin sind die Gleichungen (7) — (10) nur verträglich, wenn

$$a_{12}a_{34} = a_{13}a_{24} = a_{14}a_{23}; \tag{11}$$

das Tetraeder T_A muß also isodynamisch sein.

Mit Hilfe von (11) nimmt die Gleichung (9) die Gestalt an

$$\frac{\gamma_2}{a_{34}^2} = \frac{\gamma_3}{a_{42}^2} = \frac{\gamma_4}{a_{23}^2}. \tag{12}$$

In jedem Punkte der Geraden A_1C_1 verhalten sich die Koordinaten x_2, x_3, x_4 wie $\gamma_2 : \gamma_3 : \gamma_4$; wendet man dieses auf den Treffpunkt mit der Ebene $A_2A_3A_4$ an, so schließt man aus (12), daß der Punkt mit K_1 zusammenfällt; mit anderen Worten und aus Analogie: die Geraden A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3, A_4K_4 begegnen sich im Punkte K.

Die Gleichungen der Tangentenebenen in A_1, A_2, A_3, A_4 an die Kugel U sind $U'_{x_1} = 0, \cdots$ oder unter Berücksichtigung der Relationen (7) — (10):

$$\sum \frac{x_1}{\gamma_4} - \frac{x_1}{\gamma_1} = 0, \qquad \sum \frac{x_1}{\gamma_1} - \frac{x_2}{\gamma_2} = 0, \qquad \sum \frac{x_1}{\gamma_1} - \frac{x_3}{\gamma_3} = 0, \cdots \tag{13}$$

Die Koordinaten der Ecke B_4 des Tangentialtetraeders genügen den drei ersten dieser Gleichungen und mithin den Gleichungen

$$\frac{x_1}{\gamma_1} = \frac{x_2}{\gamma_2} = \frac{x_3}{\gamma_3}.$$

Also fällt A_1B_1 mit A_1K_1 zusammen.

Bezeichnet man mit ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 die absoluten Koordinaten des Punktes K, so kann man setzen

$$\gamma_1 = \lambda\varepsilon_1, \quad \gamma_2 = \lambda\varepsilon_2, \quad \gamma_3 = \lambda\varepsilon_3, \quad \gamma_4 = \lambda\varepsilon_4; \tag{14}$$

der willkürliche Faktor λ entspricht den verschiedenen Tetraedern T_C.

Digitized by Google

Die Gleichungen (a) geben

$$u_1 : u_2 = \left(\frac{1}{\gamma_1} - 1\right) : \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1\right);$$

mithin hat man

$$u_1 = \mu\left(\frac{1}{\gamma_1} - 1\right), \qquad u_2 = \mu\left(\frac{1}{\gamma_2} - 1\right), \qquad u_3 = \mu\left(\frac{1}{\gamma_3} - 1\right), \cdots$$

Der Proportionalitätsfaktor μ bestimmt sich aus (10); man findet

(14) $$\mu = a_{12}^2 \gamma_1 \gamma_2 = a_{13}^2 \gamma_1 \gamma_3 \cdots$$

Ein symmetrischer Wert ist

$$\mu = \sqrt{a_{12}^2 \gamma_1 \gamma_2 \cdot a_{34}^2 \gamma_3 \gamma_4} = p^2 \lambda^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4},$$

wenn p^2 das Produkt von zwei Gegenkanten von T_A bezeichnet.

Die Potenzebene der Kugeln U und V hat zur Gleichung $\Sigma u_1 x_1 = 0$ oder $\frac{1}{\lambda}\sum \frac{x_1}{\varepsilon_1} - \sum x_1 = 0$.

Dieses Resultat lehrt uns, daß die Ebene parallel zur Lemoineschen Ebene ist, und beweist auch, daß die Gerade OK der Ort der Zentren der Tuckerschen Kugeln ist.

Die allgemeine Gleichung dieser Kugeln ist $V = 0$ oder

$$-U + \mu \sum x_1 \sum \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1\right) x_1 = 0;$$

nach Einsetzung der Werte (14) und (15) bekommt man

$$-U + a_{12}^2 \lambda \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum x_1 \sum \frac{x_1}{\varepsilon_1} - a_{12}^2 \lambda^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum{}^2 x_1 = 0.$$

Die einhüllende Fläche hat zur Gleichung nach Auslassung des Faktors $\Sigma^2 x_1$:

$$4U - a_{12}^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum{}^2 \frac{x_1}{\varepsilon_1} = 0.$$

6. Achteck und Achtflach von P. Serret.

1. Eine Gerade m treffe die Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 eines Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv T$ in den Punkten M_1, M_2, M_3, M_4; die Geraden $A_1 M_1$, $A_2 M_2$, $A_3 M_3$, $A_4 M_4$ nenne man *Diagonalen*. Die so erhaltene Figur heiße ein *Achteck von P. Serret*, nach dem Geometer, der einige ihrer Eigenschaften[1]) in seiner *Géometrie de direction*, S. 265—268 angegeben hat.

Durch die Gerade m und je eine Ecke von T lege man vier Ebenen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 und nenne *Diagonalen* die Schnittgeraden

1) Diese Eigenschaften folgen hier zunächst aus anderen Beweisen, die ich zuerst in *Mathesis* 1903, S. 33 veröffentlicht habe.

Digitized by Google

$\mu_1\alpha_1 \equiv m_1$, $\mu_2\alpha_2 \equiv m_2$, $\mu_3\alpha_3 \equiv m_3$, $\mu_4\alpha_4 \equiv m_4$. Die so entstandene Figur heiße ein *Achtflach von P. Serret.*

Die hier aus der Verbindung des Tetraeders T mit einer Geraden m stammenden Gebilde (im Zeichen Tm) vertreten einigermaßen im Raume das ebene Viereck oder ebene Vierseit, welche man als eine Verbindung eines Dreiecks (Dreiseits) mit einem Punkte oder einer Geraden ansehen kann.

Es seien (p_1, p_2, p_3, p_4), $(q_1, \cdots)$ die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten P, Q der Geraden m in bezug auf das Grundtetraeder T. Die Koordinaten irgend eines Punktes von m sind $mp_i + nq_i (i = 1,2,3,4)$; für den Punkt M_1 muß man setzen $mp_1 + nq_1 = 0$ oder $m = q_1$, $n = -p_1$, so daß seine Koordinaten r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41} sind, wenn r_{ik} das Aggregat $p_iq_k - p_kq_i$ bezeichnet. Hieraus schließt man, daß die Koordinaten der vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 die Elemente der *schiefsymmetrischen* Matrix

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{matrix}$$

sind $(r_{ii} = 0,\ r_{ik} = -r_{ki})$.

Diese Matrix enthält auch die Koordinaten der Ebenen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, wenn die Gerade m als Schnittlinie der zwei Ebenen

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0 \quad q_1x_1 + \cdots = 0$$

dargestellt wird.

2. Jede Fläche zweiter Ordnung, welche drei Diagonalen eines Achteckes (Tm) harmonisch teilt, teilt auch harmonisch die vierte Diagonale.

Drückt man nämlich aus, daß die Punktepaare A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 konjugiert sind in bezug auf die Fläche

$$\Sigma A_{11}x_1^2 + 2\Sigma A_{12}x_1x_2 = 0,$$

so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$A_{12}r_{21} + A_{13}r_{31} + A_{14}r_{41} = 0, \quad A_{21}r_{12} + A_{23}r_{32} + A_{24}r_{42} = 0 \text{ usw.},$$

deren Summe $0 = 0$ gibt.

Die Fläche zweiter Ordnung kann man durch ein Ebenenpaar ersetzen; dann gilt folgender Satz:

Eine Ebene treffe die Diagonalen A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 in den Punkten N_1, N_2, N_3, N_4; die zu diesen harmonisch konjugierten Punkte liegen in einer zweiten Ebene.

Digitized by Google

Im besonderen, wenn die Punkte N_1, N_2, N_3, N_4 unendlich fern sind, sieht man, daß *die Mitten der vier Diagonalen eines Achteckes* (Tm) *in einer Ebene liegen.*

Es bleibt dem Leser überlassen, die in bezug auf das Achtflach (Tm) korrelativen Sätzen auszusprechen.

3. Die vier Kugeln, für welche die Diagonalen des Achteckes (Tm) Durchmesser sind, haben zwei gemeinsame Punkte.

Zum Beweise nenne man (x_i, y_i, z_i), (x_i', y_i', z_i') rechtwinklige Koordinaten der Punkte A_i, M_i. Die Diagonalkugel $(A_1 M_1)$ als Ort der Scheitel von rechten Winkeln $A_1 K M_1$ hat zur Gleichung

$$(1) \qquad (x - x_1)(x - x_1') + (y - y_1)(y - y_1') + (z - z_1)(z - z_1') = 0.$$

Die obigen Größen r_{21}, r_{31}, r_{41} kann man als baryzentrische Koordinaten des Punktes M_1 in bezug auf das Dreieck $A_2 A_3 A_4$ auffassen; dann hat man

$$(2) \qquad x_1' = \frac{r_{21} x_2 + r_{31} x_3 + r_{41} x_4}{r_{21} + r_{31} + r_{41}}, \qquad y_1' = \frac{r_{21} y_2 + r_{31} y_3 + r_{41} y_4}{r_{21} + r_{31} + r_{41}}, \ldots$$

Setzt man die Werte (2) in die Gleichung (1) ein, so wird diese:

$$(3) \qquad \Sigma(x - x_1)[r_{21}(x - x_2) + r_{31}(x - x_3) + r_{41}(x - x_4)] = 0;$$

das Summenzeichen erstreckt sich bloß auf die Buchstaben x, y, z.

Zur Abkürzung sei

$$(x - x_i)(x - x_k) + (y - y_i)(y - y_k) + (z - z_i)(z - z_k) \equiv S_{ik};$$

die Gleichung $S_{ik} = 0$ stellt die über der Kante $A_i A_k$ als Durchmesser beschriebene Kugel dar.

Die Diagonalkugel $(A_1 B_1)$ hat jetzt zur Gleichung

$$r_{21} S_{21} + r_{31} S_{31} + r_{41} S_{41} = 0.$$

Aus Analogie kann man noch die Gleichungen der anderen Diagonalkugeln hinschreiben. Da die Summe der vier Gleichungen $0 = 0$ gibt, ist der Satz bewiesen.

Lüttich, September 1909.

Digitized by Google

Über die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen[1]) und ihre Haupttangentenflächen als reziproke Linienflächen.

Von HANS MOHRMANN in Karlsruhe.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf reell-geradlinige stetig gekrümmte algebraische oder transzendente windschiefe Linienflächen im Raume von vier Dimensionen, welche keinem Raum niederer Dimension angehören und welche, als Punktgebilde betrachtet, von zwei Dimensionen sind.

1. Die Grundarten von Erzeugenden einer Linienfläche im Raume von vier Dimensionen. — Außer einer *Doppel- oder Rückkehr-Erzeugenden* (oder überhaupt einer mehrfachen Generatrix) soll eine Erzeugende einer Linienfläche im Raume von vier Dimensionen nur dann *singulär* heißen, wenn sie *Torsallinie* ist, d. h. von (wenigstens) einer unendlich benachbarten Erzeugenden geschnitten wird. Den Schnittpunkt zweier einander schneidenden benachbarten Erzeugenden nenne ich *Kuspidalpunkt*, ihre Ebene *parabolische Ebene*[2]) der Linienfläche. Eine nicht singuläre Erzeugende soll *hyperbolisch*[3]) genannt werden, wenn sie mit zwei konsekutiven Erzeugenden einem Raume von drei Dimensionen angehört. Ist eine Erzeugende weder singulär noch hyperbolisch, so soll sie *regulär* heißen.

Eine Klassifikation der regulären Erzeugenden steht ersichtlich in engem Zusammenhange mit einer Klassifikation der *regulären Quadrupel* von geraden Linien im Raume von vier Dimensionen. Als solche bezeichne ich Systeme von vier geraden Linien, von denen keine zwei in einer (zweidimensionalen) Ebene und keine drei in einem dreidimensionalen Raume liegen.

2. Die regulären Quadrupel von geraden Linien im Raume von vier Dimensionen. — *Drei gerade Linien allgemeiner Lage im Raume von vier Dimensionen bestimmen eine und nur eine gemeinsame Schnittgerade.* Denn die Schnittgeraden zweier der drei geraden Linien bilden eine Kongruenz 1. Ordnung und 1. Klasse, und der dreidimensionale Raum, welchem diese angehört, hat mit der dritten geraden Linie einen Punkt gemein. Die regulären Quadrupel und damit auch die regulären

1) Vgl. M. Morale: La rigata razionale d'ordine n dello spazio a 4 dimensioni e sua rigata trasversale (Palermo, Tipografia Matematica 1899).

2) Vgl. Voß: Zur Theorie der windschiefen Flächen, Math. Annal. 8, S. 81.

3) Vgl. Voß: l. c. p. 94.

Digitized by Google

Erzeugenden einer Linienfläche können nach dem Verhalten ihrer *Tripel-Schnittgeraden* klassifiziert werden. Bilden die $\binom{4}{3} = 4$ Tripel-Schnittgeraden ein windschiefes Quadrupel, so soll das gegebene Quadrupel von *allgemeiner Lage* heißen. Man erkennt leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die vier Tripel-Schnittgeraden eines regulären Quadrupels allgemeiner Lage bilden ein reguläres Quadrupel allgemeiner Lage.

Schneiden zwei der vier Tripel-Schnittgeraden eines regulären Quadrupels einander, so liegt ihr Schnittpunkt notwendigerweise auf einer geraden Linie des Quadrupels. Aus diesem Grunde liegen alsdann notwendigerweise drei der vier Tripelschnittgeraden mit einer Quadrupelgeraden in einer (zweidimensionalen) Ebene, der *singulären Ebene* des Quadrupels, die von der vierten Tripelschnittgeraden nicht getroffen wird. Ein solches Quadrupel soll von *singulärer Lage* heißen.

Endlich können die vier Tripelschnittgeraden eines regulären Quadrupels zusammenfallen. Ein solches Quadrupel mag *Quadriga* genannt werden.

Es gibt demnach im projektiven Raume von vier Dimensionen drei und nur drei bezüglich der Tripelschnittgeraden voneinander verschiedene Typen von regulären Quadrupeln gerader Linien.

Durch ein reguläres Quadrupel allgemeiner Lage und ebenso durch eine Quadriga kann stets (wenigstens) eine dreidimensionale quadratische Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Diskriminante hindurchgelegt werden; durch ein reguläres Quadrupel singulärer Lage hingegen nicht. Denn die singuläre Ebene des Quadrupels müßte mit der M_3^2 vier voneinander verschiedene gerade Linien gemein haben können, was nur möglich wäre, wenn die M_3^2 eine (zweidimensionale) Ebene vollständig enthielte.

3. Die regulären Erzeugenden. — Eine *reguläre Erzeugende* einer Linienfläche im Raume von vier Dimensionen soll von *allgemeiner* oder *singulärer Lage* oder aber *Quadrigallinie* heißen, je nachdem sie mit drei konsekutiven Erzeugenden ein Quadrupel allgemeiner oder singulärer Lage oder aber eine Quadriga bildet.

4. Die Haupttangenten und die von ihnen gebildete Linienfläche. — Als *Haupttangente* einer windschiefen Linienfläche bezeichne ich eine (eigentliche) Tangente der Fläche, welche drei (oder mehr) einander unendlich benachbarte Punkte mit ihr gemein hat, ohne (im allgemeinen) in einem Punkte der (etwa vorhandenen) Doppel- (oder mehrfachen) Kurve der Fläche zu berühren.

Betrachtet man eine Folge von regulären Erzeugenden allgemeiner Lage einer Linienfläche, so erkennt man unmittelbar, daß jede Erzeugende

Digitized by Google

von drei konsekutiven Haupttangenten der Fläche getroffen wird. Es gilt demnach der folgende bemerkenswerte Satz:

Die Haupttangenten einer windschiefen Linienfläche ohne Leitgerade im Raume von vier Dimensionen bilden[1]) im allgemeinen[2]) eine windschiefe Linienfläche[3]), und zwar stehen die gegebene Fläche und ihre Haupttangentenfläche in wechselseitiger Beziehung zueinander: die Erzeugenden der einen Fläche sind eindeutig auf die Erzeugenden der anderen Fläche bezogen und die Haupttangenten der einen Fläche sind[1]) die Erzeugenden der anderen Fläche.

Für Linienflächen mit einer Leitgeraden gilt der Satz nicht mehr; denn für diese sind sämtliche regulären Erzeugenden Quadrigallinien: alle auf regulären Erzeugenden berührenden Haupttangenten fallen mit der Leitgeraden der Fläche zusammen, so daß von einer Haupttangentenfläche[1]) nicht mehr die Rede sein kann. Aber auch für Linienflächen, deren sämtliche regulären Erzeugenden von singulärer Lage sind, gilt der Satz nicht mehr. Wenn zwei auf regulären Erzeugenden berührende konsekutive Haupttangenten einander schneiden, so hat ihre Ebene mit der Linienfläche eine Erzeugende gemein. Ein durch diese Ebene hindurchgelegter dreidimensionaler Raum schneidet die Linienfläche außer nach der Erzeugenden nach einer Kurve, für welche die Ebene Schmiegungsebene ist. Hieraus folgt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Haupttangentenfläche einer windschiefen Linienfläche (im Raume von vier Dimensionen) ohne Leitgerade developpabel ist, besteht darin, daß ihre Erzeugenden der Kongruenz der Schmiegungsstrahlen[4]) einer (dreifachgekrümmten) Kurve angehören.

1) Nach Absonderung von Liniengebilden, welche in Räumen von zwei oder drei Dimensionen liegen.

2) d. h. bis auf den im nächsten Satze charakterisierten Ausnahmefall.

3) Ist die Linienfläche algebraisch und irreduzibel, so ist auch die Haupttangentenfläche[1]) irreduzibel. In einem gewissen Gegensatze hierzu gibt es im Raume von drei Dimensionen irreduzible algebraische windschiefe Linienflächen n-ten Grades, und zwar für jedes $n \geq 4$, deren sämtliche Haupttangentenkurven algebraisch und (bei passender Spezialisierung der Fläche) reduzibel sind, worauf ich bei anderer Gelegenheit näher einzugehen gedenke. (Als ein noch in anderer Hinsicht merkwürdiges Beispiel mag die Linienfläche 6. Grades mit zwei dreifachen Leitgeraden und vier Rückkehrerzeugenden genannt werden.)

4) d. i. geraden Linien, welche in den Schmiegungsebenen einer Kurve durch die zugehörigen Berührungspunkte hindurchgehen.

Digitized by Google

Rezensionen.

Friedrich Poske. **Die Zentrifugalkraft.** Ein Beitrag zur Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze. Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. Band II, Heft 3. 8°. 80 S. Berlin 1909. Julius Springer. Brosch. ℳ 3,—.

Die Abhandlung knüpft an die Bedenken an, die Heinrich Hertz in seinen „Prinzipien der Mechanik" über die Lehre von der Kreisbewegung äußert. Sie behandelt in fünf Abschnitten „die freie" und die „unfreie krummlinige Bewegung", „die Newtonschen Bewegungsgesetze", „die Zentrifugalkraft an rotierenden Körpern" und „das Zentrifugalpendel", während in einem Anhang neuere Vorrichtungen beschrieben werden, die zur Messung der Schwungkraft dienen. Die Behandlungsart ist die historisch-kritische, welche die bezüglichen Lehren der namhaften Forscher darstellt und beurteilt, um so für die Anschauungen des Verfassers neben den logischen und physikalischen Beweisgründen noch autoritative zu gewinnen. Die zutage tretende Gelehrsamkeit gebietet Achtung; auch ist die gewollte Sorgfalt der Erwägung augenscheinlich; aber wie fast stets, wo es sich um kritische Kleinarbeit handelt, welche eine vielgestaltige Frage nach allen Seiten wendet und jede Spur von Dunkelheit aus den verstecktesten Schlupfwinkeln zu entfernen strebt, so wirkt auch hier die sonst schlichte Darstellung ein wenig ermüdend. Und dieser Eindruck entsteht umsomehr, als der Verfasser die überlieferte einheitliche Schwungkraftlehre zugunsten der Wahrheit durch Auffassungsweisen ersetzen zu müssen glaubt, die von Fall zu Fall verschieden sind; auch kommt es vor lauter kritischen Erwägungen nicht zu einer kurzen, zusammenhängenden und dadurch übersichtlichen Darstellung der mechanischen Grundbegriffe und -gesetze samt deren Anwendung auf die Kreisbewegung. Daher wird man bei der ersten Durchsicht der Arbeit das unbehagliche Gefühl nicht los, daß einem eine Masche entschlüpft und so das ganze künstliche Gewebe verdorben sein könnte.

Bei näherer Prüfung freilich ändert sich der Eindruck. Da gestaltet sich die Betrachtung zu einer Reihe interessanter Denkaufgaben, deren Lösung für den Mechanik-Unterricht von grundlegender Bedeutung wäre. Der Reiz solchen Nachdenkens wird erhöht durch die Person des Verfassers, der seit Jahrzehnten über die geschichtlichen, erkenntnistheoretischen, naturphilosophischen und unterrichtlich-methodischen Neuerscheinungen des physikalischen Büchermarktes in seiner Zeitschrift berichtet und daher in erster Linie zur Behandlung der gestellten Aufgabe berufen erscheint. Gleichwohl werden wir von vornherein vor einer unbedachten Nachfolge seiner Führerschaft gewarnt mit den Worten: „Der Verfasser ist nicht der Meinung, in diesen schwierigen Dingen überall das Richtige getroffen zu haben, er hofft jedoch durch seine Darlegungen zur weiteren Klärung der erörterten Fragen beizutragen" (S. 5). Ich folge dieser Warnung, indem ich ihr die Aufforderung entnehme, gegen

Digitized by Google

die dargebotene Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze meine Bedenken zu erheben.

Zunächst das erste Newtonsche Bewegungsgesetz: „Jeder Körper verharrt, soweit es an ihm ist, in einem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung“ (S. 32). Da der Verfasser die Unsicherheiten in den Grundbestimmungen der Mechanik durch vorsichtige Ausdrucksweise vermeiden will, so gibt er der Newtonschen Fassung die „bestimmtere Form“: „Jeder Körper verharrt in dem Zustande der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, sofern nicht Umstände vorhanden sind, durch die erfahrungsgemäß eine Änderung jenes Zustandes bewirkt wird“ (S. 32). Ich muß gestehen, daß ich die Newtonsche Fassung „soweit es an ihm ist“ bestimmter finde als die P.-sche „wenn nicht (beharrungändernde) Umstände vorhanden sind“; denn Newton verlangt für die Beharrungsänderung *äußere* Einwirkungen, während P. über den Ursprung der beharrungändernden Umstände keine Bestimmung trifft und also unbestimmt läßt, ob sie nicht etwa in der Eigenart des verharrenden Körpers begründet sind. Soll daher die P.-sche Fassung der Newtonschen an Bestimmtheit gleichkommen, so muß wenigstens gesagt werden, „sofern nicht *äußere* (beharrungändernde) Umstände vorhanden sind“. Aber es scheint, als wenn P. auf „das Wörtchen ‘erfahrungsgemäß’“ besonderes Gewicht legt und in ihm die größere Bestimmtheit seiner Fassung findet. Nun kann ja nicht bestritten werden, daß in dem Adverb „erfahrungsgemäß“ eine nähere Bestimmung liegt, weist es doch auf die Erfahrung als die Erkenntnisquelle der beharrungändernden Umstände hin; wer also auf jene erkenntnistheoretische Bemerkung Gewicht legt, für den enthält allerdings P.s Fassung eine Bestimmung, die Newton unerörtert läßt; da aber die Hinzufügung der Erkenntnisquelle an dem Inhalt des Erkannten ebensowenig ändert, wie die Hinzufügung des Beweises an dem Inhalt eines mathematischen Lehrsatzes, so ist für den Inhalt auch des Beharrungssatzes das Wort „erfahrungsgemäß“ meines Erachtens belanglos. Daher kann ich auch nicht zugeben, daß durch das Wort „erfahrungsgemäß“ der P.-sche Beharrungssatz vor dem Vorwurf der Identität gerettet wäre; vielmehr kommt die P.-sche Fassung der leeren Aussage gleich: Jeder Körper beharrt, sofern er nicht an der Beharrung gehindert wird. In Wahrheit aber gibt das Beharrungsgesetz die Anweisung: Suche für die Änderungen im Beharrungszustand eines Körpers die Ursache in anderen Körpern. Ob dieses Suchen hypothetisch-logisch, wie seinerzeit durch Leverrier, geschieht oder empirisch, wie durch Galle, ist für den Inhalt jener Anweisung ohne Bedeutung.

Zwischen der Kraftdefinition Newtons („als äußere Kraft bezeichnet man eine Einwirkung auf einen Körper, die darauf gerichtet ist, seinen Zustand entweder der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung zu ändern“) und seinem zweiten Bewegungsgesetz („die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach der jene Kraft wirkt“) findet P. den Gegensatz, daß die Kraftdefinition bewegende Kräfte und Bewegungshindernisse einschließt, während das zweite Bewegungsgesetz nur von bewegenden Kräften spricht (S. 33 f.). Dieser Gegensatz ist nicht, was P. meint, ein „schwankender“ Gebrauch bei Newton, sondern ein sachliches Erfordernis; die Kraftdefinition bezieht sich auf die Ursache jeder (möglichen oder tatsächlichen) Beharrungsänderung; das Kraftmaß aber ist für die bloß mögliche

Digitized by Google

Beharrrungsänderung statisch, für die tatsächliche dynamisch; das statische Verfahren ist eine Kompensations- oder Nullmethode, während das dynamische Verfahren unkompensierte Kräfte mißt. Da es nun Newton in seinem Werke nur auf die Untersuchung von Bewegungserscheinungen ankam, so teilte er in seinem zweiten Gesetz das dynamische Kraftmaß mit. Wenn aber auch die statische und die dynamische Kräftemessung verschiedene Methoden sind, so beziehen sie sich darum noch nicht auf verschiedene Arten von Kräften. Danach enthält nach meiner Auffassung das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz denselben allgemeinen Kraftbegriff wie die Newtonsche Kraftdefinition, nur unter Bevorzugung der dynamischen Messungsmethode; demgemäß ist „Einwirkung der bewegenden Kraft" in Newtons Gesetz nur eine stilistisch geschicktere Wendung für „Einwirkung der wirkenden Kraft". Wenn hiermit die an Newton geübte verneinende Kritik verworfen werden muß, so fragt sich noch, ob die bejahende Aufstellung des Verfassers haltbar ist. Er unterscheidet bewegende Kräfte von Bewegungshindernissen; jene sollen beschleunigend und verzögernd, diese nur verzögernd wirken können. So wirkt eine Mauer, die für eine dagegen geschossene Kugel ein Bewegungshindernis bildet, auf die Kugel verzögernd. Aber wie, wenn es mir einfiele, beim gleichen Vorgang die nach Westen abgeschossene Kanonenkugel (vom Sonnenstandpunkt aus) als ruhend und die Mauer (infolge der Erdrotation) als bewegt zu betrachten; würde bei diesem Wechsel meines Standpunktes die Mauer nicht plötzlich der Kugel eine Beschleunigung erteilen? Jedoch in diesem Falle würde P. vermutlich die Kugel als Bewegungshindernis bezeichnen. So ist denn die Frage, ob es überhaupt bloß verzögernde Bewegungshindernisse gibt, nur durch die Lehre vom Stoße zu entscheiden.

Ehe wir jedoch zu dieser Lehre übergehen, ist noch eine Betrachtung des erweiterten P.-schen Kraftbegriffs und des Gesetzes der Gleichheit von Aktion und Reaktion erforderlich. Die oben mitgeteilte Krafterklärung Newtons bringt P. zu der des Lagrange in Gegensatz, welche besagt: „Man versteht im allgemeinen unter Kraft die Ursache, sie mag übrigens wie immer beschaffen sein, die dem Körper, an dem man sie sich angebracht denkt, eine Bewegung entweder wirklich erteilt oder zu erteilen strebt" (S. 34). Es ist mir durchaus unverständlich, warum P. erst der Erklärung des Lagrange die Anregung zu seiner neuen Krafterklärung („die Ursache einer Beschleunigung oder einer statt dieser hervorgerufenen Spannung heißt Kraft") (S. 36) entnimmt. Vielmehr erscheinen mir die Krafterklärungen Newtons und Lagranges ihrem Sinne nach völlig identisch; nur ist die Newtonsche Ausdrucksweise kürzer, sofern sie die beiden von Lagrange getrennten Möglichkeiten in einen Ausdruck zusammenfaßt, in den Ausdruck, daß die Einwirkung „darauf gerichtet ist usw.", d. h. daß die Einwirkung ein Streben zeigt, gleichgültig ob mit oder ohne sichtlichen Bewegungserfolg. Wie dem nun aber auch immer sei, keinesfalls erscheint mir die Krafterklärung des Verfassers glücklich. Die Kraft eine Ursache der Spannung! Unter Spannung versteht man doch einen Zustand, der unter dem gleichzeitigen Wirken verschiedener Kräfte zustande kommt; eine Feder ist gespannt, wenn an ihren Enden entgegengerichtete Kräfte angreifen. Ferner verrät sich eine Spannung in Deformationen, z. B. einer Längendilatation und einer Querkontraktion, ohne daß von *einer* Richtung der Spannung die Rede sein könnte, während für jede Kraft die Richtung das eine der drei wesentlichen Merkmale ausmacht. Und ist denn

Digitized by Google

die Kraft einer Erklärung überhaupt zugänglich? Man sollte meinen, jener Anthropomorphismus sei eine seelische Grunderfahrung, deren mechanische Meßbarkeit man aufzeigen mag, deren Wesenserklärung indessen notwendig auf Redensarten hinausläuft. Aber P. hat guten Grund, den Begriff der Kraft in gewissen Fällen durch den der Spannung zu ersetzen, gewinnt er doch so die Möglichkeit, von der Kraftrichtung abzusehen und *eine* Kraft beliebig nach entgegengesetzten Richtungen wirken zu lassen. Die Stoßkraft wird, wie sich sogleich zeigen wird, seitens des Verfassers in dieser Art aufgefaßt.

Zunächst aber noch das dritte Newtonsche Gesetz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion. Der Sinn auch dieses grundlegenden Gesetzes ist m. E. vom Verfasser verkannt worden. Einleitend bespricht P. einen der Newtonschen Versuche, die letzterer zur Bestätigung seines dritten Bewegungsgesetzes angestellt hat. Zwei Kugeln, zuerst möglichst vollkommen elastische, danach unvollkommen elastische, z. B. Wollbälle, hängen benachbart an Fäden gleicher Länge und pendeln aus gleichen oder verschiedenen Fallhöhen gegeneinander. In beiden Fällen findet Newton, daß die (algebraisch genommene) Summe der Bewegungsgrößen beider Kugeln durch den Stoß nicht verändert wird, obgleich im zweiten Fall (mit den Wollbällen) die Geschwindigkeit der Rückkehr zugleich mit der elastischen Kraft vermindert war, und Newton „sieht dies (nämlich die Erhaltung der Bewegungsgröße) als eine Folge aus dem dritten Bewegungsgesetze an" (S. 39). Diese m. E. sehr klare Ausführung Newtons würde in modernerer Sprache so lauten können: Gleichgültig ob es sich um elastische oder unelastische Körper handelt, das Versuchsergebnis $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const.}$ bestätigt das dritte Bewegungsgesetz $m_1 \frac{d v_1}{dt} + m_2 \frac{d v_2}{dt} = 0$. Und wie versteht P. die Newtonsche Darstellung des zweiten Falles? Er faßt den Hinweis auf die verminderte Rückkehrgeschwindigkeit der Wollbälle so auf, daß Newton zugleich die Aktions- und Reaktionsgrößen im gleichen Verhältnisse als vermindert angesehen habe, daß also in Übereinstimmung mit Newtons Darlegung im Falle vollkommen unelastischer Körper Aktion und Reaktion gleich Null würden. Nur auf Grund dieses Mißverständnisses kann P. sagen „das Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion findet auf den unelastischen Stoß keine Anwendung, insofern es bei diesem keine Aktion und Reaktion *in dem von Newton selbst definierten Sinne* gibt" (S. 39). Nur auf Grund desselben Mißverständnisses kann P. dem Newtonschen Beispiel „wenn irgendein Körper auf einen anderen stößt und die Bewegung des letzteren irgendwie verändert, so wird ersterer in seiner eigenen Bewegung dieselbe Änderung nach entgegengesetzter Richtung durch die Kraft des anderen (wegen der Gleichheit des wechselseitigen Druckes) erleiden ..." die Beurteilung folgen lassen: „Es ist gezeigt worden, daß es von Newton ausdrücklich nur hinsichtlich der *elastischen* Wirkung und Gegenwirkung gemeint war, während es hier ohne diese Beschränkung erscheint" (S. 40). Im Gegensatz zu dieser P.-schen Auffassung muß darauf hingewiesen werden, daß das Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße und das dritte Bewegungsgesetz, wie ein Blick auf die oben gegebenen mathematischen Formulierungen beider Sätze lehrt, ihrem Sinne nach identisch sind; nur die Form kennzeichnet jenes als Integral-, dieses als Differentialgesetz; und nichts spricht dafür, daß Newton seinen Stoßversuch in anderem Sinne aufgefaßt und damit das dritte Bewegungsgesetz auf *elastische* Wirkungen und Gegenwirkungen beschränkt wissen wollte.

Digitized by Google

Weiterhin versucht es P., die Beispiele, welche Newton und andere zum Aktions- und Reaktionsgesetz anführen, ohne Zuhilfenahme jenes Gesetzes zu erklären. Diese Erklärungen gründen sich im wesentlichen auf den Begriff des Beharrungswiderstandes, den P. nicht als Reaktionskraft gelten läßt; denn „der Vorgang der Kraftwirkung wird nur noch unerklärlicher, wenn man annimmt, daß die auf eine Masse m wirkende Kraft sogleich eine ihr entgegengesetzt gerichtete gleich große Gegenkraft hervorruft. Denn wie sollte unter dieser Voraussetzung überhaupt noch eine Bewegung zustande kommen?“ (S. 17). Als wenn der Trägheitswiderstand der Masse m eine Kraft wäre, die m auf sich selber ausübt statt auf den Körper, dessen Kraftwirkung auf m sich erstreckt.

Entscheidend für den Standpunkt des Verfassers ist seine Auffassung des Stoßvorganges, den er ohne die Annahme einer Reaktionskraft zu beschreiben unternimmt. Der schnellere Körper 1 übe auf den Körper 2 einen unelastischen Druck aus, der entweder mit Hilfe der Beschleunigung des ersten Körpers durch $m_1 \frac{dv_1}{dt}$ oder mit Hilfe der Beschleunigung des zweiten Körpers durch $m_2 \frac{dv_2}{dt}$ gemessen werden könne; so ergebe sich $m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_2 \frac{dv_2}{dt}$, woraus die Stoßgleichung $m_1 (c_1 - c) = m_2 (c - c_2)$ folge. Der Verfasser fügt hinzu, daß seine Herleitung sich auf das Prinzip stützt: „Wenn zwei Körper von endlichem Geschwindigkeitsunterschied aufeinanderstoßen, so wird mindestens die Bewegung des einen der beiden Körper gehemmt, und es tritt ein Druck des gehemmten Körpers gegen den andern Körper auf.“

Dagegen ist zu erwidern, daß eine „Hemmung“ von m_1, welche der Größe nach durch $m_1 \frac{dv_1}{dt}$ gemessen wird, von einer (verzögernden) Kraft in nichts sich unterscheidet; vermag ich doch nach dem Prinzip der Relativität der Bewegung, von dem auch der Verfasser Gebrauch macht (S. 50), jeden der beteiligten Körper nach Belieben als den schnelleren oder langsameren und also als den drückenden oder den hemmenden zu betrachten, so daß Hemmung und Druck miteinander vertauschbar sind. Damit sind wir wieder beim Gesetz von der Gleichheit der Aktion und Reaktion angelangt, nur daß die neuen Worte „Hemmung und Druck“ anstelle der alten „Aktion und Reaktion“ getreten sind und P. überdies auf die Gleichheit des Druck- und des Hemmungsmaßes hinzuweisen unterläßt.

Aber er meint dies wohl zu tun, indem er beim Stoßvorgang ausdrücklich (S. 47) nur *einen* auf zwiefache Art gemessenen Druck wirksam sein läßt. Dies ist die Stelle, wo *insgeheim*, nämlich anscheinend ihm unbewußt, der Kraftbegriff der (nach zwei Seiten gerichteten) Spannung bei ihm Verwendung findet. Die korrekte Behandlung der P.-schen Gleichung $m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_2 \frac{dv_2}{dt}$ läßt diesen Irrtum ohne weiteres erkennen. Da nämlich die Zeit als unabhängig Veränderliche gewählt worden ist, so muß man naturgemäß beide Seiten der Gleichung $m_1 \cdot dv_1 = m_2 \cdot dv_2$ zwischen denselben Zeitgrenzen d. h. zwischen Geschwindigkeitsgrenzen integrieren, die identischen Zeitgrenzen entsprechen. Wählt man aber als untere Zeitgrenze den Augenblick der Berührung, als obere den Augenblick der stärksten Einbiegung beider Körper, so erhält man die Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 der Körper für die unteren und ihre gemeinsame Endgeschwindigkeit c für die oberen Integrationsgrenzen der v, und

Digitized by Google

es entsteht $\int_{c_1}^{c} m_1 \cdot dv_1 = \int_{c_2}^{c} m_2 \cdot dv_2$, woraus $c = \frac{m_1 c_1 - m_2 c_2}{m_1 - m_2}$ d. h. eine falsche Formel hervorgeht. Es hätte eben dem nach rückwärts gerichteten Druck $m_1 \frac{dv_1}{dt}$ das Minuszeichen gegeben werden müssen.

Damit glaube ich die Herleitung des Verfassers als irrig und dessen Ersatz für das Aktions- und Reaktionsgesetz als eine in der Form verunglückte Wiederholung eben dieses Gesetzes erwiesen zu haben. Nur freilich darf man vom dritten Newtonschen Gesetz nicht eine Auffassung haben, die den Verfasser sagen läßt: „Wenn Druck und Gegendruck einander während des ganzen Vorganges (des Stoßes) entgegengesetzt gleich sind und *also* (!) einander aufheben, so bleibt unbegreiflich, wie denn überhaupt die Übertragung der Bewegung zustande kommt" (S. 47). Vielmehr muß man sich gegenwärtig halten, daß der Druck in dem einen Körper, der Gegendruck in dem andern seinen Angriffspunkt hat und die inneren Kräfte einer deformierbaren Massengruppe trotz Gleichheit und Entgegensetzung einander *nicht* aufheben, sondern Beschleunigungen der angegriffenen Teilmassen hervorbringen.[1]) Bei solcher m. E. einzig möglichen Auffassung des Gesetzes der Gleichheit von Aktion und Reaktion ist der Vorgang des Geschwindigkeitsausgleichs und damit der Bewegungsübertragung im Stoß ganz außerordentlich klar, für jeden nämlich, der die Kraftvorstellung gelten läßt, d. h. bei animistischer Naturanschauung.

Nun führt P. freilich Machs bedeutende Autorität an, der ohne Zuhilfenahme einer Reaktion das Stoßgesetz hergeleitet habe (S. 50f.). Da meine Bemühung, die zitierte 4. Auflage von Machs Mechanik zu erlangen, erfolglos war, so muß ich mich auf die mir zugängliche 2. Auflage beschränken.[2]) Dort jedoch heißt es in dem Kapitel, welches „die Gesetze des Stoßes" behandelt, auf S. 297: „Sieht man von den Newtonschen Prinzipien ab, so sind eben andere spezifische Erfahrungen über die Bedeutung von mv, welche jene Prinzipien als gleichwertig ersetzen, *nicht zu entbehren*." Die „andere spezifische Erfahrung" ist aber im Beispiel des unelastischen Stoßes das „Grundphänomen der Aufhebung entgegengesetzt gleicher Bewegungsgrößen" (S. 50), eine Tatsache also, die Newton in seinem Stoßversuch beobachtet und als eine Bestätigung seines dritten Bewegungsgesetzes angesehen hat. Jenes „Grundphänomen" kennzeichnet sich danach als Spezialfall des Gesetzes von Aktion und Reaktion.

Gegen Ende seiner Revision der Newtonschen Bewegungsgesetze (S. 51) weist P. auf die nachstehende Anführung aus Heinrich Hertz hin:

„Die Kraft, von welcher die Definition und die ersten beiden Gesetze reden, wirkt auf einen Körper in einseitig bestimmter Richtung. Der Sinn des dritten Gesetzes ist, daß die Kräfte stets zwei Körper verbinden und ebenso

---

1) Dem falschen Schluß, daß die Aktions- und Reaktionskräfte im unelastischen Stoß einander aufheben, liegt unbewußt das irreführende Axiom von der Verlegbarkeit des Angriffspunktes einer Kraft zugrunde. Der Mißbrauch, der in den Darstellungen der Physik mit jenem Axiom traditionell getrieben wird, war der Hauptbeweggrund, der mich zur Abfassung meiner Schrift „Physikalische Mechanik; Berlin, Julius Springer, 1900" veranlaßt hat.

2) Wie mir die Redaktion freundlichst mitteilt, stimmt in der von mir herangezogenen Stelle die 4. mit der 2. Aufl. wörtlich überein.

Digitized by Google

gut vom ersten zum zweiten wie vom zweiten zum ersten gerichtet sind. Die Vorstellung der Kraft, welche dieses Gesetz, und die Vorstellung, welche jene Gesetze voraussetzen und in uns erwecken, scheinen mir um ein geringes verschieden. Dieser geringe Unterschied reicht aber vielleicht aus, um die logische Trübung zu erzeugen, deren Folgen in unserem Beispiel zum Ausbruch kamen."

Dazu bemerkt der Verfasser:

„Wir finden nunmehr die Lösung dieser Schwierigkeit darin, daß das dritte Gesetz nicht die Allgemeingültigkeit beanspruchen kann wie die ersten beiden, und daß man bisher allzu gewaltsam verfahren ist, wenn man dem Schema zuliebe auch die Einwirkung einer Kraft auf eine Masse (gemäß dem zweiten Gesetz) oder den Stoß zweier unelastischer Körper aufeinander auf das dritte Gesetz von der Aktion und Reaktion zurückzuführen gesucht hat. Es hat sich aber auch weiterhin die Voraussicht bestätigt, die Heinrich Hertz mit außerordentlichem Scharfblick ausgesprochen hat:

'Wir sind selbst der Überzeugung, daß die vorhandenen Lücken nur Lücken der Form sind, und durch geeignete Anordnung der Definitionen, Bezeichnungen und weiter durch vorsichtige Ausdrucksweise jede Unklarheit und Unsicherheit vermieden werden kann.'"

Und ich bemerke dazu:

Das erste und das zweite Gesetz Newtons, d. h. das Beharrungsgesetz und das Kraftmaß, sind *Abstraktionen*, sofern sie den kraftwirkenden Körper außer Betracht lassen, somit nur für eine *äußere* Kraft gelten und also lediglich auf einen willkürlichen Weltausschnitt anwendbar sind. Das dritte Gesetz dagegen betrifft die *wirkliche* Welt, worin jeder Kraft ein kraftwirkender Körper entspricht, worin alle Kräfte nur in Paaren von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung auftreten und *innere* Kräfte sind. Diese klare Unterscheidung ist m. E. von Hertz und P. verkannt und von letzterem durch einen doppelsinnigen Kraftbegriff ersetzt worden, nämlich durch den Begriff einer Kraft, die als bewegende eine bestimmte Richtung hat, dagegen als Spannungsursache nach entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Stärke wirkt. Auf dieser Doppelsinnigkeit beruht *im letzten Grunde* die oben beurteilte P.-sche Herleitung des Stoßgesetzes. In dieser Doppelsinnigkeit verbirgt sich auch das bekämpfte Aktions- und Reaktionsgesetz. Daher ist in der Tat P.s Darstellung nur in der Form von Newtons verschieden, bedient sich aber einer Ausdrucksweise, die als doppelsinnig nicht „vorsichtig" ist und „Unklarheit und Unsicherheit" an die Stelle von Klarheit und Bestimmtheit setzt.

Nach alledem erscheint mir auch die Anschauung (S. 52) des Verfassers unannehmbar, wonach das Unabhängigkeitsgesetz an die Stelle des Gesetzes von Aktion und Reaktion zu treten hätte. Vielmehr ist das letztere ein Abhängigkeitsgesetz, sofern es alle mechanischen Wirkungen als Wechselwirkungen auffaßt. Oder wird die Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes durch den Höflerschen Hinweis (S. 41) widerlegt, „daß auch bei der Reizempfindung, die das Licht im Auge hervorruft, eine actio ohne reactio vorliegt"? Ich glaube nicht; denn die *Nervenreizung*, wie ich hier, wo es sich doch um Erwägungen der Mechanik handelt, statt *Reizempfindung* lieber sagen möchte, erzeugt als reactio eine Hemmung der zugehörigen Ätherschwingungen.

Digitized by Google

Will man aber das Gesetz der Aktion und Reaktion durch weniger animistisch klingende Aussagen ersetzen, so scheinen mir — auf dem Gebiete der Mechanik — der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes und der Flächensatz dazu vornehmlich geeignet.

Einen tiefgreifenden Gegensatz betont der Verfasser zwischen starren, d. h. undeformierbaren, und elastischen Bewegungshindernissen. Wenn ein Körper durch eine starre Wand im Kreise herumgeführt wird, so sei keine Reaktionskraft anzunehmen; eine hier eingeführte Zentripetalkraft könne nur dazu dienen, den Einfluß der starren Wand zu *ersetzen*, und wäre also nur eine „substituierte Kraft" (S. 52 f.). Bei vollkommen elastischer Wand freilich trete ein Reaktionsdruck ins Spiel; da diese Zentripetalkraft indessen erst durch die Bewegung hervorgerufen werde, so wird sie als „induzierte Kraft" bezeichnet. Gewiß ist es zulässig, einen mathematischen Begriff der Starrheit aufzustellen, der von den natürlichen Eigenschaften der Körper abstrahiert; aber trägt solche Abstraktion, welche gebietet, über die tatsächlich auftretende Zentripetalkraft hinwegzusehen, zur Erklärung des Naturvorganges bei? Oder ist die gemachte Unterscheidung zwischen Starrheit und Elastizität auch nur denkökonomisch? Es würde mir einfacher und zugleich im vorliegenden Falle aufklärender erscheinen, wenn man die Starrheit als Grenzfall der Elastizität auffaßte, wo nämlich der Elastizitätsmodul unendlich wird. Und ist es ferner richtig, daß durch die Bewegung die Reaktionskraft der elastischen Wand erst *hervorgerufen* wird? Durch die Kreisbewegung doch sicher nicht, sondern allenfalls durch die etwa voranlaufende geradlinige Bewegung des gegen die Wand gestoßenen Körpers; aber die Kreisbewegung, die hier ja nur in Frage steht, und die Zentripetalkraft der Wand sind völlig gleichzeitig und durcheinander bedingt, so daß man keins als das Primäre gegenüber dem andern bezeichnen kann. So sehe ich denn zusammenfassend keinen begründeten Anlaß, zwischen wirklichen, substituierten und induzierten Kräften zu unterscheiden.

Überhaupt bildet der Kraftbegriff die Grundlage, auf welcher die kritischen Betrachtungen des Verfassers und meine Einwände dagegen sich erheben. Die Frage, um die es sich handelt, ist m. E. lediglich darauf gerichtet, welchen Erkenntnisstandpunkt man einzunehmen gewillt ist. Denkt man animistisch, so sieht man allenthalben in der Natur Kräfte und zwar wirkende d. h. wirkliche Kräfte, deren Zusammenwirken zu erfassen das Ziel aller Naturerklärung bleibt. Der formalistisch Denkende hingegen hat nicht die Sehnsucht, sich einzufühlen ins Innere der Natur; auf das Gefühlsmäßige verzichtend, was im Kraftbegriff liegt, begnügt er sich damit, das Naturgeschehen durch Formeln zu begreifen; an die Stelle der Naturkraft tritt für ihn das Naturgesetz.[1]) Hätte der Verfasser den Gegensatz der so beschriebenen Erkenntnisstufen bei seinen Erwägungen benutzt, so würde eine Reihe von Fragen für ihn weggefallen sein, z. B. nach dem Wesen des Beharrungswiderstandes oder der Bewegungsübertragung im Stoß, ob die bei der Kreisbewegung auftretenden Kräfte wirkliche oder unwirkliche sind, die Fragen also, welche den Kern seiner Betrachtung und die Grundlage seiner Folgerungen bilden. Es hätte sich für ihn ergeben, daß die von ihm bekämpften Lehren durchgängig *mindestens* ebenso richtig wie die von ihm aufgestellten sind, daß er überall, wo

1) Hier folge ich der Darstellung, die ich in der Programmabhandlung „Das Beharrungsgesetz, Berlin 1896" in Nr. 36 ausführlicher gegeben habe.

Digitized by Google

er das Vorhandensein von Kräften leugnet oder überflüssig findet, lediglich den Formalismus an die Stelle der animistischen Naturbetrachtung setzt. Wohl wäre ich der letzte, der solche Ersetzung nicht gutheißen würde, und so wäre mir das formalistische Bestreben des Verfassers sehr genehm, falls er nämlich seinen eigenen Standpunkt mit Klarheit erfaßt und folgerichtig durchgeführt hätte. Aber daneben gebe ich zu, daß die Erkenntnisbedürfnisse der Menschen verschieden und gleichberechtigt sind, eine logische Billigkeit, welche der Verfasser nicht geübt hat; und deuten nicht sogar die Zeichen der Zeit darauf, daß der Animismus in der gegenwärtigen Physik besonders kräftige Wurzeln treibt?[1])

Berlin. ———— P. Johannesson.

O. Dziobek. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. X u. 648 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geb. ℳ 16,—.

Über den Inhalt des vorliegenden Werkes bemerkt der Verfasser, daß er dem Umfange seiner Vorträge an der technischen Hochschule und den Lehrplänen der militärtechnischen Akademie in den drei ersten Jahrgängen der Waffenabteilung entspricht. Es handelt sich also um ein elementares Lehrbuch, das sich zunächst nicht an den Berufsmathematiker, sondern an Techniker, denen die Mathematik nur eine Hilfswissenschaft ist, wendet. Es mußte daher die Darstellung breiter und leichter faßlich gehalten werden, denn eine besondere mathematische Veranlagung kann bei dem Studierenden technischer Fächer nicht vorausgesetzt werden, und es durften auch die Ansprüche an Strenge und theoretische Vollständigkeit nicht so hoch gestellt werden, denn der Techniker braucht die Differential- und Integralrechnung immer nur im approximativen Sinne, und die Fertigkeit im praktischen Gebrauch der analytischen Hilfsmittel ist ihm die Hauptsache.

Des näheren bezeichnet der Verfasser die Absicht des Buches wie folgt: „Dem Leser sollten die Elemente der Differential- und Integralrechnung geboten werden, wenn auch in recht weitem Umfange, so doch unter Beschränkung auf elementare Funktionen, wie sie im zweiten Abschnitt zu einem wohlgeschlossenen Funktionsbereich zusammengestellt sind. Nur ganz vereinzelt und schüchtern ist darüber hinausgegangen worden wie bei Berechnung des Wahrscheinlichkeitsintegrals und bei Einführung der Gammafunktionen. Dennoch wird man finden, daß bald hier bald da über die gesteckten Grenzen ein Blick geworfen wird auf höher liegende Gebiete, welche erst bei vertieften und gründlichen Fachstudien Zufahrtsstraßen erhalten. Es sollten dem Leser die Augen geöffnet werden, daß er nicht etwa meine, die gefestigte Kenntnis der Grundlagen des Differenzierens und Integrierens mache schon den vollendeten Mathematiker aus. Anderseits aber sind diese Grundlagen selbstverständlich auch für den Mathematiker von Beruf unentbehrlich, und so nehme ich an, daß auch der Studierende der Mathematik an einer Universität sehr wohl daran tut, sie sich völlig und sicher zu eigen zu machen."

Unter diesen Grundlagen versteht der Verfasser offenbar die Übung in den elementaren Infinitesimaloperationen. Man kann auch gewiß den Standpunkt verteidigen, daß diese Übung zweckmäßig der vollen prinzipiellen Auf-

1) Man vergleiche „Julius Schultz. Die Bilder von der Materie, eine psychologische Untersuchung über die Grundlagen der Physik. Göttingen, 1905."

Digitized by Google

klärung vorauszugehen habe. Diese letztere wird in dem vorliegenden Lehrbuche nicht versucht. Es geht aus von dem auf anschaulicher Basis aufgebauten Stetigkeitsbegriffe und bedient sich des aktual unendlich Kleinen und Großen ganz im Leibnizschen Sinne. Bezeichnend ist die folgende Stelle: „Eine unendlich kleine Zahl ist eine Zahl, welche sich der Null unbegrenzt annähert, oder deren absoluter Wert kleiner gedacht wird als jede noch so kleine, aber gegebene Zahl", und zur Erläuterung wird hinzugefügt: „Unendlich kleine Zahlen bedeuten an und für sich gar nichts, sondern sind immer nur Mittel zum Zweck. ... Wenn z. B. beim Integrieren ... ein „Kontinuum" in unendlich viele unendlich kleine Teile zerlegt gedacht wird, so geschieht es in der Absicht, aus ihnen das „Integrum", das Ganze, völlig genau, ohne den kleinsten Fehler ... zu ermitteln. Ist dies geschehen, so hat das unendlich Kleine seine Arbeit getan und kann gehen. Es verschwindet spurlos von der Bildfläche."

Der Differentialquotient wird durch den Ausdruck

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

eingeführt und erst nachträglich das Differenzieren als eine Limesrechung behandelt; dagegen wird das Integral von vornherein durch den Grenzwert

$$\lim \Sigma f(x)\Delta x$$

definiert, aber die Auffassung ist hier die, daß bei dieser Schreibweise die Δx unendlich kleine Teile vorstellen sollen; in solcher Form und nicht etwa durch Vermittlung eines Grenzüberganges wird der Existenzbeweis des Integrals geführt. Der Mittelwertsatz wird auf die Anschauung des stetigen Überganges gegründet; demgegenüber ist es nicht ganz am Platze, wenn unmittelbar vorher gesagt wird: „Der Analytiker hat nicht auf Anschauung und Anwendung, sondern auf das Wesen der abstrakten Formeln, auf ihre Berechtigung und Strenge sein Hauptaugenmerk zu richten." Es muß dann doch der Anschein entstehen, als ob schon hier die vollkommene Strenge angestrebt werden sollte, während das Buch in Wirklichkeit den didaktischen Zwecken, die es verfolgt, angepaßt ist, mit Geschick und weiser Beschränkung, wie man unbedingt zugestehen muß. Es wird auch vielleicht durch die metaphysische Färbung, die durch den intuitiv aufgefaßten Stetigkeitsbegriff und den unmittelbar angegriffenen Unendlichkeitsbegriff in die Darstellung hineinkommt, das Interesse des Neulings bedeutend erhöht, und wer weiß, wie bald unsere kritische Zeit wieder der Verführung der Metaphysik, dieser Circe unter den Wissenschaften, unterliegt. Haben doch die Physiker sich der schneidenden arithmetischen Schärfe gegenüber die Unmittelbarkeit ihrer Anschauung vielfach kräftig bewahrt. Für den Techniker gar ist es völlig unmöglich anders als anschaulich zu denken, und daher ist es gewiß durchaus notwendig, ihn auf einem möglichst anschaulichen Wege in seine Wissenschaft einzuführen.

Braunschweig. H. E. Timerding.

B. Meth. Zur Erinnerung an Ernst Eduard Kummer als Lehrer. Math. Verein der Universität Berlin 1910. *M* 0,30.

Die Schüler Kummers werden es dem Verfasser Dank wissen, daß er sich der Aufgabe unterzogen hat, die zahlreichen trefflichen Aussprüche der Nach-

Digitized by Google

welt zu überliefern, mit denen der als Forscher wie als Lehrer gleich hervorragende Mann seine Vorlesungen zu würzen und zu beleben wußte. Einer oder der andere wird allerdings manchen Ausspruch in schärferer Pointierung in der Erinnerung haben (vgl. den Ausspruch über Dahse) oder gar vergeblich nach manchem Ausspruch suchen. Dazu gehört die Bemerkung, die Kummer bei Gelegenheit der Gleichungen von der Form $f(x,p) = 0$ zu machen pflegte, um den Studenten die gegenseitige Abhängigkeit der Veränderlichen x und des Parameters p drastisch vor Augen zu führen: „Beim ersten bist du frei, beim zweiten bist du Knecht". Im ganzen aber wird das anspruchslose Heftchen nur Beifall wecken.

Berlin. E. Jahnke.

Hans Lorenz. Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. Für den Schulgebrauch und zum Selbstunterricht. IV u. 176 S. München 1910, R. Oldenbourg.

In neuester Zeit sind an den Technischen Hochschulen wie an den Hochschulen für Sondergebiete die Vorlesungen über Mathematik in zunehmender Fühlung mit dem Anschauungskreise und den Aufgaben des speziellen Fachgebiets gehalten worden. Diese Strömung hat an mehreren Hochschulen zu einer Neuorganisation des mathematischen Unterrichts geführt in dem Sinne, daß über Differential- und Integralrechnung nur noch im Zusammenhange mit der Mechanik gelesen wird, in einem Kolleg, das den Titel führt: Höhere Mathematik und Mechanik. Zugeständnisse an diese Neuordnung findet man bereits in der neuesten Auflage von Nernst-Schoenflies.

Auch der Verfasser des vorliegenden Leitfadens, der ja als Verfasser des mehrbändigen Lehrbuchs der technischen Physik in weiten Kreisen bekannt geworden ist, plädiert dafür, daß das Studium der Mechanik mit dem der Differential- und Integralrechnung parallel laufe. Allerdings soll seine Darstellung in erster Linie für die Zwecke des Realgymnasiums, der Oberrealschule und der technischen Mittelschulen bestimmt sein. „Zur Abfassung des vorliegenden Leitfadens wurde ich durch die Mitwirkung an einem Ferienkurs für Oberlehrer und einen mehrjährigen Verkehr mit solchen im Anschluß an das physikalische Kolloquium der Danziger Technischen Hochschule angeregt. Das kleine Buch enthält in durchaus elementarer, dem Verständnis des Primaners angepaßter Behandlung zunächst diejenigen Hauptlehren der analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung, welche nach meiner Erfahrung für den Beginn naturwissenschaftlicher sowie technischer Studien unentbehrlich sind und in den Lehrplan wenigstens der höheren Realanstalten Deutschlands Aufnahme finden sollten."

Ich kann nicht umhin der Befürchtung Ausdruck zu geben, daß der Herr Verfasser die mathematischen Anforderungen überschätzt, die an den Durchschnitts-Primaner selbst einer Oberrealschule gestellt werden können.

Der Verfasser beginnt mit der analytischen Geometrie (S. 1—63), die bis zu den Flächen zweiter Ordnung und ihren Raumkurven geführt wird. Auf S. 64—75 folgen die Grundregeln der Differential-, auf S 75—81 die der Integralrechnung, sodann höhere Differentialquotienten und Potenzreihen, Exponential- und Hyperbelfunktionen und Logarithmen, Kreis- und zyklometrische Funktionen, ausgezeichnete Funktionswerte, die Ermittlung des Volumens

Digitized by Google

und der Oberfläche einfacher Körper (S. 81—115). Hieran schließen sich die Anwendungen auf die Mechanik (S. 116—176): Geschwindigkeit und Beschleunigung bei geradliniger und bei krummliniger Bewegung, die Zentralbewegung, Kraft und Masse, Momente von Kräften, Kräftepaare und statische Momente, die Bewegung starrer Körper und der Arbeitsbegriff.

Es soll unumwunden anerkannt werden, daß sich die Darstellung durch knappe Form und Klarheit auszeichnet, daß sie durch eine große Zahl geschickt gewählter Beispiele und Übungen belebt wird, und daß die Herleitungen und Beweise sich vielfach geometrischer Hilfsmittel und graphischer Darstellungen bedienen. Und ich kann mir wohl denken, daß es angebracht sein kann, einer oder der anderen Schülergeneration eine Auswahl des Leitfadens vorzutragen. Ich halte es aber für Zukunftsmusik zu meinen, daß der hier vorgetragene Stoff im allgemeinen von der Prima einer Oberrealschule bewältigt werden könnte.

Viel eher ließe sich die Frage aufwerfen, ob nicht der Leitfaden für die Zwecke des Hochschulstudiums geeignet wäre, obwohl da entgegengehalten werden kann, daß er dem Studierenden der Hochschule denn doch zu wenig, insbesondere dem Studierenden der technischen Hochschulen und der Hochschulen für Sondergebiete den Stoff nicht in der für seine Zwecke wünschenswerten Form bietet.

Sicher wird der Leitfaden jedem gute Dienste tun, der sich durch Selbststudium in die Elemente der höheren Mathematik einarbeiten will. Auf alle Fälle ist der vorliegende Leitfaden eine interessante Erscheinung und eine Bereicherung der mathematischen Literatur, deren Studium warm empfohlen werden kann.

Berlin. E. Jahnke.

Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Bandes erster Teil. Herausgegeben von Justus Grassmann und F. Engel. VI u. 354 S. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geh. ℳ 18,—.

Der verdienstvolle Herausgeber der Grassmannschen Werke hat sich entschlossen, den dritten Band in zwei Teilen erscheinen zu lassen und die in Aussicht gestellte Lebensbeschreibung des Stettiner Meisters dem zweiten Teile vorzubehalten. Der erste Teil enthält die berühmte Prüfungsarbeit aus dem Jahre 1840: Theorie der Ebbe und Flut, welche hier zum ersten Male im Druck erscheint, nachdem Grassmann einzelne Abschnitte in seiner Arbeit Math. Ann. **12** veröffentlicht hatte. Es ist die Bearbeitung einer Aufgabe, die von der wissenschaftlichen Prüfungskommission zu Berlin, wahrscheinlich in Erfüllung eines von Grassmann privatim ausgesprochenen Wunsches, gestellt worden ist. Nach Grassmanns eigner Mitteilung ist diese Arbeit für die Entstehung und Ausgestaltung seiner Ideen, insbesondere der geometrischen Analyse, von hervorragender Bedeutung gewesen. Sie ist daher wie keine zweite geeignet, einen Einblick in die einsame, von allen verwandten Bestrebungen völlig unabhängige Werkstätte seines Geistes zu gewähren. Hier treten uns seine Ideen nicht wie in der Ausdehnungslehre als fertige Gebilde in einem festen Gefüge entgegen. Schritt für Schritt sucht der Stettiner Gymnasiallehrer, soweit wie ihn das vorliegende Problem dazu drängt, seine Begriffe zu entwickeln und den Leser für die Vorzüge seiner „un-

Digitized by Google

gewöhnlichen" Methode zu gewinnen. Wir müssen es dem Herausgeber der Abhandlung, dem ältesten Sohne des großen Mathematikers, Herrn Justus Grassmann, Dank wissen, daß er dieses denkwürdige Dokument deutscher Geistesgröße uns in dieser schönen Form überliefert und keine Mühe gescheut hat, der Arbeit, was Form der Darstellung anbetrifft, ihre Eigenart und Ursprünglichkeit zu belassen.

Aber noch ein anderes Gefühl beschleicht uns bei der Lektüre der Prüfungsarbeit, es ist die Trauer darüber, daß der Examinand auf keinen Examinator stieß, der imstande gewesen wäre zu beurteilen, welche Fülle neuer und wichtiger Gedanken hier in unscheinbarem Gewande vorgetragen wurde. Wieviel freundlicher hätte sich Grassmanns Schicksal gestalten können, wenn diese Prüfungsarbeit gleich damals ans Licht der Öffentlichkeit gezogen worden wäre und die erste Bekanntschaft der Mathematiker mit den Grassmannschen Ideen vermittelt hätte!

Für den Historiker interessant dürfte die bisher unbekannt gebliebene Tatsache sein, daß Grassmann bei der Darstellung der Laplaceschen Theorie dazu geführt worden ist, für den Ausdruck $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ einen besonderen Namen einzuführen; er wählt dafür den Namen „Tendenz einer Kraft". Das geschieht also im selben Jahre, wo Gauß für den gleichen Ausdruck den Namen Potential in Vorschlag bringt, nachdem bereits Green zwölf Jahre früher die gleiche Bezeichnung, nämlich Potentialfunktion, gewählt hatte.

Der zweite Teil bringt Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlaß, herausgegeben von Herrn Engel. Es sind zunächst drei Bruchstücke über die Undulationstheorie aus den Jahren 1846, 1850 und 1852, die sich bis zu einem gewissen Grade ergänzen. Sie lassen erkennen, daß Grassmann schon sehr früh mit der Theorie der kleinen Schwingungen vertraut gewesen ist.

Es folgt eine Untersuchung über die „Verbreitung des Schalles" (1867). Den Schluß bilden zwei sehr bemerkenswerte Bruchstücke über die Hypothese der aus $+E$ und $-E$ zusammengesetzten Ätheratome, die ein Seitenstück bildet zu der modernen Elektronentheorie.

Berlin. E. Jahnke.

W. Ahrens. Gelehrten-Anekdoten. Berlin-Schöneberg 1911, H. Sack.

Die vorliegende Sammlung von Anekdoten, Witzen, Bonmots usw. ist aus einem kritischen Artikel entstanden, den der Verfasser vor einigen Jahren über Gelehrten-Anekdoten in einer Beilage der Magdeburgischen Zeitung veröffentlicht hat. Vorangeschickt ist eine geistreiche Plauderei „Zur Naturgeschichte der Gelehrten-Anekdote", wo sich der Verfasser über die Psychologie solcher Anekdotenbildung und ihre kritische Bewertung ausläßt.

Unter den Anekdoten findet man natürlich manche bekannte, sei es in neuem Gewande, sei es einem anderen Gelehrten zugeschoben. Viele der Geschichten dürften aber den meisten Lesern neu sein. Sie zeigen uns besonders den deutschen Gelehrten aus dem Ende des achtzehnten und dem Beginn des neunzehnten Jahrhunderts in den verschiedensten Beleuchtungen. Alles in allem, eine amüsante Lektüre, die jedem, der Verständnis für Humor hat, empfohlen werden kann.

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

E. Netto. Die Determinanten. (Mathematisch-Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende, herausgegeben von E. Jahnke, Nr. 9.) VII, 129 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 3,20, geb. ℳ 3,60.

Das Büchelchen ist dazu bestimmt, einem Leser ohne besondere mathematische Vorkenntnisse eine kurze, aber exakte und relativ vollständige Einführung in die Determinantentheorie zu bieten. Diesem Zwecke entsprechend geht der Verf. im allgemeinen von den zwei- und den dreireihigen Determinanten aus, führt dann aber die Entwicklungen für beliebige Determinanten durch. Den Hauptsätzen der eigentlichen Theorie (Verschiedene Darstellungsformen der Determinanten, Laplacescher Zerlegungssatz, Multiplikation), die überall durch Beispiele erläutert werden, folgen die wichtigsten Anwendungen auf Algebra (Lineare Gleichungen, Resultanten und Diskriminanten), Geometrie (Lineare Transformationen, Gleichung der Geraden, der Kegelschnitte, der Ebene, der Kugel, Inhalt des Dreiecks und des Tetraeders) und Analysis (Funktionaldeterminanten, Transformation vielfacher Integrale). Wer schnell in diese mathematische Disziplin eingeführt werden will, dem ist das Studium des Buches durchaus zu empfehlen.

Berlin. C. Färber.

A. Kneser. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. VIII u. 244 S. Braunschweig 1911. Friedr. Vieweg und Sohn. Geb. ℳ 7,—.

Für die Einführung in die Theorie der Integralgleichungen ist es sehr zweckmäßig, von einfachen physikalischen Problemen auszugehen, bei der Behandlung derselben die wichtigsten Begriffe einzuführen, welche in der Theorie der Integralgleichungen grundlegend sind, und den Nutzen derselben darzulegen. Verfasser des vorliegenden Werkes wählt als Ausgangspunkt das Problem der linearen Wärmeleitung und schließt daran die Behandlung allgemeiner linearer Schwingungsprobleme, sowie der linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche den Gegenstand der Sturm-Liouvilleschen Theorie bilden. Diese Untersuchungen, welche sich in den drei ersten Abschnitten des Buches vorfinden, knüpfen teils an frühere Originaluntersuchungen des Verfassers, teils an die einschlägigen Arbeiten von W. Stekloff an und bieten nicht bloß für diejenigen, welche eine Einführung suchen, sondern auch für alle, welche mit den Grundlagen wohl vertraut sind, wertvolle Anregungen.

Auch der vierte und fünfte Abschnitt, in welchen mehrdimensionale Probleme, im besonderen einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie, behandelt werden, bringen teilweise Originaluntersuchungen des Verfassers und zeigen seine Tendenz, sich von der älteren Methode der sukzessiven Annäherungen frei zu machen, welche nur an einigen Stellen gestreift wird. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Arbeiten von Plemelj, auf welche sich Verfasser in seinen Untersuchungen zur Potentialtheorie stützt, stillschweigend mehrere mit Hilfe der älteren Methode gewonnenen Resultate enthalten. Auch der bereits erwähnte russische Mathematiker W. Stekloff ist mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen zu seinen wichtigsten Resultaten gelangt.

Der sechste Abschnitt (die Fredholmschen Reihen) behandelt mehr anhangsweise die eigentliche Fredholmsche Theorie; zu begrüßen ist hier die

Digitized by Google

Hinzufügung einer einfachen Ableitung des Hadamardschen Determinantensatzes, im übrigen hat sich Verfasser hier sehr kurz gefaßt; er zeigt auch hier seinen Wunsch, mehr durch Anwendungen als durch die Auseinandersetzung der formalen Theorie anregend zu wirken.

Die von dem Verfasser adoptierte Schreibweise fx statt $f(x)$ dürfte nicht allgemeinen Beifall finden, obwohl Mißverständnisse, welche aus dieser Schreibweise entstehen können, sorgsam vermieden sind.

Das Werk sei allen, welche sich für die Theorie der Integralgleichungen interessieren, aufs angelegentlichste empfohlen.

Berlin. ARTUR KORN.

G. H. Hardy. Orders of infinity (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr. 12). 62 Seiten. Cambridge 1910.

Das Werkchen will die Bezeichnungen und Prinzipien des Du Bois-Reymondschen Infinitärkalküls der Vergessenheit entreißen. So werden in der Hauptsache die Du Bois-Reymondschen Sätze in einfacher Weise hergeleitet; z. B. wenn $\varphi_1(x) \prec \varphi_2(x) \prec \varphi_3(x) \prec \cdots$, so gibt es Funktionen $f(x)$, derart daß $\varphi_n(x) \prec f(x)$ für alle n. Daneben werden aber auch neuere Untersuchungen mitberücksichtigt, insbesondere die Methoden von Borel und Blumenthal zur Konstruktion von Potenzreihen, die besondere Eigentümlichkeiten in ihrem Wachstum aufweisen.

In einem Anhang wird die Nützlichkeit der gebrauchten Bezeichnungen an vielen Beispielen gezeigt; leider sind jedoch die betreffenden Formeln nur einfach registriert, aber nicht bewiesen; die Literatur dafür ist allerdings überall angegeben. Recht instruktiv ist dann ein weiterer Anhang, der einige numerische Angaben bringt. So ist für mehrere divergente Reihen der logarithmischen Skala angegeben, wie viele Glieder man braucht, damit die Summe eine gewisse Zahl übersteigt. Von der Reihe $\sum_{\nu=8}^{\infty} \frac{1}{\nu \log \nu \log_2 \nu}$ braucht man schon über 60 Glieder, damit die Summe größer als 5 wird; damit sie größer als 10 wird, sind $10^{10^{100}}$ Glieder erforderlich; dies illustriert deutlich die Langsamkeit der Divergenz. Ähnliche Angaben finden sich auch für eine Auswahl von konvergenten Reihen zusammengestellt.

Tübingen. OSKAR PERRON.

Arthur Korn. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. V, 136 Seiten. Gr. 8°. Leipzig 1910. B. G. Teubner. Geb. ℳ 5,60.

Von Schwingungen ist in diesem Buche nur in der Einleitung die Rede, wo gezeigt ist, wie sich die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurückführen läßt. An der in diesem Fall bekannten Lösung hebt Verfasser diejenigen Eigenschaften hervor, welche für die Lösung der allgemeinen Fredholmschen Gleichung typisch sind, und bereitet so den Leser auf das Folgende vor. Im übrigen stellt dann das Buch, seinem Untertitel entsprechend, eine Einführung in die Theorie der Fredholmschen Integralgleichung dar. Verfasser entwickelt bei symmetrischem

Digitized by Google

Kern eine neue sehr scharfsinnige Lösungsmethode, die auf folgendem Gedanken beruht. Die Gleichung

$$f(x) - \lambda \int_0^1 f(y) K(x, y) dy = f_0(x)$$

wird formal befriedigt durch die Neumannsche Reihe

$$f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \lambda^3 f_3(x) + \cdots,$$

wobei

$$f_i(x) = \int_0^1 f_{i-1}(y) K(x, y) dy \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wenn diese gleichmäßig konvergiert, stellt sie eine Lösung dar; jedoch wird dies nur für kleine Werte von λ eintreten. Für größere Werte von λ betrachtet Verfasser an Stelle der ursprünglichen Integralgleichung zunächst die folgende:

$$f(x) - \lambda \int_0^1 f(y) K(x, y) dy = \alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_p f_p(x),$$

und bildet für diese wieder die Neumannsche Reihe. Ist dann $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon}$, wo ε beliebig angenommen, so zeigt sich, daß sie bei passender Wahl der Zahl p und der Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p$ gleichmäßig konvergiert; somit ist diese neue Gleichung gelöst. Durch eine einfache Transformation geht daraus dann auch eine Lösung der ursprünglichen Integralgleichung hervor, sofern λ nicht der Gleichung $\alpha_0 \lambda^p + \alpha_1 \lambda^{p-1} + \cdots + \alpha_p = 0$ genügt (Eigenwerte).

Obwohl diese Kornsche Methode hinsichtlich ihrer Tragweite wohl hinter denen von Fredholm und Hilbert zurücksteht, gibt sie doch über die Existenz der Eigenwerte unmittelbaren Aufschluß, und es gelingt dem Verfasser auch, die Hauptsätze über die Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen nachzuweisen.

Im zweiten Abschnitt sind gewisse Unstetigkeiten des Kernes zugelassen. Im dritten endlich wird im wesentlichen die Fredholmsche Methode auseinandergesetzt. Obwohl Verfasser wiederholt sagt, daß es ihm bloß um eine Einführung zu tun sei, ist die Lektüre, wenn man von der Einleitung absieht, doch keineswegs leicht. Aber daran ist weniger der Inhalt, als die Form schuld; es wäre zu wünschen, daß die Paragraphen Überschriften hätten, und daß die Hauptresultate als solche deutlicher hervortreten.

Tübingen. Oskar Perron.

Oswald Veblen and **John Wesley Young.** **Projective Geometry.** Vol. I. The Athenaeum Press 1910. Mit 115 Figuren. 342 S. Ginn and Company.

Ein ganz vorzügliches Buch! In der Tat eine Neuerscheinung, der in Deutschland unseres Wissens leider nichts an die Seite gestellt werden kann. Wir geben daher der Hoffnung Ausdruck, daß trotz des recht lesbaren Englisch das Werk durch eine deutsche Ausgabe dem größeren Leserpublikum zugänglich gemacht werde.

Es ist im Rahmen einer kurzen Besprechung auch nicht annähernd möglich, die zahlreichen Vorzüge des Buches nach Gebühr zu würdigen. Mehr als das, man wird kaum Anlaß zu Ausstellungen finden.

Digitized by Google

Die Verfasser beginnen mit einer „Grundlegung" — die genießbar ist (!) — und führen den Stoff bis zu den einfachsten Gebilden der Liniengeometrie, unter Umgehung der Flächen zweiter Ordnung, deren Behandlung dem zweiten Bande vorbehalten ist.

Jedem Satze — bis zum Schluß — sind die zugrunde liegenden Axiome und Postulate beigefügt: $(AEPH_0K_2)$. So wird die schon beobachtete Tatsache vermieden, daß gründliche Grundleger, sobald sie an materielle Anwendungen gelangen, heftig vorbeihauen können.

Sorgfältig unterschieden wird zwischen two points und two distinct points, woraus man schon auf das Niveau des Buches schließen kann. Die Verfasser haben ferner den Mut, sich nicht ängstlich an die überlieferte Kunstsprache zu halten. Ein Beispiel dafür ist die „on-terminology", (planes on a point, on a line, lines on a point usw.), wodurch das Dualitätsprinzip in denkbar schärfster Weise präzisiert wird. Ferner erwähnen wir noch pencil of lines, pencil of points.

Besonders reizvoll ist das Studium der „endlichen" oder „Modularräume", wobei die Ebene aus nur sieben, der Raum aus nur fünfzehn getrennten Punkten bestehen kann, ohne daß die grundlegenden Sätze der projektiven Geometrie zu gelten aufhören.

Wir zählen einige Stichworte auf, die eine ungefähre Vorstellung vom Inhalt des Ganzen zu vermitteln geeignet sind: Konfigurationen, „Rationalitätsnetze", Punktrechnung, lineare Transformationen und Matrices, Elementarteiler, Konstruktionen (Rationalitätsbereich), invariante Bildungen, Raum von n Dimensionen.

Die projektiven Transformationen sind in einem Lehrbuch wohl noch nicht in gleicher Ausführlichkeit behandelt worden, was besonders auch für die Korrelationen gilt. Die Untergruppen der projektiven Gruppe der Geraden werden geometrisch abgeleitet; überhaupt kommt der Gruppenbegriff zu seinem Rechte, so daß das Problem der projektiven Geometrie präzise ausgesprochen werden kann, was unseres Erachtens noch auffälliger hätte geschehen dürfen.

Sätze der affinen und metrischen Geometrie werden vermieden. Vorherrschend ist die rein geometrische Behandlungsweise, bei der uns Unrichtigkeiten, soweit wir gelesen haben, nicht aufgefallen sind, obwohl bei einer Neuauflage noch Kleinigkeiten zu beseitigen wären.

Im analytischen Teile haben wir allerdings etwas auszusetzen. Das trifft freilich nicht nur die Verfasser, sondern so ziemlich die ganze Literatur: Eine Gleichung in homogenen Koordinaten hat Sinn nur, wenn der Homogenität sämtlicher darin vorkommenden Größen Rechnung getragen wird. Seite 186 übersetzen wir:

„Sind $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ die Gleichungen zweier getrennten Tangenten eines Kegelschnitts und der zugehörigen Verbindungssehne, so kann die Gleichung des Kegelschnitts in der Gestalt

$$p^2 - kmn = 0$$

geschrieben werden, wobei der Koeffizient k durch einen weiteren Punkt des Kegelschnitts bestimmt ist."

Damit würde also k den Kegelschnitt des fraglichen Büschels individualisieren. Wie wird es damit aber, wenn man den homogenen Koordinaten etwa

Digitized by Google

der Geraden $n = 0$ einen Proportionalitätsfaktor hinzufügt? (und dazu sieht man sich bei Anwendungen doch häufig veranlaßt!)

Man bemerkt, daß der Wert von k den Kegelschnitt durchaus nicht bestimmt. Einem vorgegebenen Werte von k entsprechen unzählig viele Kegelschnitte; jeder gehört zu unzählig vielen Werten von k („im allgemeinen").

Wir benutzen nebeneinander homogene Punktkoordinaten (lateinische Buchstaben) und Linienkoordinaten (Deutsche Buchstaben). Die Gerade $\mathfrak{a}$ liegt mit dem Punkte a vereinigt, wenn

$$(a\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}a) = \mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2 + \mathfrak{a}_3 a_3 = 0$$

ist. Die Geraden $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ des obigen Satzes bezeichnen wir als $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$.

Jetzt wählen wir einen Punkt a beliebig, aber so, daß er auf keiner der drei gegebenen Geraden liegt. Dann ist die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts

$$\lambda(a\mathfrak{m})(a\mathfrak{n})(\mathfrak{p}x)^2 - \mu(a\mathfrak{p})^2(\mathfrak{m}x)(\mathfrak{n}x) = 0,$$

und hier gehört jedem Werte von $\lambda : \mu$ ein ganz bestimmter Kegelschnitt des Büschels zu und umgekehrt. Der Wert $\lambda : \mu$ wird durch die Einführung von Proportionalitätsfaktoren in keiner Weise berührt.

Doch hindert uns diese Ausstellung nicht, diese Besprechung ebenso zu schließen, wie wir sie angefangen haben:

Ein ganz vorzügliches Buch!

Charlottenburg. H. Beck.

H. Ganter u. **F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium.** I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 7. Auflage. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geb. 3 ℳ.

Dieses nun in 7. Auflage vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie ist zu bekannt und verbreitet, als daß es noch einer ins einzelne gehenden Besprechung bedarf. Der Inhalt der sechs Kapitel erstreckt sich auf: Punkt, gerade Linie, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel und enthält die unerläßlichen Elemente, wobei zahlreiche Aufgaben neben bloßen Übungen auch die Beweise weitergehender Sätze fordern. Die Lektüre bietet auch dem Kenner noch Genuß; allen aber, die im Beginn des Studiums der analytischen Geometrie stehen, kann das Buch aufs angelegentlichste empfohlen werden. Es gehört mit zu den besten Lehrbüchern auf diesem Gebiete.

Schöneberg. Willy Weber.

Müller, Baltin und **Maiwald. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Seminare und Präparandenanstalten.** Unter Zugrundelegung des Lehrbuches von Hch. Müller: Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Teil I, B nach den Lehrplänen von 1901 für Seminare usw. bearbeitet. 3. verb. Auflage. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geb. ℳ 2,60.

Es ist mit Freude zu begrüßen, daß von diesem brauchbaren Lehrbuche der Mathematik bereits die 3. Auflage vorliegt. Das Werk zeichnet sich nicht

Digitized by Google

nur durch reichen Inhalt, sondern auch durch übersichtliche Anordnung und faßliche Darstellung des Lehrstoffes aus und kann deshalb allen Seminaren und Präparandenanstalten zur Einführung, sowie jungen Lehrern zur Vorbereitung auf den Unterricht bestens empfohlen werden.

In 4 Abschnitten werden die Planimetrie, die Arithmetik und die Anfangsgründe der Trigonometrie und Stereometrie behandelt, soweit sie für Seminare erforderlich sind. Bereichert ist die 3. Auflage gegen die vorige um die ausführliche Besprechung der graphischen Darstellung und ihrer Anwendung auf die Lösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten; dabei wird auch der Begriff der Funktion eingeführt und erläutert. Leider enthalten die hierauf bezüglichen Abschnitte zu wenig Übungsstoff, mit dem das Buch an anderen Stellen, vor allem im planimetrischen Teil, reicher ausgestattet ist.

Einige unschöne Abkürzungen (z. B. Ww. für Wechselwinkel, Ew. für entgegengesetzte Winkel) sollten in einer neuen Auflage vermieden werden. Wünschenswert wäre auch eine Vermehrung der geschichtlichen Bemerkungen.

Pankow. J. Hillmann.

F. Hočevar. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. Mittelstufe (IV. und V. Klasse). Siebente Auflage. 8°. 176 S. Wien 1911, F. Tempsky. Geb. ℳ 2,60.

Die jetzt erschienene siebente Auflage der Mittelstufe von Hočevars rühmlichst bekanntem Lehr- und Übungsbuch der Geometrie steht völlig im Einklang mit den neuen österreichischen Lehrplänen und erfüllt alle Forderungen, die man an ein modernes Schulbuch stellt. Mit besonderer Liebe sind die Konstruktionsaufgaben behandelt, davon zeugt eine sehr nützliche Zusammenstellung achtzehn geometrischer Örter. Auch die Behandlung der Stereometrie erscheint vorbildlich, überall stehen Anschauung und Konstruktion im Vordergrund. Die große Zahl der angehängten Aufgaben — es sind über 700! — bieten ein vortreffliches Material zu Übungen.

Berlin. A. Baruch.

A. Donath. Repetitorium der Schulmathematik für Schüler höherer Lehranstalten. Erster Teil: Arithmetik. 197 S. Leipzig 1911, F. Brandstetter. Geb. ℳ 3, —.

Das vorliegende Buch soll den Schülern höherer Lehranstalten ein Hilfsmittel zur Wiederholung einzelner Abschnitte der Schulmathematik für Klassenarbeiten und Klassenprüfungen, aber auch zu umfassenden Vorbereitungen für mündliche und schriftliche Abschlußprüfungen sein; es setzt also voraus, daß der Schüler den Inhalt der betreffenden Abschnitte aus dem Unterrichte kennt, ihn nur in sein Gedächtnis zurückrufen und an Aufgaben neu einüben will. Das mit großer Sorgfalt verfaßte Buch vereinigt Reichhaltigkeit des Inhalts mit klarer, übersichtlicher Darstellung, zwei Vorzüge, die dem Buch große Verbreitung sichern. Aus dem Inhalt sei erwähnt ein Abschnitt über Funktionenlehre, wo auf graphische Darstellungen, graphische Auflösung numerischer Gleichungen usw. eingegangen wird. In dem Abschnitt über Gleichungen werden auch diophantische Gleichungen ersten und zweiten Grades behandelt, so die Pythago-

Digitized by Google

reischen Gleichungen. Die Elemente der Differential- und Integralrechnung nebst Anwendungen bilden den Beschluß des Buches. Bei der Durchsicht ist dem Ref. aufgefallen, daß in dem Abschnitt über Division auf den Ausdruck $\frac{0}{0}$ nicht eingegangen ist. Bei den Regeln über das Rechnen mit Irrationalzahlen (Fortschaffen einer Wurzel aus dem Nenner) wären zur Erleichterung des Verständnisses Beispiele hinzuzufügen. Von Vorteil dürfte es auch sein, bei der Behandlung der Gleichungen den Koeffizienten der höchsten Potenz von x gleich 1 zu setzen, wie es teilweise auch geschehen ist. Abzuraten ist, daß z. B. bei den arithmetischen Reihen für alle möglichen Fälle die Ergebnisse angegeben werden, weil dadurch dem Schüler zuviel Arbeit abgenommen wird. Diese Ausstellungen sind nur von untergeordneter Bedeutung und nicht geeignet, die Brauchbarkeit des Buches herabzusetzen. Der zweite Teil soll die Geometrie behandeln, und an beide Teile soll sich dann eine Sammlung von Aufgaben anschließen.

Berlin. A. Baruch.

Walther-Jenson. Mathematischer Lehr- und Übungsgang für höhere Mädchenschulen, Lyzeen und Studienanstalten. Abteilung C: Walther, Die Mathematik auf dem Lyzeum und der Studienanstalt. Leipzig 1910, Friedrich Brandstetter.

Wie der Verfasser im Vorwort betont, hat er sein Augenmerk darauf gerichtet, stets vom anschaulichen, konkreten Beispiel zum allgemeinen Lehrsatz überzugehen. Diesen methodischen Grundsatz dürfte wohl jeder anerkennen. Es ist dabei aber unbedingt zu fordern, daß die Lehrsätze möglichst allgemein bewiesen werden. Leider geschieht das nicht an allen Stellen des Buches, z. B. nicht in der Kombinatorik.

Die Behandlung des Apollonischen Kreises als Ortskurve ist unvollständig. Es fehlt der Beweis dafür, daß nur die Punkte des Kreises die verlangte Eigenschaft haben.

Der Text könnte an manchen Stellen noch exakter gefaßt sein. Ich bin auch nicht einverstanden mit dem Versuch des Verfassers, fremdsprachliche Fachausdrücke durch deutsche zu ersetzen, z. B. „umgekehrt" statt „reziprok", „Einschränkung" statt „Determination", „Berührungslinie" statt „Tangente".

Die Figuren zu den Kegelschnitten sind nicht alle korrekt.

Ein Vorzug des Buches liegt darin, daß es eine ziemlich reichhaltige Auswahl von brauchbaren Aufgaben enthält, die eng mit dem Lehrgang verknüpft sind.

Steglitz. P. Henckel.

Max Mandl. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. (IV. — VII. Klasse). Wien 1910, Manz.

Der Verfasser legt seinem Lehrbuche die Einteilung der Geometrie in die der Ebene und die des Raumes zugrunde. Erstere zerfällt in: Planimetrie, ebene Trigonometrie, analytische Geometrie; letzere in: Stereometrie, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie. Jedem der 5 ersten Gebiete ist ein Hauptteil des Buches gewidmet; an die Stelle der analytischen Raumgeometrie tritt als sechster Teil eine Einführung in die Elemente der Infinitesimalrech-

Digitized by Google

nung. Es unterliegt wohl kaum einem Zweifel, daß jeder Lehrer mehr oder weniger seinen eigenen Weg zum vorgeschriebenen Ziele einzuschlagen pflegt, mag er nun diesen seinen in praktischer Erfahrung gewonnenen und ausgebauten, dem Fortschritte aller Wissenschaft entsprechend natürlich wandelbaren Lehrgang der Allgemeinheit zugänglich machen oder nicht. Immer ist es reizvoll und nicht ohne Nutzen zugleich, auch die Wege anderer kennen zu lernen. So wird der Leser in diesem in modernem Sinne geschriebenen Lehrbuch, das einen recht gangbaren Weg zur Vermittlung der in der Schule zu fordernden Kenntnisse darstellt, manches Neue und gut Verwendbare antreffen, namentlich was die Anordnung und Verbindung in dem weitverzweigten Netze geometrischer Betrachtungen angeht. Beispielsweise ist, um nur eins zu nennen, eine längere Erläuterung über Funktionen und ihre Darstellung, die sich bei manchen den neueren Bestrebungen entsprechend gestalteten Büchern nur erst schüchtern als Anhang hervorwagt, gleich frisch mitten in den Abschnitt über trigonometrische Funktionen eingeflochten. Auch verschiedene andere wichtige Kapitel zeigen eine zur praktischen Erprobung wohl auffordernde Behandlung. Ohne auf Einzelheiten einzugehen muß indessen der Figuren in nicht zustimmender Weise gedacht werden. Ist beispielsweise ein Körper als undurchsichtig vorgestellt, so müssen konsequenterweise wohl auch die im Innern desselben befindlichen Körperdiagonalen als unsichtbar gelten und so gekennzeichnet werden. Allzu starke Linien wirken bei den angewendeten Größenverhältnissen leicht störend. Als nicht einwandfrei muß die Fig. 233 erklärt werden: sie ist keine genau konstruierte Parallelprojektion der räumlichen Verhältnisse.

Schöneberg. Willy Weber.

E. Lutz. Analytische Geometrie der Ebene. Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. 301 S. Karlsruhe 1909, G. Braun. Geb. ℳ 9,—.

„Das Buch soll gleichsam eine Brücke sein zwischen Mittel- und Hochschulmathematik", es behandelt den gesamten Stoff der analytischen Geometrie der Ebene, soweit er sich elementar bewältigen läßt (mit Ausnahme der homogenen Koordinaten, die nur flüchtig erwähnt werden). Diese bis zu einem gewissen Grade systematische Vollständigkeit vereint sich in glücklicher Weise mit einer methodischen Form der Darbietung, die in Anlehnung an die Schulpädagogik dem Leser zunächst das zu behandelnde Problem vorlegt und das gefundene Ergebnis erst hinterher zu einem Lehrsatz zusammenfaßt. Im Anfange sind zahlreiche Rechnungen im einzelnen durchgeführt, auch Spezialfälle eingehend behandelt; später werden die Rechnungen in abgekürzter Form gegeben, zuletzt oft nur angedeutet, so daß der Studierende, der das Buch durcharbeitet, wirklich lernt, die anfangs dargebotenen Krücken zu entbehren und ohne fremde Hilfe zu gehen. Daß der Verfasser schon im Anfang die Determinanten zweiten und dritten Grades benutzt, ist durchaus zu billigen und entspricht auch dem Niveau des Buches; sehr angenehm berührt die eingehende Berücksichtigung von Konstruktionsaufgaben. „Die rechnende Geometrie ist mit der konstruierenden in geeigneter Weise zu verbinden." Das ist dem Verfasser besonders gut bei der Behandlung der projektiven Beziehungen gelungen, die schon früh gebührend ins Licht gerückt werden. Der Inhalt des Buches ist in drei Abschnitte geteilt: der Punkt und die gerade Linie, die einzelnen Kurven zweiter Ordnung, gemeinsame Behandlung der Kurven zweiter Ordnung. Besonders

Digitized by Google

schön ist der letzte Abschnitt, in dem nach Einführung der Linienkoordinaten das Dualitätsprinzip durchaus in den Vordergrund gestellt wird. Mehrere hundert verständig ausgewählte Aufgaben, die an der richtigen Stelle in den Gang des Buches eingefügt sind, leisten bei der Einübung und Befestigung des Stoffes vortreffliche Dienste. Die zahlreichen (132) Figuren sind musterhaft.

Was an dem Buche unangenehm auffällt, kommt nicht auf Rechnung des Verfassers. Dahin gehört 1) der im Vergleich zum Umfang ziemlich hohe Preis, 2) die auf dem Titel hinzugefügte Bezeichnung „Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten", während der Verfasser ausdrücklich sagt, daß das Buch „in erster Linie zum Selbststudium für Studierende an Hochschulen bestimmt" ist, daß aber „ein begabter Primaner bei gutem Fleiß den Inhalt des Buches verstehen lernen kann" — sollte der leicht irreführende Untertitel nur „der mehreren Verbreitung halber" hinzugefügt worden sein? — 3) die ungewöhnliche Form der Anpreisung auf einem beigelegten Zettel, der wohl nur solchen Referenten, die Bücher besprechen, ohne sie zu lesen, ihre Arbeit erleichtern soll.

Doch das sind Äußerlichkeiten, die mit dem inneren Wert des Buches nichts zu tun haben. Wir können jedem, der sich in der analytischen Geometrie der Ebene ordentlich orientieren will, das vorliegende Werk als einen zuverlässigen und angenehmen Führer recht empfehlen. Auch den Mathematiklehrern an unseren höheren Schulen wird es manche Anregung bieten.

Halensee b. Berlin. P. Zühlke.

C. Runge. Analytische Geometrie der Ebene. IV, 198 S. Mit 75 Figuren im Text. Leipzig und Berlin 1908, B. G. Teubner. Geb. ℳ 6,—.

Das ist ein ungemein praktisches Buch; es ist aus Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu Hannover entstanden, vorzugsweise für die Bedürfnisse der Techniker geschrieben und weist daher in Inhalt und Form ganz bedeutende Unterschiede gegen die üblichen Lehrbücher der analytischen Geometrie auf. Im ersten Abschnitt wird der Vektor definiert, aus der Addition zweier Vektoren die Gleichung der Geraden und aus der Multiplikation zweier Vektoren die Gleichung des Kreises gewonnen. Der zweite Abschnitt „Die Konstruktionen mit Geraden und Kreisen" zeigt, wie man mit Hilfe der Koordinaten alle Konstruktionen, die man auf dem Papier mit Lineal und Zirkel ausführt, auch errechnen kann. Dabei ist überall (selbst bei einer so einfachen Aufgabe wie die, durch zwei Punkte eine Gerade zu legen) auf praktische Dinge, z. B. Beobachtungsfehler, Genauigkeitsgrenzen für die Rechnung, praktische Hilfsmittel für die Durchführung der Rechnung (wie Rechenschieber, Rechenmaschinen, Logarithmentafeln u. dgl.) geachtet, die Vorzüge und Schattenseiten der verschiedenen Berechnungsarten sind sorgfältig gegeneinander abgewogen und wertvolle Ratschläge auch für die Reihenfolge der einzelnen Rechnungen gegeben. Wir nennen von praktischen Aufgaben aus diesem Kapitel: Resultante von Kräften, Berechnung der Spannungen in den Stäben eines Fachwerks, das Rückwärtseinschneiden. Der dritte und umfangreichste Abschnitt behandelt die linearen Koordinatentransformationen, wobei die Ellipse als affines Bild, die Hyperbel und Parabel als perspektivische Bilder des Kreises auftreten. Gerade diese anschauliche Art, die drei „Kegelschnitte" auch wirklich als solche aufzuzeigen und ihre Grundeigenschaften aus denen des Kreises durch Projektion oder Transformation herzuleiten, ist für den Techniker besonders wertvoll. Wenn schon

Digitized by Google

in diesen drei Abschnitten jeder Mathematiker, der das Buch zur Hand nimmt, reiche Anregung empfangen wird, so geschieht dies in erhöhtem Maße im vierten Abschnitte, der, über die unmittelbaren Bedürfnisse des Technikers hinausgehend, die homogenen Koordinaten behandelt; der Verfasser sagt wie zur Entschuldigung: „Der höhere Standpunkt, zu dem man durch die homogenen Koordinaten aufsteigt, läßt die Dinge so viel einfacher erscheinen, daß die Mühe, die man darauf verwendet, sich reichlich lohnt". Wir können das vortreffliche, anregend geschriebene Buch nicht nur allen Studierenden der technischen Hochschulen angelegentlichst empfehlen, sondern überhaupt jedem mathematisch interessierten Techniker, nicht minder aber den technisch interessierten Mathematikern — und das sollten heutigentages eigentlich alle sein, zum mindesten alle Mathematiklehrer an unseren höheren Schulen.

Halensee b. Berlin. P. Zühlke.

E. Roeser. Die Verfolgungskurve auf der Kugel. I.-D. Halle a. S. 1909. 61 S. 8. Bremen, F. Quelle.

Das Problem der Verfolgungskurven, zuerst angeregt 1732 von Bouguer, wird hier in sehr dankenswerter Weise für die Kugel aufgestellt und gelöst. Unter Zugrundelegung von geodätischen Polarkoordinaten ergibt sich eine Riccatische Differentialgleichung, die sich auf eine Quadratur zurückführen läßt, da man ein partikuläres Integral ermitteln kann. Doch ist die Integration nur ausführbar, wenn die Geschwindigkeit der beiden Punkte als gleich angenommen wird. Die Diskussion der allgemeinen Kurven gelingt aber trotzdem. Auch die Rektifikation der Kurven wird untersucht. In einem Anhang werden die Ergebnisse auf einer pseudosphärischen Fläche mit denen auf der Kugel verglichen.

Unter den behandelten Kurven treten — vielleich zum erstenmal in der Literatur der Raumkurven — Formen auf mit asymptotischem (größtem) Kreis.

Pirmasens. H. Wieleitner.

C. de Jans. Over krommen van Clairaut, Boscowich en Playfair. S.-A. aus Handel. 14. Vlaamsch Natuur-en Geneeskundig Congres 1910. 51 S. m. 6 Fig. auf einer Tafel. Gent, Ad. Hoste.

Wir können hier mehr nur einen Hinweis geben auf die vorliegende hübsche Arbeit, als eine Mitteilung über ihre Resultate. Mit der »Kurve von Playfair« (Polargleichung $r^3 = k^2 \sin\theta$) hatte sich der Verfasser schon in der ds. Archiv Bd. 16 (1910), S. 49 besprochenen Arbeit über die »Doppeleilinie« (Polargleichung $r = a\cos^2\theta$) beschäftigt. Playfair hatte sie (1807) »Kurve gleicher Anziehung« genannt, weil sie der geometrische Ort ist für einen Massenpunkt, der den Pol mit einer solchen Kraft anzieht, daß die der Polarachse parallele Komponente einen konstanten Wert hat. Auch Boscowich hatte sich mit ihr schon 1743 befaßt als der Meridianlinie des Rotationskörpers von gegebener Masse und größter Newtonscher Anziehung auf den Pol. Diese Kurve, eine isotrope Sextik mit zwei symmetrischen Blättern, die in einem Oskulationsknoten, der gleichzeitig Inflexionsknoten ist, zusammenhängen, wird zunächst ähnlich wie früher die Doppeleilinie diskutiert. Sodann betrachtet der Verfasser die beide Kurven enthaltende Familie $r^n = k^n \sin\theta$, über die Clairaut 1726 als $12\frac{1}{2}$ jähriger Junge der Pariser Akademie eine Abhand-

Digitized by Google

lung eingereicht hatte (s. a. ds. Archiv Bd. 15 (1909/10), S. 177—185 (P. Ernst)). Zunächst teilt er diese »Clairautschen Multiplikatrixkurven« in Klassen ein, leider ohne die topologische Diskussion, auch mit Figuren, wie sie Loria in der neuen Auflage seiner *Speziellen Kurven* (I, 388) als wünschenswert bezeichnet hat, ganz durchzuführen. Dann folgen mannigfache Untersuchungen dieser Kurven, ihrer orthogonalen Trajektorien, ihrer Polarlinien und zum Schluß eine allgemein bewiesene Konchoiden-Eigenschaft der Doppeleilinie mit einer neuen kinematischen Erzeugung derselben. Seit der früheren Arbeit hat der Verfasser genaue Literaturstudien gemacht, was hier angenehm hervortritt.

Pirmasens. H. Wieleitner.

G. Herting. Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral. Zum Gebrauche in den oberen Klassen der höheren Schulen und beim Selbstunterricht. Mit 116 Fig. IV u. 135 S. gr. 8. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geb. ℳ 2,80.

Diese Schrift, die ursprünglich als Programm zum Jahresberichte des hum. Gymnasiums zu St. Anna in Augsburg im Herbst 1910 erschien, legt ein beredtes Zeugnis dafür ab, daß auch in Bayern, wo gegenwärtig noch der mathematische Lehrstoff an den Gymnasien einen sehr geringen Umfang hat, der Geist der neuen Zeit, der die Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals nicht für schwieriger, aber für nützlicher hält als die Konstruktion eines Dreiecks aus r, h_a, w_a, nicht bloß die jüngeren Kollegen erfaßt hat. Denn unser Verfasser ist, soviel mir bekannt, seit seiner schönen, bei der heutigen Richtung der Mathematik aber in unverdienter Vergessenheit ruhenden Dissertation über Flächen 3. Ordg. (München 1884) nicht mehr literarisch hervorgetreten.

Es ist schade, daß das Buch wirklich außer der anschaulichen Entwicklung des Begriffes des bestimmten Integrals und der Anwendung dieses Begriffes auf die mannigfachsten Probleme nichts Weiteres gibt, da sich dadurch sein Verwendungsbereich beschränkt, den wir recht ausgedehnt sehen möchten. Außer der großen pädagogischen Geschicklichkeit, die sich überall kundgibt, sehen wir auch überall in den Figuren eine sichere Beherrschung der Form, durch die sich schon die Dissertation auszeichnete. Der Verfasser benutzt nur die Integrale $\int x^n dx$, $\int \cos x dx$ und $\int \sin x dx$. Am Schlusse führt er auch Doppel- und dreifache Integrale ein. Dabei erscheint die Bezeichnung des Flächenelements als unendlich kleiner Größe zweiter Ordnung und die Schreibweise $d^2F = dx\,dy$ bedenklich. Sonst ist kaum etwas — bei Beachtung des Zweckes — zu beanstanden. Nur möchten wir auf ein didaktisches Moment aufmerksam machen, das außer acht gelassen wurde. Wenn man eine Fläche als Grenze der eingeschriebenen und umgeschriebenen Rechtecke mit den Basen Δx und den Höhen y_i, bzw. y_{i+1} betrachtet, so sollte man nicht versäumen, das schließliche Verschwinden der Summe der kleinen Rechtecke $(y_{i+1} - y_i)\Delta x$, um die sich die um- und eingeschriebene Staffelfigur unterscheiden, dadurch zu veranschaulichen, daß man alle diese kleinen Rechtecke gegen die letzte Ordinate y_n verschiebt, so daß sie sich zu dem schmalen Rechteck $y_n \cdot \Delta x$ summieren, das mit Δx verschwindet.

Pirmasens. H. Wieleitner.

Digitized by Google

H. Starke. Experimentelle Elektrizitätslehre, verbunden mit einer Einführung in die Maxwell'sche und die Elektronentheorie der Elektrizität und des Lichts. Mit 334 Abbildungen. 2. umgearbeitete Aufl. XVI und 662 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geb. ℳ 12,—.

Der Experimentalphysiker kommt auf seinem Arbeitsgebiet ohne eine gewisse Summe theoretischer Kenntnisse nicht aus, der Theoretiker andrerseits muß unbedingt die Erfahrungstatsachen beherrschen. Das ist der Grund für das Entstehen von Büchern, die auf der Grenze beider Behandlungsweisen liegen. Und wenn ein einziges Werk beiden Forschungsrichtungen einen Dienst erweist, so ist das rückhaltlos als Verdienst anzuerkennen; in dieser angenehmen Lage befinden wir uns bei Starke's „Elektrizitätslehre".

Das Verdienst beruht vor allen Dingen in der Überwindung der großen Schwierigkeiten, die sich bei der Erstrebung des soeben genannten Doppelziels einstellen: Der Experimentator muß die theoretischen Vorstellungen kennen, welche die Erscheinungen zusammenfassen, und die Resultate, die aus der Theorie gezogen worden sind; er wünscht auch zu sehen, wie die Resultate aus den Prinzipien folgen, soweit man das ohne großen analytischen Apparat zeigen kann. Letzeren wird er mehr oder weniger ablehnen, da es bei dem großen Umfang der Wissenschaft nicht von ihm zu verlangen ist, daß er mit dem zum Verständnis der mathematischen Ableitungen nötigen Rüstzeug so vertraut ist, und da sein physikalischer Instinkt häufig ihn schon das richtige Resultat ohne Rechnung übersehen läßt. Unterscheiden wir einmal zwischen theoretischer und mathematischer Physik, so können wir die Forderung des Experimentators vielleicht so formulieren: Er will die Elemente der theoretischen Physik, aber nicht die Deduktionen der mathemathischen Physik kennen lernen.

Der Theoretiker umgekehrt hat das Bedürfnis, zunächst die wichtigsten Tatsachen zu erfahren, die auf dem Gebiete seiner Forschung liegen, ihn würden experimentelle Kunstgriffe in ihren Einzelheiten und ein großes Beobachtungsmaterial, das noch nicht in ein System gebracht ist, nur verwirren.

Beide, Theoretiker wie Experimentator, kommen bei dem Buche infolge seiner eigenartigen Schreibweise auf ihre Rechnung, Lehrer sowohl wie Schüler. In geschickter Weise wechseln schematische Zeichnungen von Versuchsanordnungen mit der wirklichen Abbildung von Apparaten. Hier ist dem einen mit einer Formel, einem Zitat gedient, dort dem andern die Angabe einer Firma, ein Wink für die praktische Ausführung eines Experiments willkommen.

Inhaltlich ist das Werk sehr umfassend und durchaus modern. Elektrostatik, Magnetismus und Elektromagnetismus sowie die elektrischen Meßmethoden sind behandelt, auch die Elektrochemie ist nicht vergessen, und die Anwendungen der Technik finden Platz. Die elektrischen Schwingungen sind, besonders im Hinblick auf die Fortschritte der drahtlosen Telegraphie viel ausführlicher als in der ersten Auflage vorgetragen. Die Beziehungen zwischen Elektrizität und Licht sowie die Verknüpfungen des Galvanismus mit der Wärmelehre sind vom elektronentheoretischen Standpunkte aus dargestellt, Abschnitte über Gasentladungen und Radioaktivität geben über die neusten Forschungen Aufschluß, ja es fehlt sogar nicht ein Kapitel über das schwere Problem der Relativität.

Tübingen. R. Gans.

Digitized by Google

Eduard Kummer. Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Hrsg. vom Vorstande der Berliner Mathematischen Gesellschaft. IV u. 103 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 4,—.

Den Anfang der mit einem Bildnis des 65jährigen Kummer geschmückten Festschrift macht die in der B. M. G. gehaltenen Gedächtnisrede auf Kummer von K. Hensel, welcher aus genauester Kenntnis heraus eine Schilderung des auch in seinen äußeren Umständen fesselnden Lebensganges des großen Mathematikers liefert, vor allem aber uns in seinen wissenschaftlichen Entwicklungsgang sachkundig einführt. Kummers Entdeckungen in der höheren Zahlenlehre und seine Schöpfung der idealen Zahlen erfahren hier eine zwar nur dem Mathematiker, aber über den Kreis des zahlentheoretischen Spezialisten hinaus gut verständliche Darstellung, wobei in historischer Treue vom letzten Fermatschen Satz, welchem Kummers Bemühungen lange Zeit gewidmet waren, ausgegangen wird. Interessant ist es, wie Hensel nach kurzer Erklärung der algebraischen Zahlen des Kreisteilungskörpers und Feststellung der Tatsache, daß hier die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren nicht stattfindet, auf wenigen Seiten die zur Ausfüllung dieser Lücke von Kummer geschaffenen idealen Primfaktoren allgemein verständlich macht. Teilt man nämlich alle positiven ganzen Zahlen in 2 Klassen K_0 und K_1, wo K_0 aus allen Zahlen bestehe, welche eine gerade Anzahl von gleichen oder verschiedenen Primfaktoren enthalten, K_1 aus allen Zahlen, die eine ungerade Anzahl von Primfaktoren besitzen, also u. a. alle Primzahlen selbst. Nun sei uns K_1 nicht zugänglich, und wir wollen K_0 auf Zerlegbarkeit ihrer Zahlen in ihre Elemente d. h. wieder Zahlen aus dem Bereiche K_0 prüfen. Dann findet sich z. B. 210 darstellbar als $6 \cdot 35$ oder $10 \cdot 21$ oder $14 \cdot 15$, während erst durch Zulassung der in K_1 befindlichen Primzahlen die für K_0 allein nicht geltende eindeutige Zerlegung $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sich herstellen läßt.[1]) Das Sinnbild der Klasse K_0 wird nun weiter geführt und die Art gezeigt, wie man, ohne K_1 zu kennen, hier auf „ideale" Zahlen gelangen kann, mittels deren die Eindeutigkeit der Zerlegung doch zustande kommt. Aber Hensel gelangt noch weiter. Er begründet immer an dem Beispiel die Begriffe der Klasseneinteilung, der Klassenanzahl, um dann schließlich in der gleichen Weise die Anwendung der Idealzahlen auf das Fermatsche Problem $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ zu erläutern, das nach den Kummerschen Untersuchungen nur lösbar ist, wenn die Klassenanzahl H für die λ^{ten} Einheitswurzeln nicht durch λ teilbar ist. Unter den ersten 100 Exponenten erwies sich diese Bedingung als unerfüllt nur bei $\lambda = 37, 59, 67$. Allerdings häufen sich die Ausnahmen im zweiten Hundert. Unter den ersten 13 Primzahlen des zweiten Hunderts gibt es schon 5 Ausnahmezahlen, und Kummer hält es für wahrscheinlich, daß zuletzt etwa so viel reguläre wie Ausnahmeprimzahlen existieren. Kurz wird dann noch die Verfeinerung der Methode hervorgehoben, welche auch unter den Ausnahmen noch gewisse Unmöglichkeitsfälle nachweist, so daß auch u. a. die Zahlen 37, 59, 67 keine Beweislücken mehr bilden. Es folgt ein Hinweis auf Kummersche Arbeiten, die sich an seine Idealtheorie anschließen (allgemeine Reziprozitätsgesetze usw.)

1) Ebenso kann man die Ideale versinnbildlichen, wenn man in Klasse K_0 alle Zahlen der Form $4m + 1$ aufnimmt. Hier wird dann z. B. 21 unzerlegbar sein, jedoch zerlegbar, sobald man die „Ideale" 3 u. 7 zuläßt, s. Sommer, Vorl. ü. Zahlenth., Lpz. 1907. S. 36.

Digitized by Google

Die nun folgenden Briefe Kummers an seine Mutter werfen Licht auf biographische Punkte. Zum Teil gilt dies auch von dem Briefwechsel zwischen Kummer und Kronecker (S. 46ff.). Soweit derselbe sich auf eigentlich mathematische Dinge bezieht, soll hier kurz auf einiges eingegangen werden:

S. 47. So wie $4 \cdot \frac{1-x^p}{1-x}$ in die Form $X^2 \pm pY^2$ gesetzt werden kann, ebenso kann $27 \cdot \frac{1-x^p}{1-x}$ in eine ternäre kubische Form gesetzt werden. Es ist in der Theorie der quadratischen Reste nichts, was nicht sein Analogon in der Theorie der kubischen Reste hätte.

S. 52. Sowie für komplexe Zahlen $a+bi$ die Lemniskate oder das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ zugeordnet ist, so spielt für komplexe Zahlen von der Form $\frac{a+bi\sqrt{3}}{2}$ das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$ dieselbe Rolle.

S. 55. Eindeutigkeit der Zerlegung in wirkliche Primfaktoren.

S. 57. Der Körper der fünften Einheitswurzel.

S. 62. 1844, erste Andeutung der Klassenanzahl.

S. 64. 1845, erste Darstellung der Idealtheorie.

S. 68. 1846, Gespräch mit Dirichlet über Idealtheorie, der auf eine interessante Note von Gauß hinweist: „Wenn ich hätte auf dieselbe Weise verfahren wollen, wie die früheren Mathematiker mit dem imaginären, so würde eine andere meiner Untersuchungen, die sehr schwierig ist, sich auf sehr leichte Weise haben machen lassen.“ (Hier ist die Compositio formarum gemeint).

S. 75ff. Zum Beweise des Fermatschen Satzes.

Weiter finden sich noch Ausführungen zu den Bernoullischen Zahlen, zum allgemeinen Reziprozitätsgesetz und zur Idealtheorie.

Den Schluß bildet ein Brief Kroneckers an Kummer, in welchem des ersteren, „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“ Kummer zum Doktorjubiläum gewidmet werden.

Die Festschrift bildet nicht nur eine recht lehrreiche Auseinandersetzung der Probleme, die den Riesengeist Kummers beschäftigten, sondern es scheinen auch in den Briefen noch Schätze verborgen zu sein, die lohnender Hebung harren.

Berlin. ALBERT FLECK.

Kurt Hensel. Ernst Eduard Kummer und der große Fermatsche Satz. Marburger akademische Reden. 22 S. Marburg 1910, Elwert.

Rede zu Kaisers Geburtstag, in welcher sich der Vortragende in allgemein verständlicher Weise über die Art verbreitet, wie Kummer zu den Idealzahlen kam. S. die vorstehende Besprechung.

Berlin. ALBERT FLECK.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

358. Man projiziert irgend einen Punkt M einer Ellipse auf die Hauptachse OA in P; der Punkt P wird in Q auf die Gerade OM projiziert. Man bestimme den Flächeninhalt der Kurve (Q).

Lüttich. J. Neuberg.

359. Die „absolute Invariante" zweier projektiven geraden Punktreihen, deren Träger g und g' zusammenfallen, ist bekanntlich das Doppelverhältnis, gebildet aus den beiden Doppelpunkten der projektiven Beziehung und einem Paar entsprechender Punkte. Welchem Gesetz gehorcht diese absolute Invariante, wenn der eine Träger g auf dem andern g' verschoben wird?

Schöneberg. Willy Weber.

360. Welches ist die Enveloppe derjenigen Geraden g, deren Schnittpunkte (A, B, C) mit den entsprechenden Seiten (BC, bzw. CA, bzw. AB) des Dreiecks ABC, die Mittelpunkte von Kreisen sind, welche durch die entsprechenden Ecken (A, bzw. B, bzw. C) und durch zwei Punkte (O und O') hindurchgehen?

Bern. O. Schenker.

361. Die nicht gemeinsamen Wendepunkte des durch die Gleichung

$$C(t) \equiv x(a^2 + t^2 y^2) - 2a^2 ty = 0$$

gegebenen Systems von Kurven 3. Ordnung liegen auf zwei Parallelen zur gemeinsamen Asymptote und die zugehörigen Wendetangenten gehen durch zwei feste Punkte hindurch.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

362. Die im Endlichen gelegenen Wendepunkte des durch die Gleichung

$$C(t) \equiv (2a - x) t^2 y^2 - a^2 x = 0$$

gegebenen Systems von Kurven 3. Ordnung liegen auf einer Parallelen zur gemeinsamen Asymptote und die zugehörigen Wendetangenten gehen durch einen festen Punkt hindurch. Das System senkrechter Trajektorien wird von divergierenden Parabeln 3. Ordnung gebildet, deren Verlauf angegeben werden soll.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Digitized by Google

363. Genügen die von einer Ecke eines vollständigen Vierseits ausgehenden Seiten b_1, b_2, b_3 der Bedingung, daß sie sich, ohne die Richtung zu ändern, zu einem Dreieck zusammensetzen lassen, dann sind sie mit den drei anderen Seiten a_1, a_2, a_3 durch die beiden Relationen verbunden:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 = 9\,(b_1^4 + b_2^4 + b_3^4).$$

Wie lauten diese Relationen im allgemeinen Falle?

Berlin. E. JAHNKE.

364. Gesucht eine rationale Parameterdarstellung, Gestalt, Fläche und Umfang der Evolute der Fußpunktkurve der Lemniskate (vgl. Tisserand, Recueil complémentaire d'exercices pour le calcul infinitésimal, p. 148. Red.).

Bierstadt. L. BRAUDE.

365. Welche Kurve ist ihren sämtlichen Parallelkurven kongruent?

Bierstadt. L. BRAUDE.

366. In der Dissertation von Archibald „The Cardioid and some of its related curves", Straßburg 1900, findet sich der Satz, daß die durch konstante Teilung des Krümmungsradius der Kardioide entstehenden Kurven, d. h. ihre Zwischenevoluten Pascalsche Schnecken sind. Dieser Satz soll verallgemeinert werden!

Bierstadt. L. BRAUDE.

B. Lösungen.

Zu **318** (Bd. XVI, S. 251) (H. Wieleitner). — Von einem Punkte A aus gehe ein Geschoß in geradliniger Richtung nach C. Ein Beobachter befindet sich in B, so daß $BA = c$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ ist. Die Geschwindigkeit des Geschosses (in der Sekunde) sei v, die des Schalles $v'(v = kv')$. Unter gewissen Bedingungen ist es nun möglich, daß der Beobachter das Pfeifen des Geschosses nicht von A aus zuerst hört, sondern von einem Punkt X auf AC aus. Der Beobachter hat dann den Eindruck, als ob das Geschoß von X aus in zwei Teilen nach A bzw. C ginge. Es sollen die hierzu nötigen Bedingungen und die Lage des Punktes X bestimmt werden ($\sphericalangle BXC = \omega$).

Lösung. Setzt man $AX = x$, $XB = y$, so erreicht der Schall von X aus den Punkt B in $\left(\frac{x}{v} + \frac{y}{v'}\right)$ Sekunden nach Abgang des Geschosses von A, der Punkt X ist daher so zu bestimmen, daß diese Zeit ein Minimum wird. Aus $\triangle ABX$ folgt $x = \frac{c \sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}$, $y = \frac{c \sin \alpha}{\sin \omega}$, es ist somit die Funktion

$$\Omega \equiv \frac{\sin(\omega - \alpha)}{k \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} = \text{Min.}$$

zu machen; dies gibt:

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{\sin \alpha}{k} \cdot \frac{1 - k \cos \omega}{\sin^2 \omega} = 0, \qquad \cos \omega = \frac{1}{k}.$$

Digitized by Google

Auf alle Fälle muß $k > 1$ sein, damit *analytisch* ein Extremum eintritt; da aber die Aufgabe *physikalisch* nur einen Sinn für $\omega > \alpha$ hat, so muß $\frac{1}{k} < \cos\alpha$, $k > \frac{1}{\cos\alpha}$ sein, und da k positiv ist, so folgt, daß $\cos\omega > 0$, somit $\omega < \frac{\pi}{2}$ ist und folglich die Aufgabe nur für spitze α einen Sinn hat (indem $\alpha > \pi$ von vornherein ausgeschlossen werden kann). Bildet man

$$\frac{d^2\Omega}{d\omega^2} = \frac{\sin\alpha}{k} \cdot \frac{k - 2\cos\omega + k\cos^2\omega}{\sin^3\omega} = \frac{k\sin\alpha}{\sqrt{k^2-1}} > 0,$$

für $\cos\omega = \frac{1}{k}$, so sieht man, daß tatsächlich ein Minimum eintritt; für den Minimalwert selbst ergibt sich $\frac{x}{v} + \frac{y}{v'} = \frac{c}{v'}\cos(\alpha - \omega)$.

Man bekommt somit folgendes Resultat: Fliegt ein Geschoß geradlinig von A nach C mit der Sekundengeschwindigkeit kv' (v' die Schallgeschwindigkeit) und befindet sich in einem Punkt B, der so liegt, daß der Fußpunkt D des Lotes von B auf AC zwischen A und C liegt, ein Beobachter, so hört dieser das Pfeifen zuerst von A her nach $\frac{c}{v'}$ Sekunden, solange $k \leqq \frac{1}{\cos\alpha}$ ist. Ist aber $k > \frac{1}{\cos\alpha}$, so kommt das Pfeifen zuerst von einem Punkt X zwischen A und D her, für den $\cos BXC = \cos\omega = \frac{1}{k}$ ist, u. zwar nach $\frac{c}{v'}\cos(\alpha - \omega)$ Sekunden; je größer die Geschwindigkeit des Geschosses ist, um so näher liegt X an D.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Ähnliche Lösung von den Herren H. Schürmann, W. Stegemann (Prenzlau) und stud. math. Alfred Basch (Dresden).

Zu **323** (Bd. XVI, S. 358) (Wilhelm Blaschke). — Zwei Punkte p und q durchlaufen zwei doppelt gekrümmte Kurven C_p und C_q unabhängig voneinander, die Symmetrieebene ε von p und q umhüllt dann (im allgemeinen) eine Fläche Φ. Um den Berührungspunkt m von ε mit Φ zu konstruieren, kann man (wieder nur im allgemeinen) so verfahren: Man errichte in p die Normalebene auf C_p und in q diejenige auf C_q, der gemeinsame Schnittpunkt dieser beiden Ebenen mit ε ist der gesuchte Punkt m.

Beweis. Es sei $p \equiv (x_p, y_p, z_p)$, $q \equiv (x_q, y_q, z_q)$, und die Raumkurve C_p sei durch einen Parameter s, C_q durch einen solchen t bestimmt, dann haben die Normalebenen von C_p in p und C_q in q die bezüglichen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} (\xi - x_p)x_p' + (\eta - y_p)y_p' + (\zeta - z_p)z_p' = 0, \\ (\xi - x_q)x_q' + (\eta - y_q)y_q' + (\zeta - z_q)z_q' = 0, \end{cases}$$

wo $x_p' = \frac{\partial x_p}{\partial s}, \cdots, x_q' = \frac{\partial x_q}{\partial t}, \cdots$ gesetzt ist. Der Mittellotebene ε von p und q kommt die Gleichung zu:

$$(2) \quad \left(\xi - \frac{x_p + x_q}{2}\right)(x_p - x_q) + \left(\eta - \frac{y_p + y_q}{2}\right)(y_p - y_q) + \left(\zeta - \frac{z_p + z_q}{2}\right)(z_p - z_q) = 0,$$

Digitized by Google

und da sie zwei unabhängige Parameter enthält, umhüllt ε im allgemeinen[1]) eine Fläche (keine abwickelbare Regelfläche). Der Berührungspunkt von ε mit Φ muß auch dem Differential von (2) genügen, d. h. der Gleichung

$$(3)\qquad \begin{cases} (x_p' \xi + y_p' \eta + z_p' \zeta - x_p x_p' - y_p y_p' - z_p z_p')\, ds \\ -(x_q' \xi + y_q' \eta + z_q' \zeta - x_q x_q' - y_q y_q' - z_q z_q')\, dt = 0; \end{cases}$$

da aber ds und dt voneinander unabhängig sind, müssen für die Koordinaten von m die Klammerausdrücke in (3) einzeln verschwinden. Diese sind aber nach (1) die Gleichungen der Normalebenen in p und q, denen somit der Berührungspunkt auch angehört, womit der Satz bewiesen ist.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Zu 327 (Bd. XVII, S. 247) (E. Jahnke). — Zu beweisen, daß zwischen den Nullwerten der zweiten Ableitungen der elliptischen Thetas die Relation besteht:

$$c^3 c''^2 + c_2^3 c_2''^2 - c_3^3 c_3''^2 = c^4 c_2^4 c_3^4.$$

Beweis: Von der bekannten Relation $c^4 + c_2^4 - c_3^4 = 0$ zwischen den Nullwerten der elliptischen Thetas bilde man bezüglich q die Ableitung. Dies liefert $c^3 \frac{\partial c}{\partial q} + c_2^3 \frac{\partial c_2}{\partial q} - c_3^3 \frac{\partial c_3}{\partial q} = 0$. Da nun die Thetafunktionen und ihre Ableitungen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 4q \frac{\partial \vartheta}{\partial q} = 0$ genügen, so läßt sich die letzte Relation umformen in $c^3 c'' + c_2^3 c_2'' - c_3^3 c_3'' = 0$.[2]) Von dieser Gleichung nehme man wieder bezüglich q die Ableitung und wende die Differentialgleichung an, man erhält alsdann:

$$(1)\qquad c^3 c^{IV} + 3c^2 c''^2 + c_2^3 c_2^{IV} + 3c_2^2 c_2''^2 - c_3^3 c_3^{IV} - 3c_3^2 c_3''^2 = 0.$$

Zwischen den Nullwerten der vierten und zweiten Ableitungen der Thetas bestehen indessen die Relationen

$$(2)\qquad \begin{cases} c^3 c^{IV} - 3c^2 c''^2 = -2c^4 c_2^4 c_3^4, \quad c_2^3 c_2^{IV} - 3c_2^2 c_2''^2 = -2c^4 c_2^4 c_3^4, \\ c_3^3 c_3^{IV} - 3c_3^2 c_3''^2 = +2c^4 c_2^4 c_3^4; \end{cases}$$

eliminiert man mit ihrer Hilfe die vierten Ableitungen, so erhält man sofort die gewünschte Relation $c^2 c''^2 + c_2^2 c_2''^2 - c_3^2 c_3''^2 = c^4 c_2^4 c_3^4$.

Zusatz: Eliminiert man dagegen aus (1) mit Hilfe von (2) die zweiten Ableitungen, so erhält man folgende andere Relation:

$$c^3 c^{IV} + c_2^3 c_2^{IV} - c_3^3 c_3^{IV} = -3c^4 c_2^4 c_3^4.$$

Berlin. A. Baruch.

---

1) Es tritt keine Enveloppenbildung ein, wenn die Ebene ε stets dieselbe Stellung behält, also z. B. $x_q = x_p + \varphi(t) \cos \alpha$, ... ist.

2) Vgl. die Lösung zu Aufgabe 298 (E. Jahnke) in Bd. XVII, S. 260—262 des Archivs.

Digitized by Google

Zu 331 (Bd. XVII, S. 248) (G. Kober). — Derjenige Durchmesser eines Kegelschnittes, der die Normale eines seiner Punkte im Krümmungsmittelpunkt schneidet, enthält den Punkt L_i, in welchem das auf der Tangente PT_i in ihrer Spur T_i errichtete Lot das vom Berührungspunkte P auf die Achse OT_i gefällte Lot schneidet. Die Konstruktion ist allgemein; sie gilt für jeden Kegelschnitt ohne jede Modifikation.

Erster Beweis. Sind t, n die Tangente und Normale in P und a, b die Achsen des Kegelschnitts, so ist der ausgesprochene Satz wegen $t \perp n$ und $a \perp b$ eine Folgerung aus dem bekannten (Steinerschen) Satz: Die durch die Achsen eines Kegelschnitts, sowie Tangente und Normale eines Punktes bestimmte Parabel berührt die Normale im Krümmungsmittelpunkt. (Vgl. Reye, Die Geometrie der Lage, 1. Abteilung 4. Aufl., Leipzig 1899, S. 192.) Denn ist T_a der Schnittpunkt von t mit a und T_b derjenige mit b, so braucht man zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes im ersten Fall nur das folgende Brianchonsche Sechsseit zu numerieren: $n \equiv$ I und II, $t \equiv$ III, $a \equiv$ IV, $b \equiv$ V, $g_\infty \equiv$ VI, und im zweiten Fall: $n \equiv$ I und II, $t \equiv$ III, $b \equiv$ IV, $a \equiv$ V, $g_\infty \equiv$ VI, um den Satz zu erweisen. Die erste Konstruktion gilt ungeändert auch für die Parabel, L ist jedesmal der Brianchonsche Punkt.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Zweiter Beweis. Auf die Tangente $n = 0$ und die Normale $t = 0$ bezogen, sind $\frac{t}{t_1} - \frac{n}{n_1} - 1 = 0$ und $\frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} + 1 = 0$ die Achsen $N_i T_i$ des Kegelschnitts, folglich $\frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} = 0$ und $\frac{t}{t_1} - \frac{n}{n_1} = 0$ die von $P(0,0)$ auf OT_i gefällten Lote PL_i, dagegen $t = +t_1$ und $t = -t_2$ die in T_i auf PT_i errichteten Lote $T_i L_i$; die beiden Punkte $(T_i L_i, PL_i) = L_i$ sind also $\left(t = +t_1, n = -\frac{t_1}{t_2} n_2\right)$ und $\left(t = -t_2, n = -\frac{t_2}{t_1} n_1\right)$. Ihre Verbindungslinie

$$\left(\frac{t_1}{t_2} n_2 - \frac{t_2}{t_1} n_1\right) t + (t_2 + t_1)\, n + (t_2 n_1 + t_1 n_2) = 0$$

ist ein Durchmesser:

$$t_1 n_2 \left(\frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} + 1\right) - t_2 n_1 \left(\frac{t}{t_1} - \frac{n}{n_1} - 1\right) = 0.$$

Sie hat auf der Normale $t = 0$ dieselbe Spur wie die Verbindungslinie der beiden Punkte $Q_1(t_1, -n_1)$ und $Q_2(-t_2, -n_2)$. Dieser Punkt $\left(t = 0, n = -\frac{t_2 n_1 + t_1 n_2}{t_2 + t_1}\right)$ ist aber nach Aufgabe 316 der Krümmungsmittelpunkt des Punktes $P(0,0)$.

Holzminden. G. Kober.

Digitized by Google

2. Kleinere Notizen.

Über einige Nullrelationen zwischen den elliptischen Thetafunktionen.

Vor kurzem habe ich[1]) eine Reihe von Relationen aufgestellt, die zwischen den Nullwerten der elliptischen Thetas und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung bestehen. Im nachstehenden erlaube ich mir noch einige Formeln nachzutragen, die mir einfach genug scheinen und deshalb verdienen hier mitgeteilt zu werden.

Zunächst einige algebraische Relationen zwischen den Nullwerten c, c_2, c_3 der elliptischen Thetas. Ich gehe aus von der Pascalschen Formel[2])

$$c^8 + c_2^8 + c_3^8 = 2c_2^4c_3^4 + 2c^4c_3^4 - 2c^4c_2^4 \tag{1}$$

und erhebe beide Seiten ins Quadrat. Da bekanntlich

$$c_3^4 = c^4 + c_2^4 \tag{2}$$

ist, so erhalte ich

$$\text{I.} \qquad c^{16} + c_2^{16} + c_3^{16} = 2c_2^8c_3^8 + 2c^8c_3^8 + 2c^8c_2^8.$$

Aus dieser Formel und (1) folgt weiter

$$\text{II.} \qquad (c^8 + c_2^8 + c_3^8)^2 = 2(c^{16} + c_2^{16} + c_3^{16})$$

und hieraus wieder

$$\text{III.} \qquad (c^8 + c_2^8 + c_3^8)^3 = 4(c^{24} + c_2^{24} + c_3^{24}) - 12c^8c_2^8c_3^8.$$

Von ähnlichen Relationen erwähne ich noch drei:

$$\text{IV.} \qquad 3(c^8 + c_2^8 + c_3^8) = (c_2^4 + c_3^4)^2 + (c^4 + c_3^4)^2 + (c_2^4 - c^4)^2$$

$$\text{V.} \qquad 3(c_2^4 + c_3^4)(c^4 + c_3^4)(c_2^4 - c^4) = (c_2^4 + c_3^4)^3 - (c^4 + c_3^4)^3 - (c_2^4 - c^4)^3$$

$$\text{VI.} \qquad 9(c^{16} + c_2^{16} + c_3^{16}) = (c_2^4 + c_3^4)^4 + (c^4 + c_3^4)^4 + (c_2^4 - c^4)^4,$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt.

Nunmehr will ich noch einige Differentialrelationen ableiten. Ich benutze die bekannten Relationen

$$\frac{c''}{c} + \frac{c_2''}{c_2} + \frac{c_3''}{c_3} = \frac{c_1'''}{c_1'} \tag{3}$$

und

$$\frac{c^{IV}}{c} - 3\frac{c''^2}{c^2} = -2c_2^4c_3^4, \quad \frac{c_2^{IV}}{c_2} - 3\frac{c_2''^2}{c_2^2} = -2c^4c_3^4, \quad \frac{c_3^{IV}}{c_3} - 3\frac{c_3''^2}{c_3^2} = 2c^4c_2^4, \tag{4}$$

sowie die von Pascal[2]) aufgestellte:

$$-3\frac{c_1^V}{c_1'} + 5\frac{c_1'''^2}{c_1'^2} = c^8 + c_2^8 + c_3^8. \tag{5}$$

Ich bilde in (3) die Ableitung nach dem Modul q und berücksichtige die Differentialgleichung für die Thetafunktionen:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + 4q\frac{\partial\vartheta}{\partial q} = 0. \tag{6}$$

---

1) Über einige Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen eines Arguments. Inaug. Diss. Halle 1910.

2) Ann. di mat. (2) 24, 1896.

Digitized by Google

Dies liefert die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{c^{IV}}{c} + \frac{c_2^{IV}}{c_2} + \frac{c_3^{IV}}{c_3} - \left(\frac{c''^2}{c^2} + \frac{c_2''^2}{c_2^2} + \frac{c_3''^2}{c_3^2}\right) = \frac{c_1^{V}}{c_1'} - \frac{c_1'''^2}{c_1'^2}.$$

Andrerseits ergibt die Addition der Relationen (4):

$$(8) \qquad \frac{c^{IV}}{c} + \frac{c_2^{IV}}{c_2} + \frac{c_3^{IV}}{c_3} - 3\left(\frac{c''^2}{c^2} + \frac{c_2''^2}{c_2^2} + \frac{c_3''^2}{c_3^2}\right) = -(c^8 + c_2^8 + c_3^8).$$

Aus diesen beiden Gleichungen gehen nun unter Beachtung von (5) folgende Relationen hervor:

VII. $$\frac{c^{IV}}{c} + \frac{c_2^{IV}}{c_2} + \frac{c_3^{IV}}{c_3} = \frac{c_1'''^2}{c_1'^2}$$

VIII. $$\frac{c''^2}{c^2} + \frac{c_2''^2}{c_2^2} + \frac{c_3''^2}{c_3^2} = -\frac{c_1^{V}}{c_1'} + 2\frac{c_1'''^2}{c_1'^2},$$

von denen die erste eine bemerkenswerte Analogie zu (3) aufweist. Erhebt man (3) ins Quadrat, so folgt weiter

IX. $$2\left(\frac{c''}{c}\frac{c_2''}{c_2} + \frac{c_2''}{c_2}\frac{c_3''}{c_3} + \frac{c_3''}{c_3}\frac{c''}{c}\right) = \frac{c_1^{V}}{c_1'} - \frac{c_1'''^2}{c_1'^2}.$$

Von den vielen Relationen, die man auf analoge Weise herleiten könnte, will ich noch die folgenden erwähnen, ohne jedoch auf den Beweis einzugehen:

X. $$8\left(\frac{c^{VI}}{c} + \frac{c_2^{VI}}{c_2} + \frac{c_3^{VI}}{c_3}\right) = -3\frac{c_1^{VII}}{c_1'} + 21\frac{c_1^{V}}{c_1'}\frac{c_1'''}{c_1'} - 10\frac{c_1'''^3}{c_1'^3}$$

XI. $$8\left(\frac{c''^3}{c^3} + \frac{c_2''^3}{c_2^3} + \frac{c_3''^3}{c_3^3}\right) = \frac{c_1^{VII}}{c_1'} - 15\frac{c_1^{V}}{c_1'}\frac{c_1'''}{c_1'} + 22\frac{c_1'''^3}{c_1'^3}$$

XII. $$24\frac{c''}{c}\cdot\frac{c_2''}{c_2}\cdot\frac{c_3''}{c_3} = \frac{c_1^{VII}}{c_1'} - 3\frac{c_1^{V}}{c_1'}\frac{c_1'''}{c_1'} + 2\frac{c_1'''^3}{c_1'^3}.$$

Berlin, im Februar 1911. Alfred Baruch.

On a certain class of surfaces, the volumes of the solids bounded by which can be found by the prismoidal formula.

It is well known that the volumes of the so-called gerade and windschiefe prismoids (or prismatoids) can be found by means of the prismoidal formula (cf. my note "On the prismoidal formula", Archiv der Math. u. Physik, 3 te Reihe, XVI, S. 267—269). The lateral faces of these solids are ruled surfaces, the both ends being parallel planes; or otherwise, the lateral faces are the surfaces which may be considered as limits of ruled surfaces. But the lateral faces of the solids whose volumes can be found by the prismoidal formula would not necessarily be ruled surfaces of their limits. By what sort of surfaces in general are the solids bounded? This question would be interesting in some respects. To solve this question, we are to find the surface, the area of whose plane-section is any given quadratic function of the distance of the plane-section from a particular plane-section. The determination of the general equation

Digitized by Google

to such surfaces would be difficult. But we can find some particular ones without so much difficulty.

Let the equation to a surface in rectangular coordinates be $z = f(x, y)$, and the section by the xy coordinate plane be the particular plane-section from which the distance of any other plane-section is measured, so that the distance may be denoted by z itself.

Let $z = c$; then the projection of the corresponding plane-section on the xy plane is of course $f(x, y) = c$. Using polar coordinates, this becomes $f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) = c$. Transform this equation into $\varrho^2 = \varphi(c, \vartheta)$. Then the area of the plane-section is

$$\int_a^b \varrho^2 d\vartheta \quad \text{or} \quad \int_a^b \varphi(c, \vartheta) d\vartheta,$$

where a and b are some functions of c in general. For the surface under consideration, this integral must be a quadratic function of c. Denote this function by $F(c)$. Then we are to solve the functional equation

$$\int_a^b \varphi(c, \vartheta) d\vartheta = F(c), \tag{1}$$

$F(c)$ being given function and $\varphi(c, \vartheta)$ being the function to be determined. Thus the problem may be regarded as the inverse problem of the solution of the integral equation of the first kind.

Assume for example that the curve $\varrho^2 = \varphi(c, \vartheta)$ is such one that a, b are both independent of c. In this case put

$$\xi = \tan\frac{\theta - a}{b - a} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Then we have

$$\int_0^\infty \frac{\pi}{2(b-a)} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \varphi(c, \theta) d\xi = F(c), \tag{2}$$

G. Oltramare solved in his "Calcul de Généralisation", p. 117—118, 1899[1]), the three cases of such equations, namely

$$\int_0^\infty e^{-p\xi} \psi(c - q\xi) d\xi = F(c), \tag{I}$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\xi^2} \psi(c + q\xi) d\xi = F(c), \tag{II}$$

$$\int_0^\infty e^{-a\xi^m} \psi(c - b^m\xi) \xi^k d\xi = F(c), \tag{III}$$

where $F(c)$ is a given function and ψ is the function to be determined.

---

1) The calcul of Oltramare is quite symbolic; so it is deficient in rigor. Mr. K. Ogura has recently tried to give rigor to some points of the calcul (see Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society, 2nd series, Vol. V, p. 360—370).

Digitized by Google

Using his solution of the first case,

$$\psi(\xi) = pF(\xi) + qF'(\xi),$$

we get

$$\frac{\pi}{2(b-a)} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \varphi(c, \vartheta) = e^{-p\xi} \psi(c - q\xi)$$
$$= e^{-p\xi} \cdot \{pF(c - q\xi) + qF'(c - q\xi)\}.$$

Hence we have as the equation to the required surface

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = \varphi(c, \vartheta) = \frac{2(b-a)}{\pi} \sec^2\left(\frac{\theta - a}{b - a} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{p \tan\left(\frac{\theta - a}{b - a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\times \left\{pF\left(c - q \tan\left(\frac{\theta - a}{b - a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) + qF'\left(c - q \tan\left(\frac{\theta - a}{b - a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)\right\}$$

where $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

Next put for example in (1)

$$a = 0, \quad b = 2\pi, \quad \xi = -\log\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right).$$

Then we have, instead of (2),

$$\int_0^\infty 2\pi e^{-\xi} \varphi\{c,\ 2\pi(1 - e^{-\xi})\}\, d\xi = F(e).$$

Hence applying Oltramare's solution of his first case, we get

$$2\pi e^{-\xi} \varphi\{c,\ 2\pi(1 - e^{-\xi})\} = e^{-p\xi} \psi(c = q\xi)$$
$$= e^{-p\xi} \{pF(c - q\xi) + qF'(c - q\xi)\}.$$

Hence one of the required surfaces is

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = \varphi(c, \vartheta) = \frac{\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^{p-1}}{2\pi} \left\{pF\left(c + q \log\left(1 - \frac{\vartheta}{2\pi}\right)\right)\right.$$
$$\left. + qF'\left(c + q \log\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)\right)\right\}$$

where $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

Similarly we can use Oltramare's solutions of his other two cases to determine the required surfaces.

It must be noticed that the above method may be equally applied for any given arbitrary form of the function $F(c)$.

Tokyo, Januar 7, 1911. T. Hayashi.

Bemerkung zu dem Aufsatze „Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen von Fr. Nölke in Bremen“ in 17, 128–134.

Die in dem betr. Aufsatze angegebene Zerlegung der störenden Kraft hat schon Encke ausgeführt, und die hieraus sich ergebenden Störungsgleichungen hat Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1837 veröffentlicht.

Digitized by Google

Ich selbst habe diese Störungsgleichungen angewandt in meiner Inauguraldissertation „Über die von Gyldén vorgeschlagene Methode bei der Bahnbestimmung des Mondes die Abweichung der Erde von der Kugel für astronomische Zwecke hinreichend genau in Rechnung zu ziehen. Halle 1889".

Stettin. ERNST SCHULTZ.

Entgegnung auf die Notiz des Herrn E. Schultz zu meinem Aufsatze: „Elementare Herleitung der astronomischen Störungsgleichungen" in 17, 128—134 von Fr. Nölke.

Herr Schultz verkennt gänzlich den Zweck der Arbeit. Die von mir benutzten Komponenten der störenden Kraft und die hergeleiteten Störungsgleichungen waren schon lange vor Encke bekannt und sind in allen astronomischen Lehrbüchern zu finden. Es kommt nur darauf an, ob die *Methode der Herleitung* der Gleichungen neu ist oder nicht. Die von Encke in der zitierten Abhandlung benutzte Methode ist, mit unwesentlichen Abweichungen, die in fast allen Lehrbüchern angewandte, auf der *Variation der Bahnelemente* beruhende Lagrangesche Methode. Das Neue der von mir benutzten Methode besteht darin, daß nicht die Bahnelemente, sondern die *Integrationskonstanten* als variabel gedacht werden. Ihre Änderungen lassen sich, wie die Abhandlung zeigt, sehr leicht durch die Komponenten der störenden Kraft ausdrücken. Da die Bahnelemente Funktionen der Integrationskonstanten sind, so findet man dann auch sehr einfach die Änderungen der Bahnelemente selbst. Bei dieser Methode vereinfacht sich die Rechnung dadurch ganz bedeutend, daß die Störungsgleichungen für die einzelnen Elemente *nacheinander* gefunden werden, während sie sich bei der Lagrangeschen Methode *gleichzeitig* durch Auflösung eines Gleichungssystems ergeben, wobei eine Reihe ziemlich umständlicher, für die Bestimmung der Koeffizienten erforderlicher Rechnungen durchzuführen sind.

Auch die *allgemeinen* Störungsgleichungen, in denen die störende Kraft als Funktion der Bahnelemente und der Zeit auftritt, lassen sich mit Hilfe der benutzten Methode finden.

Bremen. FR. NÖLKE.

---

3. Sprechsaal.

Vermeintliche Beweise des Fermatschen Satzes.

100. Johannes Hofmann, Seminarlehrer: Ein Nachweis der Richtigkeit des Fermatschen Satzes im Anschluß an die Schrift K. Heim, „Das Weltbild der Zukunft". Leipzig 1909. 50 Seiten.

Im Gegensatz zur „Einheitslogik" führt Heim eine „Verhältnislogik" ein, ist aber damit „krassem Mißverstehen" ausgesetzt gewesen. Wie man mit dem Ausdruck a priori die Denkkategorien bezeichnet, die die Erfahrung erst möglich machen, so gibt es nach Heim ein zweites a priori, welches die Denkfunktionen selbst erst möglich macht, und zwar besteht dieses in undefinierbaren Unterscheidungen, die wir machen. Außer dieser Voraussetzung alles Denkens gibt es nur noch einen großen unbekannten Grundbegriff X. Genauer können wir hier nicht darauf eingehen. Auch die Besonderheiten der

Digitized by Google

Heimschen Raumtheorie und der dritte Abschnitt „Einheitsgeometrie oder Verhältnisgeometrie?“ müssen unerörtert bleiben. Es folgt die Anwendung der Heimschen Raumtheorie auf arithmetische Probleme. Hier kommt Verf. S. 43 auf die Potenzen zu sprechen und schließlich S. 45 auf den Fermatschen Satz. Hier genügt es, da Verfasser eine Lösung für unsinnig hält, die Schlußsätze einfach zu zitieren: „Noch kann man einwenden: Es könnte doch sein, daß bei irgendeinem Wert m, der größer als 2 ist, die zu untersuchende Gleichung erfüllbar wäre. Gewiß, aber es hat von unserem Standpunkt aus keinen Sinn mehr, nach derartigen Fällen zu suchen; denn wissenschaftliche Probleme werden zu Scheinproblemen, sobald unwiderleglich gezeigt worden ist, daß sie nicht der Logik der Tatsachen, sondern einer falschen formalen Logik entstammen. So interessiert den Verhältnislogiker schließlich nur die Problemlosigkeit des mit dem Preisausschreiben aufgestellten Problems.“

Ach wenn doch viele „Fermatlöser“ sich diesen Standpunkt zu eigen machen wollten!

101. Ernst Sasse, „Beweis“ auf 15 Zeilen (s. auch Nr. **49**). Berlin 1909. Dez.

Zeigt lediglich an einigen Zahlenbeispielen, daß $x^n + (x+1)^n$ schließlich größer als $(x+2)^n$ wird, und schließt daraus, daß allgemein $x^n + y^n = z^n$ unmöglich. Weder das erstere ist bewiesen, noch braucht die Fermatsche Gleichung nur Wurzeln zu haben, die sich um 1 unterscheiden. Könnte nicht z. B. $x^n + (x+5)^n = (x+6)^n$ sein oder dergl.?

102. Ferdinand Nottebohm (Stand unbekannt). Dresden 1910. Apr. 8. 3. Seiten.

In III. gibt Verfasser z als größten gemeinsamen Teiler von a und b an, in IV. jedoch z auch als größten gemeinsamen Teiler von g und $a+b$. Beide z brauchen nicht dieselben zu sein. Beispiel: $a=8$, $b=28$, $g=60$. a und b haben 4 gemeinsam, $a+b$ und g aber außer der 4 noch die 3, also 12. Da Verfasser das vergißt, so kommt er zu folgendem Gedankengang: $\frac{a+b}{z}$ und $\left(\frac{g}{z}\right)^m$ sind teilerfremd. $\frac{a+b}{z}$ ist in $\left(\frac{a}{z}\right)^m + \left(\frac{b}{z}\right)^m$ enthalten, also kann nicht sein $\left(\frac{g}{z}\right)^m = \left(\frac{a}{z}\right)^m + \left(\frac{b}{z}\right)^m$, also auch nicht $g^m = a^m + b^m$. (m ungerade.)

103. O. Heck. Selters 1909. Juli 26. 16 S.

Die Ausführungen des Verfassers müssen auch den wohlwollendsten Leser in gelinde Wut versetzen. Zunächst wird mittels der Cardanischen Formel bewiesen, daß $(y+b)^3 - y^3 = (y-b)^3$ keine ganzzahligen Lösungen hat. Dann geht's zur Gleichung $(y+b+d)^3 - y^3 = (y-b)^3$ über. Von beiden Gleichungen werden die „dritten Differenzen“ 6 genommen (soll heißen: es wird der auf 0 gebrachte Ausdruck in beiden Gleichungen als allgemeines Glied einer arithmetischen Reihe dritter Ordnung betrachtet), und nun heißt es wörtlich: „Da für die Gleichung $(y+b+d)^3 - y^3 = (y-b)^3$ in demselben Sinne die dritten Differenzen ebenfalls auf die Zahlen 6,6 usw. führen und der spezielle Fall $(y+b)^3 - y^3 = (y-b)^3$ nicht in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, so ist auch die Gleichung $(y+b+d)^3 - y^3 = (y-b)^3$ nicht in ganzen Zahlen ausdrückbar“ ..... „so ersetzt die Methode der Differenzreihen in diesem Sinne

Digitized by Google

die unbrauchbare imaginäre Form des bekannten „casus irreducibilis“ für die Gleichung $(y+b+d)^3 - y^3 = (y-b)^3$.“

Sogar das Papier verdient eine Anklage, das sich derartigen blühenden Unsinn gefallen läßt, der übrigens in weiteren 8 Seiten zu den höheren Potenzen hinaufgeführt wird. Es scheint übrigens dem Verfasser unbekannt zu sein, daß von *jeder* ganzen rationalen Funktion dritten Grades mit dem höchsten Glied y^3 die dritte Differenzreihe das konstante Glied 6 ist, daß also die obige Folgerung auf jede Funktion dieser Art ausgedehnt werden könnte, was ergäbe, daß diese Funktionen überhaupt keine rationale Zahl mehr darstellen könnten!

104. Benno Lind, Über das letzte Fermatsche Theorem. Abhdlgn. z. Gesch. d. math. Wissenschaften, s. auch Nr. **51.** Leipzig 1910, Teubner. Heft $XXVII_2$ S. 21—65.

Herr Lind läßt durch einige Zuschriften erkennen, daß er mit meiner Besprechung seiner umfangreichen Arbeit nicht einverstanden ist. Er gibt allerdings den Hauptfehler zu, nämlich, daß Kongruenz (27) falsch ist, ebenso (28) bis (31), (34), $(95_{1,2})$, (106b). Aber Herr L. behauptet, daß das seinem Beweise keinen Eintrag tue, den er nach wie vor für richtig hält. Ich muß daher die noch übrigen zurzeit gefundenen, aber in meiner Besprechung der Kürze wegen nur angedeuteten Fehler doch noch ausführlicher als solche begründen, um Herrn L. seine Ruhe wiederzugeben.

I. Herr L. sagt, ich behaupte ohne Beweis, die Kongruenz $a^n \equiv a \pmod 3$ bestände nicht stets. — Antwort: Diese Kongruenz (25) ist richtig. Ich sagte das ausdrücklich sub I „sind die Gleichungen (19) bis (26) richtig, aber längst bekannt.“

II. Was an dem Beweis von (35) falsch ist, hätte ich nicht gezeigt. Herr L. bezeichnet den Beweis auch jetzt noch als richtig. (Ich hatte den Satz als richtig, aber den Beweis als falsch bezeichnet.) Herr L. schließt so: $y - x = b^n - a^n$. „Der Mindestwert von a ist 1, der von $b > a$ ist 2. Es wäre bei kleinstem a und b demnach $y - x = 2^n - 1$“, *also* bei anderen a und b $y - x > 2^n - 1$! Es spricht sehr zuungunsten des Herrn L., daß er trotz meines Hinweises auf das Fehlerhafte derartiges nicht findet. Ich muß also deutlicher sein. Wenn der Minimalwert von a resp. b 1 resp. 2 ist, so ist sicher $a^n = 1 + \delta$, $b^n = 2^n + \varepsilon$, wo δ und $\varepsilon \geqq 0$ sind, also ist $y - x = 2^n - 1 + (\varepsilon - \delta)$, und es *fehlt* hier nur der Beweis, daß $\varepsilon - \delta \geqq 0$, denn *nur dann* kann man zu dem Schluß gelangen: $y - x \geqq 2^n - 1$. Der Fehler liegt also darin, daß die *Differenz zweier Minimalwerte* wieder ohne weiteres als *Minimalwert der Differenz* angesehen wird!

III. Herr L. sagt über seinen „Nachtrag“ wörtlich: „Denn für jede der beiden Gleichungen $(3\alpha_1 \pm 1)^n + (3\beta_1 \pm 1)^n = (3\gamma_1 \mp 1)^n$ besteht:

$$Q_n = (x+y)^n - x^n - y^n \equiv 0 \pmod k$$

und

$$(x+y)^n - x^n - y^n \equiv 0 \pmod{x^2 + xy + y^2}.$$

Beide Moduln sind durch 3 teilbar, *daher* $Q_n \equiv 0 \pmod 9$. Und hieraus folgt wieder $2^{n-1} \equiv 1 \pmod 9$. Demnach ist der Beweis für $\eta = 6m - 1$ und $x, y, z \not\equiv 0 \pmod n$ richtig“. (Anm. D. h. für $n = 6m - 1$ ist der Fall $x, y, z \not\equiv 0$ ausgeschlossen). — Antwort: $105 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 5}$, $105 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 7}$. Beide

Digitized by Google

Moduln durch 3 teilbar, *also* $105 \equiv 0 \pmod{3^2}$! Der richtige Schluß heißt, also ist 105 durch das kleinste gemeinsame Vielfache von $3 \cdot 5$ und $3 \cdot 7$, d. h. durch $3 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar. Ebenso ist oben Q_n durch das $k \cdot g \cdot$ *Vielf.* von k und $(x^2 + xy + y^2)$ teilbar. Ich glaube, Herr L. hat mit seiner Erwiderung den einen Beweis sicher geliefert, daß er nicht mehr ernst genommen werden darf.

IV. Für den Fall $n = 6m + 1$ beruft sich Herr L. auf den Satz S. 63. Dieser Satz ist falsch. Herr L. wollte sehr scharfsinnig schließen, und die Aufmachung sieht ganz hübsch aus. Herr L. benutzt zunächst als Beispiel $n = 13$. Dies ist hier wirklich eine Unglückszahl, da sie Herrn L. durch zufälliges — einziges!! — Stimmen zu einer vorgefaßten Meinung bringt. Dann sagt er etwa so: $(z + x_1)^n - z^n - x_1^n \equiv 0 \pmod{n^2}$ (1) (richtig). Multipliziert man hier mit r^n so, daß $rx_1 \equiv z \pmod{n}$ wird, so folgt, wenn $rz \equiv x_2$ gesetzt wird, $(z + x_2)^n - x_2^n - z^n \equiv 0 \pmod{n^2}$ (2), und es ist $z^2 \equiv x_1 x_2 \pmod{n}$ (3). Zu einer Kongruenz gibt es also eine zweite ebenso geformte. Dieser Satz ist aber noch nicht umzukehren: Wenn zwei Kongruenzen so geformt sind wie (1) und (2), so sind sie auseinander durch Multiplikation mit einer Größe r^n hervorgegangen und gilt als Folgerung die Kongruenz (3). So aber schließt Herr L. Er stellt nämlich (1) und (2) etwas anders auf:

$$(4) \qquad [(n - x_1 - z) + z]^n - z^n - (n - x_1 - z)^n \equiv 0 \pmod{n^2},$$

$$(5) \qquad [(n - x_2 - z) + z]^n - (n - x_2 - z)^n - z^n \equiv 0 \pmod{n^2},$$

also:

$$(6) \qquad z^2 \equiv (n - x_1 - z)(n - x_2 - z) \pmod{n}$$

was mit (3): $z^2 \equiv x_1 x_2 \pmod{n}$ vereint, den Schluß ergibt: $z^2 + zx_1 + x_1^2$ muß durch n teilbar sein! Dies ist alles falsch.

Hier ist nur folgende Überlegung möglich. Wenn (4) und (5) in einer Beziehung stehen sollen wie (1) und (2), also (5) aus (4) durch Multiplikation mit ϱ^n hervorgehen soll, so daß dann der Schluß (6) berechtigt ist, so muß $z^2 + zx_1 + x_1^2 \equiv 0 \pmod{n}$ sein, oder mit andern Worten $z^2 + zx_1 + x_1^2 \equiv 0$ ist die *Bedingung* dafür, daß (3) und (6) zugleich gelten. *Nur dann* gelten (3) und (6) zugleich. Nicht wie Autor sagt, (3) und (6) gelten ohne Nebenbedingung zusammen (das ist falsch), *also* ist $z^2 + zx_1 + x_1^2 \equiv 0$.

Nachdem die Verwirrung so ihren Höhepunkt erreicht hat, muß dieses Material für weitere Schlüsse herhalten, die aber nur dadurch zu dem vom Verfasser gewollten Endergebnis führen, daß S. 64 Zeile 6 bis 4 von unten neu gefehlt wird. Worin *hier* der Irrtum besteht, mag jedoch der Verfasser selbst erraten, dem ich durch zweimaliges Einarbeiten in 114, durch Nummern bezeichnete Formeln vollauf gerecht geworden zu sein glaube.

Berlin. ALBERT FLECK.

105. Karnasch, Ingenieur-Major a. D., Groß-Lichterfelde. Beweis II. 12 Seiten. 4^0.

Im Vergleich zu seiner früheren, ziemlich unverständlichen Arbeit (siehe Nr. 42) hat sich der Verfasser diesmal bemüht, die Fehler deutlicher hervortreten zu lassen. Auf Seite 6 vertritt er die folgende Ansicht: „Wenn a und n den größten gemeinsamen Teiler r haben, so daß $a = rd$, $n = re$ ist, dann haben a und e keinen Faktor gemein." Beispiel fürs Gegenteil: $a = 6$, $n = 8$,

Digitized by Google

$r = 2$. Auf Seite 7 heißt es: „Da $(rb)^{n-1}$ durch ra teilbar ist, so ist auch b^{n-1} durch a teilbar." Beispiel fürs Gegenteil: $r = 3$, $a = 3$, $n = 9$, $b = 1$ (in dem speziellen Fall soll nämlich noch $ra = n$ sein). Doch dies sind eigentlich nur Nebenfehler. Ein Hauptfehler ist folgender: Wenn $(b + x)^n = x^n + (b + x - a)^n$ ist, so erhält man speziell im Fall $n = 2$ durch Auflösung nach b: $b = 2a\left(\frac{\frac{x}{a} - 1}{2}\right)^2$. *Deshalb muß auch bei allgemeinem n die Zahl b in drei Faktoren zerfallen, die sich für* $n = 2$ *auf* $2, a, \left(\frac{\frac{x}{a} - 1}{2}\right)^2$ *reduzieren!* Eine ebenso kühne wie unbewiesene Behauptung. Daraus wird dann weiter auf sehr mysteriöse Art geschlossen, daß $\frac{x}{a}$ eine ganze Zahl sein muß. Aber dies stimmt nicht einmal für $n = 2$. Beispiel: $a = 8$, $x = 20$, $b = 9$.

106. J. Chr. Heuschmann, Oberamtsrichter in Gräfenberg. Aus Laienmund ein Wort zum sogen. großen Fermatschen Satz. 49 Seiten. 8^0.

Bei der Arbeit mit diesem schönen Titel ist es wirklich schwer, sie ernst zu nehmen. Sie ist auch zu konfus, als daß sie eine sachgemäße Besprechung zuließe. Ein paar Zahlenrechnungen und Tabellen werden mit großem Aufwand an neuen höchst merkwürdigen terminis technicis vorgeführt; das ist alles. Aber nirgends ein logischer Schluß. Weil bei einigen Zahlenbeispielen die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ nicht erfüllt ist, so ist sie überhaupt unmöglich. Dies scheint die Quintessenz des Gedankenganges zu sein, zu dem übrigens nicht „fames auri", nicht „cupiditas honoris" den Verfasser geführt haben. Wenigstens erklärt er dies selbst mit dem nötigen Pathos, und er muß es ja am besten wissen.

107. Willy Müller, Kaufmann in Schedewitz. Manuskript. 2 Seiten.

Formeln ohne Text können nicht beurteilt werden. Allerdings sind ja der letzten Formel die folgenden schönen Worte beigefügt: „Beruft man sich, um die Unmöglichkeit letzterer Kongruenz zu beweisen, nicht auf das quadratische Reziprozitätsgesetz, sondern führt die Rechnung mit elementaren Hilfsmitteln weiter, so erhält man einen Scheinbeweis, welcher nach Steiner keine Gültigkeit besitzt." Für Sherlock Holmes würden diese Angaben zweifellos genügen, um die ganze Biographie und die geheimsten Gedanken des Verfassers daraus herzuleiten. Aber glaubt Herr Müller wirklich, daß ein gewöhnlicher Mensch daraus klug werden kann? Ein klein wenig mehr muß man sich für 100 000 Mark denn doch bemühen.

Tübingen. Oskar Perron.

---

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen. Band II: Arbeiten auf dem Gebiete des technischen Mittelschulwesens. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Baker, R. Ph. The problem of the angle-bisectors. Dissertation. The University of Chicago Press 1911.

Barchanek. Darstellende Geometrie und Raumlehre. IV. bis VII. Kl. der Realschulen. Bearb. v. E. Ludwig. 3. Aufl. Wien 1910, F. Tempsky. *M* 4.—.

Beutel, Eugen. Algebraische Kurven. II.: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Leipzig 1911, Göschen. Sammlung Göschen Nr. 436. *M* 0.80.

Digitized by Google

Börsch, A. Bericht über Lotabweichungen (1909) XVI. Allgem. Konferenz der internationalen Erdmessung. Leiden 1911, E. J. Brill.

Carlebach, J. Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden. Berlin 1910, L. Lamm. ℳ 5.—, geb. ℳ 6.—.

Cohn, E. Physikalisches über Raum und Zeit. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 0.60.

Crantz, P. Planimetrie zum Selbstunterricht. Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Crelier, L. Systèmes cinématiques. Nr. 31 der „Scientia".

Danneel, H. Elektrochemie. I. Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. 2. Aufl. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 0.80.

Darboux, G. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2e édition complète. Paris 1910, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.

Deutsches Museum. Verwaltungsbericht über das 7. Geschäftsjahr 1909—1910 und Bericht über die 7. Ausschußsitzung. München, R. Oldenbourg.

Dölp, H. Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. 12. Auflage von E. Netto. Gießen 1909, A. Töpelmann. ℳ 1.80.

Domsch, P. Die technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. 1836—1911. Chemnitz 1911.

Donle, W. Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. u. 6. verb. Aufl. Stuttgart 1911, Fr. Grub. ℳ 3.60.

Duhem, P. Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. Tome I: Conservation de l'énergie. — Mécanique rationnelle. — Statique générale. — Déplacement de l'équilibre. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.

Dumont, E. Grandeurs et nombres. Arithmétique générale. Paris 1911, A. Hermann et fils. Fr. 8.—.

Düsing, K. Leitfaden der Kurvenlehre (Analytische Geometrie der Ebene). Hannover 1911, M. Jänecke. ℳ 20.—.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I; deuxième volume; troisième fascicule: Propriétés générales des corps et des variétés algébriques, exposé d'après l'article allemand de G. Landsberg, par J. Hadamard et J. Kürschák. — Théorie des formes et des invariants, exposé, d'après l'article allemand de W. F. Meyer, par J. Drach.

Enriques, F. Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausg. v. H. Thieme. 1. Teil: Die Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 10.—.

Fehr, H. Etat des travaux de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique. Genf 1911.

Fischer, P. B. Koordinatensysteme. Samml. Göschen Nr. 507. Leipzig 1911, Göschen.

Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band: Einführung in die Mechanik. 4. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 10.—.

Fueter, R. Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Gajdeczka, J. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Für die Mittel- und Oberstufe der Gymn., Realgymn. u. Realsch. 8. Aufl. Wien 1910, F. Tempsky. ℳ 3.20.

Grimsehl, E. Lehrbuch der Physik für Realschulen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.60.

Gross, G. Zur Kenntnis des Lambertschen Kosinusgesetzes. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur. Breslau 1911.

Gruschke, G. Die Brechung und Dispersion des Lichtes in einigen Gasen. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur. Breslau 1910.

Hack, Fr. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 0.80.

Hahn, H. Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. Erster Teil. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Hammer, E. Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie (Vermessungskunde). Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 22.—, geb. ℳ 24.—.

Digitized by Google

Hočevar, F. Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik. Mittelstufe (IV. u. V. Kl.). 2. Aufl. Wien 1910, F. Tempsky. Für Realschulen ℳ 3.20. Für Gymn. u. Realgymn. ℳ 2.50.

Jacob, L. Le calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs. Paris 1911, O. Doin. Fr. 5.—.

Kambly-Thaer. Arithmetik und Algebra. Ausgabe C: Für Realschulen. Breslau 1911, Hirt. ℳ 1.25.

Keferstein, H. Große Physiker. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

Keller, H. Werdegang der modernen Physik. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 343. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Klein, F. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. 2. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 7.50.

Kommerell, V. und Kommerell, K. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. 2 Band. Zweite, erweiterte Auflage. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 5.80.

—— —— Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Ebenda. ℳ 4.80.

Königsberger, L. Zur Erinnerung an Jacob Friedrich Fries. Heidelberg 1911, C. Winter.

Kowalevski, G. Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. Leipzig 1909, Veit & Co. ℳ 15.—, geb. ℳ 16.—.

Lazzeri, G. und Bassani, A. Elemente der Geometrie. Deutsch von P. Treutlein. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 14.—.

Lietzmann, W. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. V. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 0.60.

Lummer, O. Die Helligkeitsempfindlichkeitskurve des Auges und ihre Benutzung zur Temperaturbestimmung. Berlin 1911, O. Salle.

Marx, E. Zweite Durchführung der Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen. Leipzig 1910, B. G. Teubner. ℳ 4.—.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Band V_1. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Močnik. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung. Bearb. v. K. Zahradníček.
Für die V.—VII. Kl. der Realsch. 30. Aufl. ℳ 4.10. — Für die V.—VIII. Kl. der Gymn. u. Realgymn. 31. Aufl. ℳ 3.92. Wien 1911, F. Tempsky.

Moedebecks Taschenbuch zum praktischen Gebrauch für Flugtechniker und Luftschiffer. 3. Aufl. Berlin 1911, M. Krayn. ℳ 10.—.

Müller, F. Der mathematische Sternenhimmel des Jahres 1811. Festschrift zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Firma B. G. Teubner. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Neuendorff, R. Praktische Mathematik. I. Graphisches und numerisches Rechnen. Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Noodt, G. Leitfaden der Naturlehre für Lyzeen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.80.

—— Leitfaden der Naturlehre für Lyzeen (höhere Lehrerinnenseminare) II. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.80.

Poincaré, H. Der Wert der Wissenschaft. Deutsch von E. und H. Weber. Zweite Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.60.

—— Die neue Mechanik. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 0.60.

Rebenstorff, H. Physikalisches Experimentierbuch. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Richard, P. J. Etude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie. Paris 1911, A. Hermann et fils.

Rohr, M. v. Die optischen Instrumente. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 88. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Roozeboom, B. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Drittes Heft: Die ternären Gleichgewichte. Erster Teil. Systeme mit nur einer Flüssigkeit ohne Mischkristalle und ohne Dampf von H. Schreinemakers. Deutsch von B. Deuß. Braunschweig 1911, Vieweg & S. ℳ 10.—.

Digitized by Google

Rudolph, H. Die Stellung der Physik und Naturphilosophie zur Weltätherfrage. Berlin 1911, Allgem. Mediz. Verlagsanst. ℳ 0.80.

Sanderson, F. W., and Brewster, G. W. A geometry for schools. Cambridge 1910, University Press.

Schäffer, C. Natur-Paradoxe. Zweite, stark vermehrte Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

Scheffers, G. Lehrbuch der Mathematik. Zweite Aufl. Leipzig 1911, Veit & Co.

Schimmack, R. Die Entwicklung der mathematischen Unterrichts-Reform in Deutschland. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Schruttka, L. Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. Leipzig 1911, F. Deuticke. ℳ 3.60.

Schulze, F. A. Die großen Physiker und ihre Leistungen. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 324. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Schwab, K. Geometrie II. Teil. Ausgabe A: Für die oberen Klassen der Realanstalten. Leipzig 1911, G. Freytag. ℳ 2.—.

Séférian, A. Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. Lausanne 1910, Denéréaz-Spengler.

Suppantschitsch, R. Leitfaden der darstellenden Geometrie für die V.—VII. Klasse der Realschulen. Wien 1911, F. Tempsky. ℳ 4.—.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. 2. Jahrgang. 1911. Herausgegeben v. F. Auerbach und R. Rothe. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 7.—.

Teubner, B. G. 1811—1911. Geschichte der Firma in deren Auftrag herausgegeben von Friedrich Schulze. Leipzig im Jahre 1911.

Thürmel, E. Das Lummer-Pringsheimsche Spektral Flickerphotometer als optisches Pyrometer. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur. Breslau 1910.

Trabert, W. Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geh. ℳ 20.—, geb. ℳ 22.—.

Treutlein, P. Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 5.—, geb. ℳ 5.60.

Vahlen, Th. Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 11.—.

Verlagskatalog von Fr. Vieweg u. Sohn in Braunschweig 1786—1911. Herausgegeben aus Anlaß des 125jährigen Bestehens der Firma. Braunschweig 1911, Vieweg u. S.

Wanach, B. Tafel der Werte $\frac{a \cdot b}{a + b}$ für alle zweistelligen Werte von a und b zur Berechnung der Gewichte von Summen, Differenzen, Mittelwerten usw. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.20.

Weber, K. Lehrbuch der Planimetrie. ℳ 2.50. — Lehrbuch der Trigonometrie. ℳ 0.75. — Lehrbuch der Stereometrie. ℳ 0.75. Wolfenbüttel 1910, 1911, J. Zwißler.

Weber-Wellstein. Enzyklopädie der Elementarmathematik III: Angewandte Elementarmathematik. Erster Teil: Mathematische Physik. Bearbeitet von Rudolf H. Weber. Zweite Auflage. Leipzig 1910, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Weill, A. Sammlung graphischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen, Mathematik und Physik. Zweite Aufl. Gebweiler 1911, J. Boltze. ℳ 2.70.

Weinhold, A. F. Physikalische Demonstrationen. 5. Aufl. Erste Lieferung. Leipzig 1911, J. A. Barth. ℳ 11.—.

Wolfke, M. Über die Abbildung eines Gitters bei künstlicher Begrenzung. Inaug.-Diss. Breslau 1910.

Zoretti, L. Leçons sur le prolongement analytique. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 3.75.

Digitized by Google

Die kollineare Abbildung linearer Systeme 2. und 3. Stufe von Flächen 2. Grades in Ebene und Raum.

Von Arthur Jopke in Breslau.

1. Die kollineare Beziehung der linearen Kegelschnittsysteme 2. und 3. Stufe (Netze, Gebüsche) auf Punktfeld bzw. Punktraum führt auf Kurven und Flächen 3. Ordnung als Örter der Punkte, die den ∞^1 bzw. ∞^2 Geradenpaaren des jeweiligen Systems korrespondieren.[1])

Es liegt nahe, das entsprechende Problem für Netze und Gebüsche von Flächen 2. Grades zu stellen und die Örter der Punkte zu untersuchen, die bei der kollinearen Beziehung eines solchen Systems auf Ebene bzw. Raum den ∞^1 bzw. ∞^2 Kegeln homolog sind. Da ein Büschel von Flächen 2. Grades im allgemeinen 4 Kegel enthält, so führt das Problem auf Gebilde 4. Ordnung.

Wie dort unterscheiden sich auch hier das zwei- und das dreidimensionale Problem wesentlich, indem nämlich die Kegel des allgemeinen $F^{(2)}$-Netzes sich in eine allgemeine Kurve 4. Ordnung abbilden, während bei der Abbildung des allgemeinen $F^{(2)}$-Gebüsches sich eine schon sehr spezielle Fläche 4. Ordnung ergibt. Interessant ist ferner die Tatsache, daß beim räumlichen Problem in den Fällen, wo durch Abtrennung einer Ebene als eigentliche Bildfläche eine Fläche 3. Ordnung zurückbleibt, u. a. die beiden Flächen 3. Ordnung auftreten, auf die die Abbildung der Kegelschnittgebüsche im wesentlichen beschränkt bleibt.

Im folgenden ist die kollineare Abbildung für eine Anzahl ausgewählter Fälle von $F^{(2)}$-Netzen und -Gebüschen durchgeführt; parallel verlaufende Fälle sind, besonders im zweiten Teile, nur kurz namhaft gemacht.

2. Wir beginnen mit einer Klassifikation der $F^{(2)}$-Büschel, insbesondere um die Vielfachheit der jeweils auftretenden Kegel und Ebenenpaare festzustellen.[2]) Das allgemeine $F^{(2)}$-Büschel ist von der

1) Vgl. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, III, S. 367 f., sowie meine Dissertation (Breslau 1908) S. 40 f.

2) Der Beweis für die Vielfachheit der Kegel usw. gestaltet sich am einfachsten analytisch durch Untersuchung der Determinante der Büschelgleichung $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$.

Digitized by Google

Mannigfaltigkeit ∞^{16}; wir bezeichnen es durch $\mathfrak{L}_{16}$. Einfach speziell ist das Büschel $\mathfrak{L}_{15}$, dessen Grundkurve 4. Ordnung einen Doppelpunkt besitzt; der Kegel, dessen Spitze in dem Doppelpunkte liegt, zählt zweifach. Als doppelt spezielle Büschel reihen sich an: erstens das Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{14}$, dessen Grundkurve einen Rückkehrpunkt besitzt; sodann das Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$ mit einer in eine Raumkurve 3. Ordnung und eine diese in zwei Punkten treffende Geraden zerfallenden Grundkurve; schließlich das Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{14}$, dessen Grundkurve in zwei sich zweimal begegnende Kegelschnitte ausartet. In einem Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{14}$ zählt der Kegel, der die Grundkurve aus ihrer Spitze projiziert, dreifach; in einem Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$ sind in den beiden vorhandenen Kegeln je zwei vereinigt zu denken, und im dritten Falle ist das Ebenenpaar, in dessen Ebenen die Grundkegelschnitte liegen, für zwei Kegel zu rechnen. Auch bei den dreifach speziellen Büscheln unterscheiden wir drei Arten: Geht in einem Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$ die Doppelsekante in eine Tangente über, so ergibt sich ein Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{13}$, das überhaupt nur einen Kegel enthält. Berühren sich in einem Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{14}$ die beiden Grundkegelschnitte, so erhalten wir ein Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{13}$; das Ebenenpaar zählt für drei Kegel. Die dritte Art der Büschel $\mathfrak{L}_{13}$, ein $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{13}$, geht aus einem Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{14}$ hervor, wenn der eine der beiden Grundkegelschnitte in ein Geradenpaar ausartet; ebenso wie das Ebenenpaar ist hier auch der einzige Kegel des Büschels doppelt zu rechnen. Bei den vierfach speziellen Büscheln heben wir als die wichtigste Gruppe zunächst diejenigen Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{12}$ hervor, die zur Grundkurve ein windschiefes Vierseit haben; in ihnen vertritt jedes der beiden Ebenenpaare wiederum die Stelle von zwei Kegeln. Bemerkenswert sind ferner die Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{12}$, deren Grundkurve in einen Kegelschnitt und ein mit seinem Doppelpunkt auf diesem ruhendes Geradenpaar zerfällt, so zwar, daß die Ebene des letzteren den Kegelschnitt tangiert; das Ebenenpaar eines solchen Büschels zählt für alle vier Kegel. Geht in der Grundkurve eines Büschels $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{13}$ das Geradenpaar in eine Doppelgerade über, so entsteht ein fünffach spezielles Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{11}$, das nur Kegel enthält; die Kegel berühren sich längs der Doppelgeraden. Ein Kegelbüschel dieser Art, das wir in der Folge auch kurz durch $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$ bezeichnen wollen, ist am einfachsten definiert durch einen Kegel und ein Ebenenpaar, dessen einer Bestandteil den Kegel berührt. Gleich speziell ist auch das andere Kegelbüschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{11} \equiv \mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$, dessen Grundkurve aus vier in einem Punkte, der gemeinsamen Spitze der Kegel, konkurrierenden Geraden besteht. Zu der Gruppe der Büschel $\mathfrak{L}_{11}$ gehört ferner das Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{11}$ mit einem Doppelkegelschnitt als Grundkurve; die Doppelebene, die Trägerebene des Kegelschnitts, zählt drei-, der Berührungskegel einfach. Ein Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{IV}}_{11}$ schließlich ent-

Digitized by Google

steht, wenn wir als Konstituenten eine Fläche und ein Ebenenpaar wählen, dessen Doppellinie der ersteren als Erzeugende angehört. Die Elemente eines solchen Büschels berühren einander in den Punkten der Doppellinie und haben noch zwei ihr begegnende Geraden gemein; das Ebenenpaar zählt vierfach.

Von den noch spezielleren Büscheln heben wir noch die beiden Arten hervor, die nur Ebenenpaare enthalten. Die eine Art, von der Mannigfaltigkeit ∞^7, ist definiert durch eine Ebene σ und eine außerhalb σ gelegene Gerade s; die Elemente des Büschels setzen sich aus σ und irgendeiner durch s gelegten Ebene zusammen. Ein Büschel der zweiten Art (Mannigfaltigkeit: ∞^6) ist bestimmt durch zwei Doppelebenen δ_1, δ_2; alle Ebenenpaare, deren Ebenen δ_1, δ_2 harmonisch trennen, gehören ihm an. Wir bezeichnen die beiden Arten der Ebenenbüschel in der genannten Reihenfolge durch $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{E}_{\mathrm{II}}$.

I. Die kollineare Beziehung zwischen den $F^{(2)}$-Netzen und dem Punktfelde.

3. Das lineare $F^{(2)}$-System 2. Stufe, das $F^{(2)}$-Netz, ist definiert durch sieben Grundpunkte in allgemeiner Lage; der achte assoziierte Grundpunkt wird aus jenen durch eine lineare Konstruktion gefunden. Seine Mannigfaltigkeit beträgt ∞^{21}.

Bezieht man ein allgemeines $F^{(2)}$-Netz N kollinear auf eine Ebene σ, so daß den Flächen und Büscheln des Netzes die Punkte und Geraden der Ebene entsprechen, so bilden sich die ∞^1 Kegel von N, deren Spitzen die Jacobische Kurve 6. Ordnung $\mathfrak{J}^{(6)}$ erfüllen, in die Punkte einer Kurve in σ ab, die von der vierten Ordnung ist, da ein Netzbüschel im allgemeinen vier Kegel enthält. Die Tangenten dieser Kurve $\Gamma^{(4)}$ korrespondieren den ∞^1 Büscheln $\mathfrak{L}_{15}$ von N. Da jede Fläche F des Netzes der Jacobischen Kurve $\mathfrak{J}^{(6)}$ in $2 \cdot 6 = 12$ Punkten begegnet und jeder der zwölf Kegel, die ihre Spitzen in diesen zwölf Punkten haben, mit F ein Büschel $\mathfrak{L}_{15}$ bestimmt, so gehen von dem der Fläche F in σ homologen Punkt zwölf Tangenten an $\Gamma^{(4)}$. Damit ist ihre Klasse zwölf und ihre Ordnungsallgemeinheit bewiesen. Jeder Punkt auf einer der 28 Geraden, die je zwei der acht Grundpunkte von N verbinden, scheidet aus N ein Büschel der Art $\mathfrak{L}_{14}^{\mathrm{II}}$ aus, das sich, entsprechend seinen beiden je zweifach zu zählenden Kegeln, in eine Doppeltangente der $\Gamma^{(4)}$ abbildet. So erhalten wir ihre 28 Doppeltangenten; zugleich gelangen wir damit zu der eindeutigen Zuordnung, die zwischen jenen 28 Verbindungsgeraden und den 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Kurve 4. Ordnung besteht, und zu der darauf beruhenden Darstellungsweise

Digitized by Google

der Doppeltangenten.[1]) N enthält ferner 24 Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{14}$, deren Grundkurven einen Rückkehrpunkt besitzen[2]); ihnen korrespondieren die 24 Wendetangenten der $\Gamma^{(4)}$.

4. Abbildungskurven mit singulären Punkten ergeben sich bei zwei voneinander völlig verschiedenen Reihen spezieller Netze.[3]) Einmal bewirkt das Vorhandensein eines Ebenenpaares $e \equiv (\varepsilon, \varepsilon')$ in einem Netze, daß die zugehörige Bildkurve einen Doppelpunkt besitzt, da e in jedem Netzbüschel, dem es angehört, für zwei Kegel zählt. Ist $\mathfrak{L}_{16}$ irgend ein Büschel, das mit e das Netz konstituiert, so bestimmen die beiden Flächen aus $\mathfrak{L}_{16}$, die die Doppellinie $(\varepsilon, \varepsilon')$ berühren, mit e zwei Büschel der Art $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{13}$; ihnen entsprechen die beiden Tangenten des Doppelpunktes. In $\mathfrak{L}_{16}$ gibt es zwei Tripel von Flächen, die die Ebene ε bzw. ε' berühren; die sechs Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{III}}_{13}$, welche diese sechs Flächen mit ε konstituieren, bilden sich in die sechs vom Doppelpunkte ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten ab. Die 16 Doppeltangenten schließlich, die $\Gamma^{(4)}$ als Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt besitzt, sind die Abbilder der 16 Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$, die durch irgendeinen Punkt beziehentlich auf den 16 Geraden, die je zwei nicht in der nämlichen Ebene von e liegende Grundpunkte verbinden, im Netze bestimmt werden. Enthält das Netz zwei oder drei Ebenenpaare, so treten auf der Bildkurve entsprechend zwei bzw. drei Doppelpunkte auf. Die Mannigfaltigkeiten der Netze mit 1, 2, 3 Ebenenparen sind ∞^{20}, ∞^{19}, ∞^{18}.

In Kurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt bilden sich aber auch die Netze ab, bei denen zwei Grundpunkte (auf bestimmter Verbindungsgerade) unendlich benachbart sind, oder was auf dasselbe hinausläuft, bei denen ein Grundpunkt zuleich die Spitze eines Netzkegels $\varkappa$ darstellt; denn wiederum zählt ein solcher Kegel in allen Büscheln (der Art $\mathfrak{L}_{15}$), denen er angehört, doppelt. Ist $\mathfrak{L}_{16}$ irgendein Büschel, das mit $\varkappa$ das Netz konstituiert, so bestimmen die beiden Flächen aus $\mathfrak{L}_{16}$, die $\varkappa$ in der Spitze berühren, mit $\varkappa$ zwei Büschel der Art $\mathfrak{L}^{\mathrm{I}}_{14}$; ihnen korrespondieren die beiden Tangenten des Doppelpunktes. Die sechs vom Doppelpunkte ausgehenden anderwärts berührenden Tangenten entsprechen, wenn 1, 2 die beiden unendlich nahen, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die übrigen Grundpunkte bezeichnen, den 6 Büscheln $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$, deren zerfallende Grundkurven durch die geraden Bestandteile (13), (14), ... (18) charakterisiert sind. Die 15 Büschel $\mathfrak{L}^{\mathrm{II}}_{14}$, in deren Charakteristik der Grundpunkt $1 \equiv 2$ nicht enthalten ist, und das Büschel (12) bilden sich in

1) Vgl. Hesse, Journal für Mathematik, **49**, 279 f.

2) Vgl. Sturm, Journ. f. Math., **70**, 229 f.

3) Vgl. das Analogon bei den Kegelschnittnetzen (Dissertation, S. 42, 43).

Digitized by Google

die 16 Doppeltangenten der $\Gamma^{(4)}$ ab. Sind zwei- oder dreimal zwei Grundpunkte unendlich benachbart, so besitzt die Bildkurve entsprechend zwei oder drei Doppelpunkte. Die Netze mit 1, 2, 3 Paaren unendlichnaher Grundpunkte haben gleichfalls die Mannigfaltigkeiten ∞^{20}, ∞^{19}, ∞^{18}.

Zu Bildkurven mit zwei und drei Doppelpunkten führen natürlich auch die Netze, die durch Kombinationen der Charakteristiken der beiden beschriebenen Reihen ein-, zwei- und dreifach spezieller Netze entstehen.

Durch Spezialisierung der gegenseitigen Lage der Konstituenten bzw. der Grundpunkte eines Netzes der einen oder der anderen Reihe ergeben sich Netze, deren Bildkurven Rückkehrpunkte besitzen. Wählt man als Konstituenten eines Netzes außer einem Ebenenpaar e zwei Flächen F_1, F_2, die sich in einem Punkte der Doppellinie von e begegnen, so bildet sich e in eine Spitze der $\Gamma^{(4)}$ ab; die Spitzentangente ist die Bildgerade von $\mathfrak{L}_{13}^{II}$, das e mit der einzigen Fläche des Büschels (F_1, F_2), die seine Doppellinie berührt, bestimmt. Ebenso tritt im Parallelfalle auf $\Gamma^{(4)}$ eine Spitze auf, wenn man den Grundpunkt 2 nicht in beliebiger Richtung unendlich nahe zu 1, sondern auf einer Kante des ausgezeichneten Kegels $\varkappa \equiv 1\,(3, 4, 5, 6, 7)$ annimmt. Als Gesamtresultat ergibt sich mithin, daß alle neun Arten der nicht zerfallenden Kurven 4. Ordnung mit Doppelpunkten durch Abbildung von $F^{(2)}$-Netzen erzeugt werden können. Um noch ein Beispiel anzuführen: Die speziellste dieser Kurven, die Kurven 4. Ordnung mit drei Spitzen, erhalten wir als Bildkurve des sechsfach speziellen Netzes, das durch die drei Ebenenpaare (aB, aC), (bC, bA), (cA, cB), wo a, b, c drei windschiefe Geraden, A, B, C drei mit ihnen beziehentlich inzidente Punkte bezeichnen, definiert ist.

Begegnen F_1, F_2 der Doppellinie von e, der dritten Konstituente, in den beiden nämlichen Punkten, so bildet sich das so definierte Netz in eine $\Gamma^{(1)}$ mit einem Selbstberührungspunkt ab; seine Tangente entspricht dem Büschel der Art $\mathfrak{L}_{11}^{IV}$, das durch einen Punkt der Doppellinie im Netz bestimmt wird. Rücken im besonderen die beiden Treffpunkte mit der Doppellinie unendlich nahe, so bildet sich e in einen dreifachen Punkt der $\Gamma^{(4)}$ ab; ebenso korrespondiert einem Netze mit einer Doppelebene eine Bildkurve mit einem dreifachen Punkt.

5. Wir gehen nunmehr zu speziellen Netzen über, die zu zerfallenden Bildkurven führen. Ein Netz sei definiert durch vier Grundpunkte A, B, C, D und die Bestimmung, daß ein Punkt P und eine Ebene π bezüglich aller Netzelemente polar sind (Mannigfaltigkeit: ∞^{18}). Die den Punkten A, B, C, D in der räumlichen involutorischen Homo-

Digitized by Google

logie (P, π) gepaarten Punkte A', B', C', D' sind die vier weiteren Netzgrundpunkte. Das Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$ mit den Grundkanten PAA', PBB', PCC', PDD' gehört dem Netze an. In π schneidet unser $F^{(3)}$-Netz ein allgemeines Kegelschnittnetz ein. Da P und π polar sind, können die Geradenpaare des letzteren nur von Kegeln des Flächennetzes herrühren; und aus demselben Grunde folgt, daß auch umgekehrt die Spitze jedes Netzkegels, abgesehen von den Elementen des Büschels $\mathfrak{K}_{II}$ der Ebene π angehört. Die (ebene) Jacobische Kurve 3. Ordnung des Kegelschnittnetzes in π stellt somit die eigentliche Kegelspitzenkurve des $F^{(3)}$-Netzes dar; sie wird durch die Doppellinien der drei Ebenenpaare des Büschels $\mathfrak{K}_{II}$ zur vollen Ordnung 6 ergänzt.

Bilden wir ein solches Flächennetz kollinear in die Punkte einer Ebene σ ab, so entsprechen den Elementen von $\mathfrak{K}_{II}$ die Punkte einer Geraden, die sich von der Bildkurve 4. Ordnung ablöst. Als Restkurve bleibt eine Kurve 3. Ordnung, deren Punktreihe eindeutig auf die Jacobische Kurve des Kegelschnittnetzes in π bezogen, also wie diese allgemein ist. Die drei Punkte, in denen sie von jener Geraden getroffen wird, korrespondieren den drei Ebenenpaaren von $\mathfrak{K}_{II}$.

6. Die beiden in Nr. 4 behandelten Parallelreihen setzen sich auch bei den vierfach speziellen Netzen fort. Wir haben zunächst ein Netz mit vier Ebenenpaaren, definiert durch zwei polare Geraden u, v und drei Grundpunkte A, B, C. Alle Elemente des Netzes gehen dann auch durch die Punkte A', B', C', die den Punkten A, B, C in der windschiefen Involution (u, v) gepaart sind.[1]) Die vier Ebenenpaare sind:

$$\begin{array}{c|c|c|c} ABC & A'BC & AB'C & ABC' \\ A'B'C' & AB'C' & A'BC' & A'B'C. \end{array}$$

Bilden wir das Netz kollinear in σ ab, so zerfällt die Bildkurve als Kurve 4. Ordnung mit vier Doppelpunkten in allgemeiner Lage in zwei Kegelschnitte.

Ein anderes Netz, das zu einer in der nämlichen Weise zerfallenden Bildkurve führt, bestimmen wir, indem wir die Grundpunkte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 beziehentlich unendlich benachbart annehmen und als siebenten einen Punkt 7 wählen, aus dem sich jene sechs durch die Kanten eines Kegels 2. Grades projizieren. Es zeigt sich, daß der achte assoziierte Punkt 8 dem Grundpunkt 7 in bestimmter Richtung unendlich nahe liegt. Den vier Kegeln, deren Spitzen die Punkte $1 \equiv 2$, $3 \equiv 4$, $5 \equiv 6$, $7 \equiv 8$ sind, korrespondieren die vier Doppelpunkte der zerfallenden Bildkurve.

---

1) Über die beiden weiteren Grundpunkte D, D' vgl. Sturm, die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie, I, S. 66 ff.; Verwandtschaften, III, S. 289, 290.

Digitized by Google

7. Als letzte Gruppe behandeln wir die drei Arten von Netzen, die sich in doppelt zu zählende Kegelschnitte abbilden. Wir beginnen mit dem allgemeinsten, dem fünffach speziellen Netz, von dessen sieben bestimmenden Grundpunkten drei auf einer Geraden liegen. Die Netzbüschel sind sämtlich von der Art Ω_{14}^{II}; auf den Geraden der Bildebene σ fallen somit die vier Schnittpunkte mit der Bildkurve immer paarweise zusammen.

Wesentlich spezieller (Mannigfaltigkeit: ∞^{12}) ist das Netz, das durch sieben auf einer Raumkurve 3. O. liegende Grundpunkte definiert ist. Da wiederum alle Büschel des Netzes von der Art Ω_{14}^{II} sind, so ergibt sich gleichfalls ein Doppelkegelschnitt als Bildkurve.

Das dritte Netz dieser Gruppe ist bestimmt durch drei Ebenenpaare (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), wo α, β, γ mit einer Geraden u und α', β', γ' mit einer zu u windschiefen Geraden u' inzident sind (Mannigfaltigkeit: ∞^{11}). Ein solches Netz kann Kegel nicht enthalten; vielmehr sind alle ausgearteten Flächen Ebenenpaare, und zwar diejenigen, deren Bestandteile ξ, ξ' in der durch die drei Paare α, α'; β, β'; γ, γ' definierten Projektivität der Ebenenbüschel u, u' einander entsprechen.[1]) Jedes Büschel eines solchen Netzes $\mathfrak{N}(u, u')$ ist von der Art Ω_{12}^{I}; denn ist χ irgendein Punkt des Raumes, bezeichnen ferner η', ξ die den Ebenen $\eta \equiv \chi u$, $\zeta' \equiv \chi u'$ in der Projektivität (u, u') korrespondierenden Ebenen, so gehören die beiden Ebenenpaare (η, η'), (ξ, ξ') dem durch χ aus dem Netze ausgeschiedenen Büschel an. Die Bildkurve in σ ist demnach wiederum ein Doppelkegelschnitt.

II. Die kollineare Beziehung zwischen den $F^{(2)}$-Gebüschen und dem Punktraume.

8. Das lineare $F^{(2)}$ System 3. Stufe, das $F^{(2)}$-Gebüsche, ist definiert durch sechs Paare konjugierter Punkte in allgemeiner Lage. Seine Manigfaltigkeit ist ∞^{24}. Die Spitzen der ∞^3 Kegel erfüllen eine Fläche 4. Ordnung $J^{(4)}$, die Jacobische Fläche des Gebüsches, zugleich definiert als Ort der ∞^2 Paare von Punkten, die in bezug auf alle Flächen des Gebüsches konjugiert sind. Das allgemeine $F^{(2)}$-

1) Ist nämlich A irgendein Punkt der Schnittgeraden (α, α'), B der Treffpunkt seiner Polarebene bezüglich des Ebenenpaares (γ, γ') mit der Schnittgeraden (β, β'), so sind A, B bezüglich der drei Konstituenten und somit in bezug auf alle Netzflächen konjugiert. Wir vermögen daher das Netz auch durch die beiden Grundgeraden u, u' und das Paar konjugierter Punkte A, B zu definieren. Jedes Ebenenpaar, dessen Ebenen ξ (inzident mit u), ξ' (inzident mit u') nach gepaarten Punkten der Involution (A, B) gehen, gehören dem Netze an. Von ξ, ξ' erkennt man aber ohne weiteres, daß sie auch in der obigen Projektivität entsprechend sind.

Digitized by Google

Gebüsche enthält zehn Ebenenpaare.[1]) Diese Zahl zehn bleibt auch erhalten, wenn das $F^{(3)}$-Gebüsche 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Grundpunkte in allgemeiner Lage besitzt.[2]) In diesen Fällen treten neben die Ebenenpaare als ausgezeichnete Elemente noch die Kegel, deren Spitzen in den Grundpunkten liegen; es zeigt sich, daß jeder Grundpunkt die Spitze *eines* solchen Kegels ist. Die Mannigfaltigkeiten der Gebüsche mit 1, 2, ... 6 Grundpunkten betragen ∞^{23}, ∞^{22}, ... ∞^{18}.

Bezieht man ein allgemeines $F^{(3)}$-Gebüsche G kollinear auf den Punktraum, so daß den Flächen, Büscheln und Netzen des Gebüsches die Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes korrespondieren, so bilden sich die ∞^2 Kegel von G in die Punkte einer Fläche ab, die von der Ordnung 4 ist, da jedes Büschel vier Kegel enthält. Die Tangentialebenen dieser Fläche $\Phi^{(4)}$ entsprechen den Netzen, die durch die Punkte J der Jacobischen Fläche im Gebüsche bestimmt werden; denn in einem solchen Netze ist jedes Büschel, das den Kegel mit der Spitze J enthält, von der Art $\mathfrak{L}_{15}$. Für die Klasse der Fläche $\Phi^{(4)}$ ergibt sich 16; denn die Grundkurve 4. Ordnung jedes allgemeinen Büschels $\mathfrak{L}_{16}$ von G begegnet der Jacobischen Fläche $J^{(4)}$ in $4 \cdot 4 = 16$ Punkten J, und mit jedem der 16 Kegel (J) bestimmt $\mathfrak{L}_{16}$ ein Netz

---

1) Vgl. Sturm, Verwandtschaften, I, S. 399, 400; III, S. 509, 510. Der Nachweis gelingt auch auf folgende Weise: Es seien $A_1 B_1$; $A_2 B_2$; $A_3 B_3$ die Doppelpunkte dreier Punktinvolutionen auf drei windschiefen Trägern s_1, s_2, s_3. Ordnet man jeder Ebene ξ des Raumes diejenige Ebene ξ' zu, welche die den Punkten (ξ, s_1), (ξ, s_2), (ξ, s_3) jeweilig gepaarten Punkte verbindet, so entsteht eine eindeutige involutorische Verwandtschaft im Ebenenraume. Sie ist (in beiderlei Sinne) vom 3. Grade. Treten noch drei weitere Involutionen $(A_4 B_4)$, $(A_5 B_5)$, $(A_6 B_6)$ auf den untereinander und zu s_1, s_2, s_3 windschiefen Trägern s_4, s_5, s_6 hinzu, so wird in ähnlicher Weise wie oben jeder Ebene ξ eine Ebene ξ'' eindeutig involutorisch zugeordnet. Aus den beiden Verwandtschaften (ξ, ξ') und (ξ, ξ'') resultiert eine dritte wiederum eindeutige und involutorische Verwandtschaft zwischen ξ' und ξ'', die als Produkt zweier kubischer Verwandtschaften (in beiderlei Sinne) vom 9. Grade ist. Ihre 20 Koinzidenzebenen ordnen sich zu den 10 Ebenenpaaren des allgemeinen $F^{(3)}$-Gebüsches, das durch die sechs Paare konjugierter Punkte A_1, B_1; A_2, B_2; ... A_6, B_6 definiert ist.

2) Im zweiten, dritten und vierten Falle sondern sich die zehn Ebenenpaare nach dem Verhalten ihrer Bestandteile zu den Grundpunkten in je zwei Gruppen. Beim Gebüsche mit zwei Grundpunkten nimmt bei vier Ebenenpaaren die eine Ebene beide Grundpunkte auf, während bei den übrigen sechs jede Ebene einen Grundpunkt enthält. Das Gebüsche mit drei Grundpunkten besitzt ein Ebenenpaar, dessen eine Ebene alle drei Grundpunkte verbindet; die übrigen $3 \cdot 3 = 9$ senden die eine Ebene durch je zwei Grundpunkte, die andere durch den jeweilig dritten. Beim Gebüsch mit vier Grundpunkten schließlich gibt es vier Ebenenpaare, deren einer Bestandteil je drei Grundpunkte aufnimmt; bei den übrigen $3 \cdot 2 = 6$ Ebenenpaaren enthält jede Ebene je zwei Grundpunkte.

Digitized by Google

der eben beschriebenen Art. Die 16 Ebenenpaare $e \equiv (\varepsilon, \varepsilon')$ von G bilden sich in Doppelpunkte D der Fläche $\Phi^{(4)}$ ab, da jedes Büschel, das ein Ebenenpaar enthält, von der Art $\mathfrak{L}_{14}^{III}$ ist. Daß es sich um Knotenpunkte, d. i. Doppelpunkte mit einem Anschmiegungskegel 2. Grades, handelt, geht daraus hervor, daß es in jedem Büschel des Gebüsches zwei Flächen gibt, die die Doppellinie eines e berühren; diese beiden Flächen bestimmen mit e je ein Büschel $\mathfrak{L}_{13}^{II}$, das sich in eine Kante des Anschmiegungskegels des dem e auf $\Phi^{(4)}$ entsprechenden Doppelpunktes D abbildet. Der von einem Punkte der $\Phi^{(4)}$ an diese gelegte Berührungskegel ist von der Ordnung 10; die Ordnung reduziert sich auf sechs, wenn die Spitze ein Knotenpunkt D ist. Bezeichnet wiederum $e \equiv (\varepsilon, \varepsilon')$ das D entsprechende Ebenenpaar, so schneidet die Jacobische Fläche $J^{(4)}$ des Gebüsches in ε und ε' außer der Geraden $(\varepsilon, \varepsilon')$ je eine Kurve 3. Ordnung — sie heiße (ε) bzw. (ε') — ein.[1]) Jeder Kegel, dessen Spitze einer dieser beiden kubischen Kurven angehört, bestimmt mit e ein Büschel $\mathfrak{L}_{13}^{III}$, das sich in eine Kante des Berührungskegels (D) abbildet. Damit ist eine eindeutige Zuordnung zwischen den beiden krummen Punktreihen von (ε) und (ε') einerseits und der Kantenreihe des Berührungskegels (D) andererseits nachgewiesen. Aus ihr folgt, daß der Kegel (D) von der Ordnung 6 in zwei Kegel 3. Ordnung zerfällt; die Kanten des einen sind eindeutig auf die Punkte der Kurve (ε), die des anderen auf die Punkte der Kurve (ε') bezogen. Die beiden Kegel schneiden sich in den neun Geraden, die D mit den übrigen neun Knotenpunkten verbinden. In der Tat gehört zu jedem der übrigen neun Ebenenpaare je ein Punkt auf den Kurven (ε) und (ε'), der Treffpunkt seiner Doppellinie mit ε bzw. ε'.

Aus dem Zerfallen der von den Knotenpunkten an die Fläche gelegten Berührungskegel geht hervor, daß $\Phi^{(4)}$ ein sog. Symmetroid ist.

Liegt ein $F^{(4)}$-Gebüsche mit einem Grundpunkt vor, so bildet sich auch der Kegel $\varkappa$, dessen Spitze der Grundpunkt ist, in einen Doppelpunkt ab, da alle Büschel, die $\varkappa$ enthalten, von der Art $\mathfrak{L}_{15}$ sind. Wiederum ist es ein Knotenpunkt der Fläche. Denn in jedem Büschel des Gebüsches gibt es zwei Flächen, die $\varkappa$ in der Spitze berühren; den beiden Büscheln der Art $\mathfrak{L}_{14}^{I}$, die $\varkappa$ mit ihnen bestimmt, korrespondieren zwei Kanten des Anschmiegungskegels. Bei den Gebüschen mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Grundpunkten ergeben sich somit Abbildungsflächen mit 11, 12, 13, 14, 15, 16 Knotenpunkten.[2]) Im einzelnen bleibt zu untersuchen, welche Sextupel von Doppelpunkten je derselben Ebene an-

1) Es ist die Jacobische Kurve des von G in ε bzw. ε' erzeugten Kegelschnittnetzes.

2) Vgl. das duale Problem bei Reye, Journ. f. Mathem., 86, 84 ff.

Digitized by Google

gehören, und in welcher Weise die von ihnen ausgehenden Berührungskegel in Kegel niedrigerer Ordnung zerfallen. Wir beschränken uns darauf, die Verhältnisse bei dem weitaus interessantesten Gebüsche, dem Gebüsche mit sechs Grundpunkten, darzulegen.

9. Es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 die sechs Grundpunkte. Wir bezeichnen ferner die sechs Kegel, deren Spitzen in den sechs Grundpunkten liegen, mit (1), (2), (3), (4), (5), (6) und die zehn Ebenenpaare $e \equiv (\varepsilon, \varepsilon')$ je nach den Grundpunkten, durch die ε und ε' gehen, durch die Symbole $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$, $\binom{1\,2\,4}{3\,5\,6}$, ... Unter den Netzen des Gebüsches heben wir neben dem Netz, dessen Grundkurve die durch die sechs Grundpunkte bestimmte Raumkurve 3. Ordnung ist, und das wir symbolisch mit $(1\,2\,3\,4\,5\,6) \equiv (0)$ bezeichnen, die 15 Netze hervor, deren Flächen beziehentlich die Verbindungsgerade zweier Grundpunkte gemeinsam haben; als symbolische Bezeichnung wählen wir passend die Signaturen: (12), (13), ... Sowohl den 16 ausgezeichneten Flächen (1), ... (6), $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$, ..., als auch den 16 Netzen (0), (12), ... entsprechen auf der Bildfläche singuläre Elemente. Jene bilden sich in die 16 Knotenpunkte der $\Phi^{(4)}$, diese in 16 Ebenen ab, die $\Phi^{(4)}$ längs eines Kegelschnitts berühren (Nr. 7). Die symbolische Bezeichnung denken wir uns bei beiden Gruppen aus dem Gebüsche auf die Bildfläche übertragen. Über die Beziehungen der 16 Knotenpunkte zu den 16 singulären Berührungsebenen gelten, wie man unmittelbar im Gebüsche erkennt, die dualen Sätze: In jeder singulären Tangentialebene liegen sechs Knotenpunkte; durch jeden Knotenpunkt gehen sechs singuläre Ebenen, deren Inbegriff seinen Berührungskegel 6. Ordnung darstellt. So liegen z. B. in der Ebene (0) die sechs Punkte (1), (2), (3), (4), (5), (6) oder in der Ebene (12) die Doppelpunkte (1), (2), $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$, $\binom{1\,2\,4}{3\,5\,6}$, $\binom{1\,2\,5}{3\,4\,6}$, $\binom{1\,2\,6}{3\,4\,5}$. Vom Doppelpunkte (1) z. B. gehen die sechs Ebenen (0), (12), (13), (14), (15), (16) aus, vom Doppelpunkt $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$ die sechs Ebenen (12), (23), (31), (45), (56), (64).

Die vorliegende Fläche 4. Ordnung, die sich selbst dual gegenübersteht, wird nach Kummer[1]) benannt.

10. Sind in einem Gebüsche mit sechs Grundpunkten zwei davon, etwa 5 und 6, unendlich benachbart (Mannigfaltigkeit: ∞^{17}), so enthält

1) Kummer, Monatsber. Berl. Ak. 1864, S. 246 ff. und Abhandlungen der Berliner Akademie, 1866, S. 62 ff. Zu der ziffernmäßigen Bezeichnung der 16 Knotenpunkte und der 16 singulären Ebenen gelangte zuerst H. Weber bei einer Untersuchung über die Charakteristiken der Thetafunktionen von zwei Veränderlichen (Journ. f. Math., Bd. 84, S. 343). Aus der rein geometrischen Beziehung zu dem räumlichen Sechseck der Gebüschgrundpunkte hat sie zuerst Reye abgeleitet (a. a. O. S. 99).

Digitized by Google

es ein ganzes Büschel $\mathfrak{K}_{II}$ doppelt zu zählender Kegel mit der Spitze $5 \equiv 6$. Die Bildfläche besitzt somit eine Doppelgerade d. Außerhalb dieser liegen auf der Fläche noch acht Doppelpunkte, nämlich $D_1 \equiv (1)$, $D_2 \equiv (2)$, $D_3 \equiv (3)$, $D_4 \equiv (4)$, $\Delta_1 \equiv \left(\begin{smallmatrix}1&5&6\\2&3&4\end{smallmatrix}\right)$, $\Delta_2 \equiv \left(\begin{smallmatrix}2&5&6\\1&3&4\end{smallmatrix}\right)$, $\Delta_3 \equiv \left(\begin{smallmatrix}3&5&6\\1&2&4\end{smallmatrix}\right)$, $\Delta_4 \equiv \left(\begin{smallmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)$. Die Geraden $D_1\Delta_1$, $D_2\Delta_2$, $D_3\Delta_3$, $D_4\Delta_4$ gehören der Fläche an und treffen die Doppelgerade d. Denn $D_1\Delta_1$ z. B. korrespondiert dem Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$, das durch den Kegel (1) und das Ebenenpaar $\left(\begin{smallmatrix}1&5&6\\2&3&4\end{smallmatrix}\right)$ bestimmt ist; der Punkt, in dem $D_1\Delta_1$ die Doppelgerade trifft, entspricht dem Kegel aus $\mathfrak{K}_{II}$ (und $\mathfrak{K}_I$), den die Ebene (156) längs der Geraden $(15) \equiv (16)$ berührt. Da ferner im Netz (15) jedes Element des Kegelbüschels $\mathfrak{K}_I$ in allen Büscheln, denen es angehört, doppelt zählt, so folgt daraus, daß die Ebene $(15) \equiv (d, D_1) \equiv (d, \Delta_1)$ die Bildfläche längs $D_1\Delta_1$ tangiert; ähnliches gilt für die drei anderen Ebenen. Außer den vier uneigentlichen singulären Ebenen $(15) \equiv (16)$, $(25) \equiv (26)$, $(35) \equiv (36)$, $(45) \equiv (46)$ besitzt die Bildfläche noch acht eigentliche singuläre Ebenen, die sie längs eines Kegelschnitts berühren, nämlich die Ebenen $(0) \equiv (D_1D_2D_3D_4)$, $(12) \equiv (D_1D_2\Delta_3\Delta_4)$, $(13) \equiv (D_1\Delta_2D_3\Delta_4)$, $(14) \equiv (D_1\Delta_2\Delta_3D_4)$, $(23) \equiv (\Delta_1D_2D_3\Delta_4)$, $(24) \equiv (\Delta_1D_2\Delta_3D_4)$, $(34) \equiv (\Delta_1\Delta_2D_3D_4)$, $(56) \equiv (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$. Die Tabelle zeigt, daß durch jeden der acht Doppelpunkte vier singuläre Tangentialebenen gehen. Viermal je zwei der Ebenen schneiden sich auf d, und zwar (0) und (56), (12) und (34), (13) und (24), (14) und (23).

Ist $\varkappa$ ein Kegel des Büschels $\mathfrak{K}_{II}$, bezeichnen ferner τ, τ' die beiden durch die Gerade (56) an $\varkappa$ gelegten Tangentialebenen, so stellt τ bzw. τ' die gemeinsame Berührungsebene aller Flächen des Gebüsches dar, die $\varkappa$ in der Spitze tangieren. Diese Flächen bilden aber zwei spezielle Netze, je definiert durch vier Grundpunkte (1, 2, 3, 4) und die dreifache Bedingung, daß alle Elemente eine gegebene Ebene (τ bzw. τ') in einem festen Punkte ($5 \equiv 6$) berühren. Im Raume entsprechen den beiden speziellen Netzen die beiden Ebenen, die die Bildfläche im Bildpunkte des Kegels $\varkappa$ berühren. Beim Kegel 5(12346) fallen τ und τ' zusammen; der zugehörige Punkt auf d ist somit kuspidal. Dasselbe gilt von den Bildpunkten der drei Ebenenpaare $\left(\begin{smallmatrix}512\\634\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}513\\624\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}514\\623\end{smallmatrix}\right)$ des Büschels $\mathfrak{K}_{II}$; denn alle Flächen, die z. B. die Schnittgerade (512, 634) berühren, gehören dem Netze an, das durch den dem Punkte 5 auf der Schnittgeraden benachbarten Punkt im Gebüsch bestimmt wird.

Die Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelgeraden und acht Doppelpunkten ist von Plücker[1]) gefunden worden.

---

1) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, 1. Abteilung, Nr. 213.

Digitized by Google

Ersetzen wir den Grundpunkt 1 durch ein Paar konjugierter Punkte in allgemeiner Lage zu den übrigen Grundpunkten, so fällt auf der Bildfläche der Doppelpunkt $(1) \equiv D_1$ weg. Verfahren wir ebenso bezüglich der Grundpunkte 2, 3, 4, so ergeben sich sukzessive Bildflächen mit einer Doppelgeraden und 6, 5, 4 Doppelpunkten; die jeweilige Konfiguration der Doppelpunkte ist unmittelbar im Gebüsche abzulesen. Z. B. im letzten Falle, wo das Gebüsch nur die beiden unendlich nahen Grundpunkte 5, 6 besitzt, gibt es wie oben vier Ebenenpaare e, deren einer Bestandteil die Gerade (56) enthält (vgl. S. 120, Note 2); ihnen korrespondieren die vier Doppelpunkte $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Jedes Ebenenpaar e bestimmt mit den beiden Kegeln aus $\mathfrak{K}_{II}$, die seine durch die Gerade (56) gehende Ebene berührt, je ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$. Die Bildfläche besitzt somit außer der Doppelgeraden noch acht einfache Geraden; jeder der Doppelpunkte Δ sendet zwei nach der Doppelgeraden aus. Die Ebene $(56) \equiv \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ ist die einzige singuläre Tangentialebene der Bildfläche.

Zu einer Bildfläche mit einer Doppelgeraden und sechs isolierten Doppelpunkten führt das Gebüsche, das vier in einer Ebene σ gelegene Grundpunkte besitzt; denn, wie sich unmittelbar ergibt, enthält ein solches Gebüsche ein Ebenenpaarbüschel $\mathfrak{E}_I$ mit der Grundebene σ, außerhalb dieses noch sechs Ebenenpaare, von denen jeder Bestandteil durch 2 der Grundpunkte geht (vgl S. 120, Note 2). Ein fünfter und ein sechster Grundpunkt des Gebüsches bewirken noch einen siebenten und einen achten Doppelpunkt der Bildfläche; im letzten Falle ist es wiederum die Plückersche Komplexfläche.

Besonders interessant vom Gesichtspunkte der Doppelgeraden der Bildfläche sind die Gebüsche, denen ein Ebenenpaarbüschel $\mathfrak{E}_{II}$ angehört. Sind F_1, F_2 zwei Flächen, die mit $\mathfrak{E}_{II}$ das Gebüsche konstituieren, so bilden alle Gebüschflächen, die die Achse p des Ebenenpaarbüschels berühren, die beiden Netze, die durch die Doppelpunkte der von F_1, F_2 auf p hervorgerufenen Involution im Gebüsche bestimmt werden. In den diesen beiden Netzen homologen Ebenen zählt d dreifach; es sind die beiden für alle Punkte der Doppelgeraden konstanten Tangentialebenen. Begegnen sich F_1, F_2 in einem Punkte von p, so koinzidieren jene beiden Netze und damit die beiden festen Berührungsebenen; die Doppelgerade wird Kuspidalgerade.

11. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, indem wir ein Gebüsche betrachten, daß zwei Paare unendlich naher Grundpunkte 5, 6 und 3, 4 besitzt. Die beiden Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$ mit den Spitzen $5 \equiv 6$ und $3 \equiv 4$ bilden sich sodann in zwei sich schneidende Doppelgeraden d_1, d_2 ab; der Treffpunkt korrespondiert dem Ebenenpaar, dessen Doppel-

Digitized by Google

linie die Gerade $(53) \equiv (64)$ ist. Hat das Gebüsche im besonderen noch zwei weitere Grundpunkte 1,2 (Mannigfaltigkeit: ∞^{16}), so befinden sich auf der Bildfläche noch vier isolierte Doppelpunkte D_1, D_2, Δ_1, Δ_2, entsprechend den beiden Kegeln (1), (2) und den beiden Ebenenpaaren $\binom{156}{234}$, $\binom{256}{134}$. Jeder der beiden Kegel konstituiert mit jedem der beiden Ebenenpaare ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$, das auch ein Element eines der beiden Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$ enthält; z. B. das von (1) und $\binom{156}{234}$ gebildete Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$ hat mit dem Kegelbüschel 2. Art $5 \equiv 6$ den Kegel gemeinsam, der die Ebene (156) berührt. Die vier Doppelpunkte D_1, D_2; Δ_1, Δ_2 sind somit die Gegenecken eines auf der Bildfläche gelegenen windschiefen Vierseits; die Gegenseiten $D_1\Delta_1$, $D_2\Delta_2$ treffen die Doppelgerade d_1, die Gegenseiten $D_1\Delta_2$, $D_2\Delta_1$ die Doppelgerade d_2. In den vier Ebenen $(d_1 D_1 \Delta_1)$, $(d_1 D_2 \Delta_2)$, $(d_2 D_1 \Delta_2)$, $(d_2 D_2 \Delta_1)$ zählt die jeweilige Seite des Vierseits doppelt. Die Fläche besitzt noch vier eigentliche singuläre Ebenen, nämlich die Ebenen (0), (12); (34) und (56), jene beiden mit den Doppelpunkten D_1, D_2, diese beiden mit Δ_1, Δ_2.

Ersetzen wir wiederum sukzessive die Grundpunkte 1, 2 durch Paare konjugierter Punkte, so reduziert sich die Zahl der isolierten Doppelpunkte auf 3 bzw. 2.

Zu Flächen mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden gelangt man auch, wenn man, von einem Gebüsche mit sechs Grundpunkten $1, \ldots 6$ ausgehend, zwei Grundpunkte, etwa 5, 6, unendlich nahe und diese mit zwei anderen, etwa 3, 4, in der nämlichen Ebene annimmt, oder indem man zweimal je vier, etwa 1234, 1256, in dieselbe Ebene legt.

12. Wir wenden uns dem neunfach speziellen Gebüche zu, von dessen sechs Grundpunkten 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 je unendlich benachbart sind. Das speziellste Element des Gebüsches ist die Doppelebene $\binom{135}{246}$. Entsprechend den drei Paaren unendlich naher Grundpunkte besitzt das Gebüsche drei Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$ (mit je zwei Paaren unendlich naher Grundkanten); ihnen entsprechen auf der Bildfläche drei Doppelgeraden d_1, d_2, d_3, die in einem Punkte, dem Bildpunkte der Doppelebene $\binom{135}{346}$, zusammenlaufen. Der Konkurrenzpunkt ist ein dreifacher Punkt der Fläche, da die Doppelebene in allen Büscheln, denen sie angehört, dreifach zählt. Jeder Punkt $\mathfrak{J}$ der Jacobischen Fläche bestimmt im Gebüsche ein Netz mit vier Paaren je unendlich naher Grundpunkte (Nr. 6). Die einem solchen Netze korrespondierende Tangentialebene der Bildfläche schneidet diese somit in zwei Kegelschnitten. Nur der eine ihrer vier Schnittpunkte, der Bildpunkt des Kegels $(\mathfrak{J})$, ist Berührungspunkt; die drei übrigen rühren von den drei

Digitized by Google

Doppelgeraden her. Es gibt wiederum nur vier eigentliche singuläre Ebenen, wie oben (Nr. 11) die Ebenen (0), (12), (34), (56). Eine interessante Figur ist das von den singulären Ebenen gebildete Tetraeder mit den in seinen Seitenflächen liegenden Kegelschnitten. Die Kanten, in denen sich die drei Ebenen (12), (34), (56) schneiden, korrespondieren Büscheln der Art Σ_{11}^{IV}, die Kante (12, 34) z. B. dem Büschel, dessen Grundkurve aus den Geraden (12), (34) und der von $5 \equiv 6$ nach diesen gezogenen (doppelt zu zählenden) Treffgeraden besteht. Hingegen entsprechen die drei in der Ebene (0) liegenden Kanten Büscheln der Art Σ_{13}^{I}, die Kante (0,12) z. B. dem Büschel, dessen Grundkurve in die durch die sechs Grundpunkte gelegte Raumkurve 3. Ordnung und deren Tangente (12) in $1 \equiv 2$ zerfällt. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders werden von einer der drei Doppelgeraden getroffen, (0, 13) und (34, 56) von d_1 in U_1, U_1', (0, 34) und (56, 12) von von d_2 in U_2, U_2', (0, 56) und (12, 34) von d_3 in U_3, U_3'. Die Punkte U_1, U_2, U_3, U_1', U_2', U_3' sind die Bildpunkte der Kegel 1 (23456), 3 (12456), 5 (12346) und der Ebenenpaare $\binom{134}{256}$, $\binom{356}{412}$, $\binom{512}{634}$. Aus der Eigenschaft der Büschel Σ_{11}^{IV} und Σ_{13}^{I} (Nr. 2) folgt, daß auf jeder der sechs Tetraederkanten, die beziehentlich solchen Büscheln korrespondieren, in dem jeweiligen Punkte U alle vier Schnittpunkte der Kante mit der Bildfläche vereinigt sind. In jeder Tetraederebene tangiert somit der Berührungskegelschnitt die drei in ihr liegenden Kanten in den Punkten U. Die Punkte U sind, wie wir noch bemerken, die Kuspidalpunkte der Doppelgeraden.

Die Fläche 4. Ordnung mit drei in einem Punkte zusammenlaufenden Doppelgeraden wird nach Steiner[1]) benannt. Sie ist die reziproke Polarfläche der Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten, die sich bei der Abbildung des allgemeinen Kegelschnittnetzes ergibt.[2])

Die Fläche Steiners ergibt sich als Bildfläche auch bei dem (gleichfalls neunfach speziellen) Gebüsche, von dessen sechs Grundpunkten 1 und 2 unendlich benachbart sind und sowohl mit 3, 4 als mit 5, 6 je in einer Ebene liegen.

13. Wir gehen nunmehr zur Betrachtung derjenigen Gebüsche über, die zu windschiefen Regelflächen 4. Grades als Bildflächen führen. Das allgemeinste dieser Gebüsche erhalten wir, wenn wir in einem Gebüsche mit sechs Grundpunkten, von denen 1, 2 unendlich benachbart sind, die übrigen vier $3 \equiv A$, $4 \equiv B$, $5 \equiv C$, $6 \equiv D$ in einer Ebene σ annehmen (Mannigfaltigkeit: ∞^{16}). Neben das Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$, dessen

1) Vgl. Weierstraß, Journal f. Math., 64, 77.

2) Vgl. Sturm, Verwandtschaften, III, S. 368, 369.

Digitized by Google

Elemente die Spitze $1 \equiv 2 \equiv S$ gemeinsam haben, tritt dann als ausgezeichnetes Gebilde im Gebüsche das Ebenenpaarbüschel $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$, das durch die Ebene σ und den Strahl $12 \equiv s$ definiert ist. Zwischen den Elementen beider Büschel besteht eine Korrespondenz [2, 2]. Jeder Kegel $\varkappa$ von $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ wird von zwei Ebenen σ', σ'' durch s berührt; $\varkappa$ konstituiert mit den beiden Ebenenpaaren (σ, σ') und (σ, σ'') je ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$. Und jede Ebene σ' durch s tangiert zwei Kegel des Büschels $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$; wiederum bestimmt das Ebenenpaar (σ, σ') mit jedem dieser beiden Kegel ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$. Die Bildfläche besitzt somit zwei windschiefe Doppelgeraden d, d', entsprechend $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ bzw. $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$, von denen jede von jedem ihrer Punkte zwei Erzeugende nach der jeweilig anderen sendet. Die vier Kuspidalpunkte auf d korrespondieren dem Kegel $S(A, B, C, D, s)$ und den drei Ebenenpaaren des Büschels $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$, die auf d' den 4 Ebenenpaaren (σ, sA), (σ, sB) $\sigma, sC)$, (σ, sD); denn jedes jener vier Elemente wird nur von einer Ebene durch s berührt, und die vier Ebenen sA, sB, sC, sD tangieren nur je einen Kegel von $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$. Die beiden Würfe der Kuspidalpunkte, der Verzweigungselemente der Korrespondenz [2, 2], erweisen sich unmittelbar als projektiv. Schneiden wir der Einfachheit halber die ganze Figur mit der Ebene σ, und bezeichnet $\mathfrak{S}$ den Spurpunkt von s in σ, AA die Tangente an den Kegelschnitt $(ABCD\mathfrak{S})$ im Punkte A, so folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse jener beiden Würfe aus der Projektivität:

$$A(A, B, C, D) \curlywedge \mathfrak{S}(A, B, C, D).$$

Die gefundene Regelfläche ist die in der Tabelle der windschiefen Regelflächen 4. Grades in Sturms Liniengeometrie, I, S. 52f. mit I bezeichnete.

Spezialisieren wir in dem eben betrachteten Gebüsche die Lage der sechs Grundflächen weiter in der Weise, daß wir auch die vier Grundpunkte 1, 2, 3, 4 in derselben Ebene annehmen, so erhält das Gebüsche ein zweites Ebenenpaarbüschel 1. Art, $\mathfrak{E}'_{\mathrm{I}}$, definiert durch eine Ebene $(1\,2\,3\,4) \equiv SAB$ und den Strahl $(56) \equiv CD$, somit eine dritte Doppelgerade d'', welche d im Bildpunkte des Ebenenpaares (SAB, SCD) und d' im Bildpunkte des Ebenenpaares (σ, SAB) begegnet. Die Zahl der Kuspidalpunkte auf d und d' hat sich bis auf je zwei vermindert; sie entsprechen den Ebenenpaaren (SAC, SBD) und (SAD, SBC) von $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ bzw. (σ, sC) und (σ, sD) von $\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}$ (Fläche VII in der erwähnten Tabelle).

Dieselbe Fläche ergibt sich, wenn wir von den sechs Gebüschgrundpunkten wiederum 1, 2 unendlich nahe, 3, 4, 5, 6 in einer Ebene, außerdem aber auch 3, 4 unendlich benachbart annehmen.

Digitized by Google

14. Zu einer Regelfläche 4. Grades führt ferner das neunfach spezielle Gebüsche, das durch zwei Doppelebenen δ_1, δ_2 und zwei weitere Flächen F_1, F_2 definiert ist, die die Schnittgerade $(\delta_1 \delta_2) \equiv p$ in einem Punkte P berühren. Die Ebenen δ_1, δ_2 lösen sich von der Jacobischen Fläche 4. Ordnung ab. Da die konjugierte Gerade jedes Punktes des Raumes bezüglich des Ebenenpaarbüschels $\mathfrak{E}_{II} \equiv (\delta_1, \delta_2)$ mit p zusammenfällt, so ist die Restfläche 2. Ordnung mit dem Ort der Punkte identisch, deren konjugierte Geraden bezüglich des Büschels (F_1, F_2) den Strahl p treffen. Bezeichnen p_1, p_2 die Polaren von p bezüglich F_1, F_2, beide den Strahl p in P treffend, so beschreiben die Polarebenen der Punkte von p inbezug auf F_1, F_2 projektive Büschel um p_1, p_2, in denen zwei Ebenen einander korrespondieren, die je zu dem nämlichen Punkte auf p gehören. Das Erzeugnis dieser projektiven Ebenenbüschel, ein Kegel 2. Grades $\mathfrak{j}^{(2)}$ mit der Spitze P, zu dessen Kanten auch der Strahl p als Schnittgerade der entsprechenden Tangentialebenen (p, p_1), (p, p_2) von F_1, F_2 in P gehört, ist die gesuchte Restfläche. Denn ist Y irgend ein Punkt auf $\mathfrak{j}^{(2)}$, X der Punkt auf p, dessen Polarebenen sich in PY schneiden, so gehen auch umgekehrt die Polarebenen von Y bezüglich F_1, F_2 durch X. Bezeichnet ε die Ebene (Y, p), ε' die in der Involution (δ_1, δ_2) gepaarte Ebene, so bestimmt das Ebenenpaar $(\varepsilon, \varepsilon')$ mit dem Kegel, dessen Spitze Y ist, ein Büschel $\mathfrak{K}_I$ von Kegeln, die sich längs YP berühren. Die Kegel des Gebüsches ordnen sich somit in ∞^1 Büschel $\mathfrak{K}_I$ mit Grundkurven, deren gerade Bestandteile die Kanten des Jacobischen Kegels $\mathfrak{j}^{(2)}$ bilden. Jedes Ebenenpaar $(\varepsilon, \varepsilon')$ des Büschels $\mathfrak{E}_{II}$ gehört entsprechend den beiden (außer p) in $(\varepsilon, \varepsilon')$ liegenden Kanten des Kegels $\mathfrak{j}^{(2)}$ zwei solchen Büscheln $\mathfrak{K}_I$ an. Eine Ausnahme hiervon bilden die beiden Doppelebenen δ_1, δ_2, bei denen sich die beiden Büschel $\mathfrak{K}_I$ je in einem Büschel sich vierkantig berührender Kegel vereinigen, und das Ebenenpaar $(\varepsilon_0, \varepsilon_0')$, dessen einer Bestandteil den Kegel $\mathfrak{j}^{(2)}$ längs p tangiert.

Auf der Bildfläche korrespondiert dem Ebenenpaarbüschel $\mathfrak{E}_{II}$ eine dreifache Gerade r; denn jedes Büschel, dem irgendein Ebenenpaar $(\varepsilon, \varepsilon')$ angehört, ist von der Art Ω_{13}^{II}. Von jedem Punkte R der dreifachen Geraden strahlen im allgemeinen zwei Erzeugende g_1, g_2 aus. Die beiden Erzeugenden, die von den Bildpunkten der Doppelebenen δ_1, δ_2 ausgehen, haben sich beziehentlich vereinigt; hingegen ist die eine der beiden Erzeugenden, deren Ausgangspunkt der Bildpunkt des Ebenenpaares $(\varepsilon_0, \varepsilon_0')$ ist, mit r zusammengefallen. Die Ebenen (Rg_1), (Rg_2) stellen zwei der drei Tangentialebenen der Bildfläche in R dar; die dritte, für alle Punkte der dreifachen Geraden konstante, Ebene

Digitized by Google

entspricht dem ausgezeichneten Netze, dessen Elemente den Strahl p gemeinsam haben, da in allen Büscheln dieses Netzes — von der Art Ω_{11}^{IV} — das jeweilige Ebenenpaar $(\varepsilon, \varepsilon')$ vierfach zählt.

Bezeichnet ν irgendein Netz mit zwei sich schneidenden Kegelbüscheln $\mathfrak{K}_I$, am einfachsten definiert durch ein Ebenenpaar $(\varepsilon_\nu, \varepsilon'_\nu)$ von $\mathfrak{E}_{II}$ und zwei Kegel, deren Spitzen beziehentlich in ε_ν und ε'_ν liegen, ist ferner ω die ν korrespondierende doppelte Tangentialebene, die die Bildfläche außer in den beiden vom Bildpunkte R_ν des Ebenenpaares $(\varepsilon_\nu, \varepsilon'_\nu)$ ausgehenden Erzeugenden g_1, g_2 in einem durch den Schnittpunkt (g_1, g_2) gehenden Kegelschnitt $\omega^{(2)}$ schneidet, so wirft jedes weitere Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$ in ν ein Element hinein, dessen Bildpunkt dem Kegelschnitt $\omega^{(2)}$ angehört. Zwischen den Punkten der dreifachen Geraden r und des Kegelschnitts $\omega^{(2)}$ besteht eine Korrespondenz [1, 2]. Denn in jedem der beiden Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$, denen irgendein Ebenenpaar $(\varepsilon, \varepsilon')$ von $\mathfrak{E}_{II}$ angehört, findet sich ein Kegel, dessen Bildpunkt auf $\omega^{(2)}$ liegt, und jeder einem Punkte von $\omega^{(2)}$ entsprechende Kegel bestimmt mit demjenigen Ebenenpaar aus $\mathfrak{E}_{II}$, dessen einer Bestandteil durch seine Spitze geht, ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$. Die vorliegende Fläche stellt sich somit als Erzeugnis einer Korrespondenz [1, 2] dar, die zwischen den Punktreihen einer Geraden r und eines ihr in einem Punkte begegnenden Kegelschnitts $\omega^{(2)}$ festgesetzt ist (Fläche XI bei Sturm).

15. Gleichfalls von der Mannigfaltigkeit ∞^{15} wie das eben betrachtete Gebüsche ist dasjenige, das durch ein Netz $\mathfrak{N}(u, u')$ (Nr. 7) und einen Kegel K definiert ist, dessen Spitze S auf einer der beiden Grundgeraden des Netzes $\mathfrak{N}(u, u')$, etwa auf u, liegt. K bestimmt mit dem Ebenenpaar (α, α'), dessen einer Bestandteil die Ebene $\alpha' \equiv Su'$ ist, ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$. Es gelingt nun wiederum leicht, zwischen den Ebenenpaaren des Netzes $\mathfrak{N}(u, u')$ und den Elementen des Büschels $\mathfrak{K}_{II}$ eine Korrespondenz [2, 2] festzustellen. Jede Ebene ξ durch u berührt zwei Kegel von $\mathfrak{K}_{II}$; mit ihnen bestimmt das Ebenenpaar (ξ, ξ') je ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$. Und jeder Kegel $\mathfrak{K}_{II}$ wird von zwei Ebenen durch u tangiert, so daß auch von ihm zwei Kegelbüschel $\mathfrak{K}_I$ ausgehen. Auf der Bildfläche korrespondiert dem Ebenensystem des Netzes $\mathfrak{N}(u, u')$ ein Doppelkegelschnitt $d^{(2)}$, dem Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$, in dessen Spitze S zwei Grundpunkte des Gebüsches vereinigt sind, eine Doppelgerade d', die $d^{(2)}$ in dem Bildpunkte A des Ebenenpaares (α, α_1) begegnet.[1]) Von jedem Punkte jedes der beiden Doppelgebilde gehen zwei Erzeugende

1) Hebt man die spezielle Lage des konstituierenden Kegels K zu u auf, so ergibt sich als Bildfläche eine Nicht-Regelfläche mit einem Doppelkegelschnitt und vier isolierten Doppelpunkten.

Digitized by Google

nach dem jeweilig anderen aus. Die Korrespondenz [2, 2] ist jedoch spezieller Natur. Denn dem ausgezeichneten Ebenenpaar (α, α') entspicht, gleichgültig zu welchem der beiden Gebilde es gerechnet wird, immer nur ein Element im anderen, und zwar (α, α') selbst; A ist auf $d^{(2)}$ und d' Verzweigungs- und Doppelpunkt zugleich. Außer A besitzen $d^{(2)}$ und d' somit nur noch je zwei Verzweigungspunkte[1]); auf $d^{(2)}$ sind es die Bildpunkte der beiden Ebenenpaare, deren durch u gehender Bestandteil je einen der beiden auf u' liegenden Gebüschgrundpunkte aufnimmt, auf d' die Bildpunkte der beiden weiteren Ebenenpaare des Büschels $\mathfrak{N}_{II}$ (Fläche V in der Tabelle Sturms).

16. Zum Schluß behandeln wir die Fälle, in denen sich durch Ablösung einer Ebene als eigentliche Bildfläche eine Fläche 3. Ordnung ergibt. Wir unterscheiden zwei Typen solcher Gebüsche. Ein Gebüsche der ersten Gruppe ist definiert durch drei Kegel mit der gemeinsamen Spitze P, die aber nicht demselben Büschel angehören, und irgendeine Fläche F (Mannigfaltigkeit: ∞^{18}). Ist π wiederum die Polarebene von P bezüglich F, so sind P und π bezüglich aller Elemente des Gebüsches polar. In die Ebene π schneidet dieses ein allgemeines Kegelschnittgebüsche ein. Wiederum können die Geradenpaare des letzteren nur von Kegeln des Flächengebüsches herrühren, und umgekehrt gehört die Spitze jedes Kegels des Gebüsches, abgesehen von den Elementen des Kegelnetzes (P), der Ebene π an. Das Problem der Abbildung des vorliegenden $F^{(2)}$-Gebüsches kommt hiernach auf die Abbildung des in π liegenden allgemeinen Kegelschnittgebüsches zurück. Diese führt aber auf die Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenpunkten.[2]) Durch die dem Netze (P) korrespondierende Ebene wird die eigentliche Bildfläche zur vollen Ordnung 4. ergänzt. Die Schnittkurve beider ist eine allgemeine Kurve 3. Ordnung.

Haben die drei konstituierenden Kegel eine Kante gemeinsam, die die vierte Konstituente F berührt, so schneidet das so definierte $F^{(2)}$-Gebüsche in die Polarebene π, die durch den Berührungspunkt geht, ein Kegelschnittgebüsche mit einem Grundpunkte ein. Als Bildfläche ergibt sich somit die Regelfläche 3. Grades mit einer doppelten und einer einfachen Leitgeraden.[3])

17. Ein Gebüsche des zweiten Typs ist charakterisiert durch zwei Paare unendlich naher Grundpunkte 1, 2 und 3, 4, die in einer Ebene σ liegen. Ausgezeichnete Büschel eines solchen Gebüsches sind die beiden Kegelbüschel $\mathfrak{N}_{II}$ mit den Spitzen $1 \equiv 2$ und $3 \equiv 4$ und

1) Vgl. Sturm, Verwandtschaften, I, S. 263.
2) Vgl. Sturm, Verwandtschaften, III, 368, 369.
3) Vgl. Sturm, Verwandtschaften, III. S. 369, 370.

Digitized by Google

das Ebenenpaarbüschel $\mathfrak{E}_I$ mit der Grundebene σ. Alle drei gehören dem Netze an, das durch irgendeinen Punkt der Geraden $(13) \equiv (24)$ im Gebüsche bestimmt ist, dem Inbegriff aller Kegel, welche eine gegebene Ebene (σ) längs einer gegebenen Geraden $(13 \equiv 24)$ berühren, und außerdem noch zwei lineare Bedingungen erfüllen. Durch Ablösung der diesem Kegelnetz entsprechenden Ebene bleibt als Bildfläche eine Fläche 3. Ordnung zurück; sie besitzt zwei, drei oder vier Knotenpunkte, je nachdem das Gebüsche außer den Grundpunkten 1, 2, 3, 4 keinen weiteren, einen oder noch zwei Grundpunkte hat. Wir wollen uns auf eine Untersuchung des mittleren Falles beschränken. Ist 5 der fünfte Grundpunkt, sind ferner e_1, e_2 die beiden Ebenenpaare des Gebüsches außerhalb $\mathfrak{E}_I$, e_1 mit der Ebene (345), e_2 mit (125), so bilden sich e_1, e_2 und (5) in die drei Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 der Restfläche 3. Ordnung ab. Die drei quaternären Geraden $q_1 \equiv D_2D_3$, $q_2 \equiv D_3D_1$, $q_3 \equiv D_1D_2$ korrespondieren den Kegelbüscheln 1. bzw. 2. Art, die jene drei Elemente zu zweien bestimmen. Die Bildgeraden u_1 vom Kegelbüschel 2. Art $1 \equiv 2$, u_2 von Kegelbüschel 2. Art $3 \equiv 4$, u_3 von $\mathfrak{E}_I$, die auf der Gesamtfläche doppelt zählen, sind die drei unären Geraden der Bildfläche 3. Ordnung. Man verifiziert leicht im Gebüsche, daß q_1 und u_1, q_2 und u_2, q_3 und u_3 einander begegnen. In den Ebenen (q_1, u_1), (q_2, u_2), (q_3, u_3) zählt die jeweilige quaternäre Gerade doppelt. Das Ebenenpaar e_1 bestimmt mit den beiden Kegeln aus $1 \equiv 2$, die der durch die Gerade (12) gehende Bestandteil berührt, je ein Kegelbüschel $\mathfrak{K}_{II}$. Von D_1 gehen somit zwei binäre Geraden b_1, b_1' nach u_1, ebenso von D_2 zwei binäre Geraden b_2, b_2' nach u_2. Berücksichtigt man ferner, daß es in $\mathfrak{E}_I$ zwei Ebenenpaare gibt, deren durch die Achse gehender Bestandteil den Kegel (5) berührt, so erhält man auch die von D_3 ausstrahlenden beiden binären Geraden b_3, b_3', die u_3 treffen. Mit den drei quaternären Geraden q, den sechs binären Geraden b und den drei unären Geraden u ist die Konfiguration der Geraden der Bildfläche 3. Ordnung erschöpft. Jede Ebene, die eine Gerade q mit einer der vier an ihr hängenden binären Geraden verbindet, nimmt immer noch eine der drei übrigen auf, z. B. die Ebene $(q_1 b_2)$ eine der beiden Geraden b_3, b_3'.

Breslau, den 6. November 1909.

Digitized by Google

Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene. I.

Von WILHELM BLASCHKE in Greifswald.

Es sollen hier einige Gegenstände der von E. Laguerre so genannten „Géométrie de direction“[1]) erörtert werden, wobei als Hilfsmittel der Untersuchung eine Abbildung der orientierten Geraden der Ebene auf die Punkte eines Drehzylinders verwendet wird. Da diese Laguerresche Geometrie der Geometrie der Möbiusschen Kreisverwandtschaften in gewissem Sinne dual gegenübersteht[2]), jedoch viel weniger bekannt ist als diese, anderseits aber mit neueren geometrischen Untersuchungen in innigem Zusammenhang steht, so dürfte eine möglichst elementare Darstellung ihrer einfachsten Fragen vielleicht nicht unwillkommen sein.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf *reelle, eigentliche* Elemente.

1. Beginnen wir mit einigen *Definitionen.*

Eine gerade Linie mit einem bestimmten positiven Durchlaufungssinn, soll „orientierte Gerade“ oder kürzer „*Speer*“ genannt werden. Jede Gerade trägt zwei verschiedene Speere, die durch den Prozeß der „*Umkehrung*“ miteinander vertauscht werden.

Zwei Speere heißen *gleichsinnig parallel,* wenn die von ihnen überdeckten Geraden parallel laufen und die (positiven) Durchlaufungssinne übereinstimmen.

Die Entfernung $\overline{pq}$ zweier Punkte p, q eines Speeres $\mathfrak{S}$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Richtung von p nach q mit dem positiven Sinne von $\mathfrak{S}$ zusammenfällt oder nicht.

Es soll ferner derjenige *Umdrehungssinn um einen Speer* positiv genannt werden, der einem Beobachter nach links zu weisen scheint, wenn er so auf dem Speere liegt, daß der positive Durchlaufungssinn mit der Richtung von den Füßen zum Kopfe übereinstimmt.

Betrachten wir nur die Speere einer festen Ebene ξ, die wir etwa „Grundebene“ nennen wollen, so können wir die *Entfernung* $[p\mathfrak{S}]$ *eines Punktes* p *von einem Speere* $\mathfrak{S}$ auch dem Vorzeichen nach festlegen,

1) Vgl. Enzyklopädie d. m. W. III A B 4 b. G. Fano, S. 318, Nr. 14.

2) Ein vollständig duales Entsprechen findet man in der nichteuklidischen Geometrie, wie neuerdings Herr H. Beck ausgeführt hat. Am. Trans. Vol. XI. 4. 1910.

Digitized by Google

wenn wir die Vereinbarung treffen, daß sie dann positiv [negativ] gezählt werden soll, wenn $\mathfrak{S}$ um p im positiven [negativen] Sinne dreht.

Der positive Umdrehungssinn in ζ kann wieder dadurch definiert werden, daß wir die Normalen von ζ mit einem bestimmten positiven Sinne versehen. Es sei $\mathfrak{Z}$ eine solche positive Normale von ζ im Punkte o, dann soll also der nach dem früheren durch den Speer $\mathfrak{Z}$ bestimmte positive Umdrehungssinn um o mit dem positiven Umdrehungssinn in ζ übereinstimmen.

Die Gesamtheit aller Speere, die von einem festen Punkte p eine bestimmte Entfernung r haben, wollen wir einen *„Zykel"* nennen. Die Speere eines Zykels umhüllen im allgemeinen ($r \neq 0$) einen mit einem Durchlaufungssinn versehenen Kreis, im besonderen ($r = 0$) gehen sie alle durch den Mittelpunkt p des Zykels hindurch. Solche Zykel seien *„Nullzykel"* genannt. Die (mit einem Vorzeichen versehene) Größe r heißt der Radius des Zykels.

Eine Transformation $\Sigma_\zeta\{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}^*\}$ der Speere unserer Grundebene ζ, bei der jeder Speer $\mathfrak{S}$ in einen zu ihm gleichsinnig parallelen Speer $\mathfrak{S}^*$ übergeht, und zwar so, daß die Entfernung der Punkte des Speeres $\mathfrak{S}$ von dem zugehörigen Speere $\mathfrak{S}^*$ den konstanten Wert ϱ hat, wird die *Dilatation durch die Strecke* ϱ genannt.

Die Dilatation durch die Strecke ϱ führt einen Zykel mit dem Radius r in einen mit dem Radius $r^* = r + \varrho$ über.

Man sieht, die Orientierung der Geraden zu Speeren hat den Erfolg, daß die Dilatationen zu *eineindeutigen* Transformationen werden.

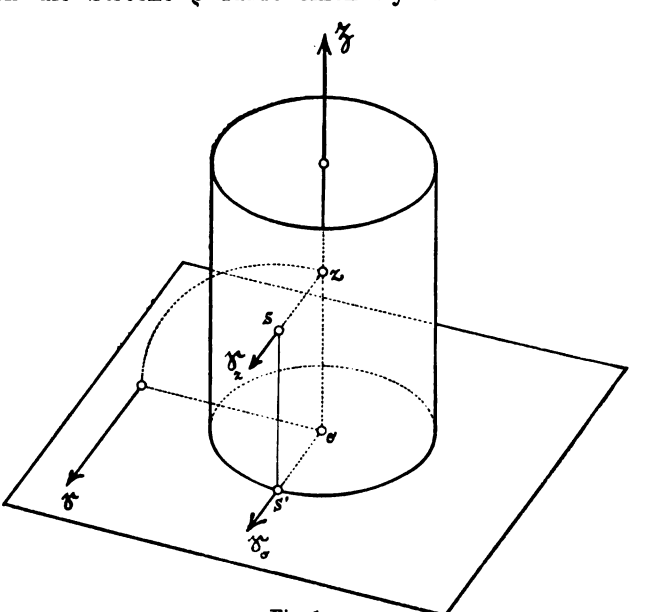


Fig. 1.

2. Nunmehr soll *die Abbildung* $\Phi^{-1}\{\mathfrak{S} \rightarrow s\}$ *der Speere* $\mathfrak{S}$ *der Grundebene* ζ *auf die Punkte* s *eines Drehzylinders* Z angegeben werden, die die Grundlage unserer folgenden Betrachtungen bildet.

Z sei der Drehzylinder mit dem Halbmesser ± 1, der den Speer $\mathfrak{Z}$, welcher im Punkte o auf ζ normal steht, als Drehachse hat.

Digitized by Google

Der Bildpunkt s eines Speeres $\mathfrak{S}$ wird auf folgende Art konstruiert (vgl. Fig. 1). Man zieht zu dem Speere $\mathfrak{S}$ von ζ zunächst durch o den gleichsinnig parallelen Speer $\mathfrak{S}_0$, dann dreht man $\mathfrak{S}$ um $\mathfrak{S}_0$ durch einen *negativen* rechten Winkel nach $\mathfrak{S}_Z$; der „Austrittspunkt" von $\mathfrak{S}_Z$ aus dem Zylinder Z ist der gesuchte Punkt s.

Umgekehrt findet man in der Abbildung $\Phi\{s \to \mathfrak{S}\}$ den zu einem Punkte s von Z gehörigen Speer $\mathfrak{S}$ von ζ durch Umkehrung unserer Konstruktion ebenfalls auf eindeutige Weise.

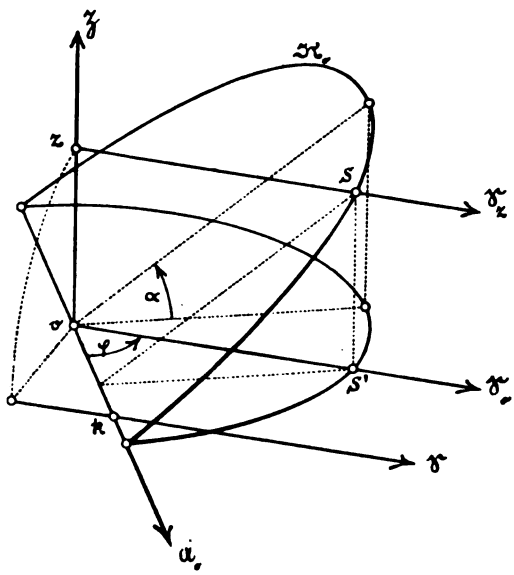


Fig. 2.

Wir erkennen demnach:

Durch unsere Abbildung Φ werden die Punkte s des Zylinders ausnahmslos eineindeutig auf die Speere $\mathfrak{S}$ von ζ bezogen.[1])

3. Von der Abbildung Φ beweisen wir zunächst folgende Eigenschaft.

Durchläuft der Punkt s auf dem Zylinder Z einen irreduziblen Kegelschnitt[2]) *K_0, dessen Ebene ε_0 durch den Punkt o hindurchgeht, so beschreibt der zugehörige Speer $\mathfrak{S}$ einen Nullzykel $\mathfrak{N}_0$ von ζ.*

Wir orientieren zunächst die Spur der Ebene ε_0 von K_0 auf der Grundebene ζ in beliebiger Weise zu einem Speere $\mathfrak{A}_0$ (vgl. Fig. 2). Da nach unseren Festsetzungen (Nr. 1) der positive Drehungssinn um $\mathfrak{A}_0$ definiert ist, so ist demnach der Winkel α von ζ mit ε_0 (auch seinem Zeichen nach) bis auf Vielfache eines gestreckten Winkels bestimmt. Es sei nun s ein beliebiger Punkt auf K_0, der aber nicht in ζ liegen möge, s' sei seine orthogonale Projektion auf ζ. Der Winkel φ des Speeres $\mathfrak{A}_0$ mit dem Speere $\mathfrak{S}_0 = \overrightarrow{os'}$ ist bis auf Vielfache eines vollen Winkels bestimmt. Schließlich sei $\mathfrak{S}$ der zum Punkte s in der Abbildung Φ gehörige Speer und k sein Schnittpunkt mit $\mathfrak{A}$.

---

1) Natürlich hat man sich den Zylinder Z ins Unendliche erstreckt zu denken. In der Figur ist er nur der Anschaulichkeit halber abgeschnitten gezeichnet.

2) Im folgenden sei unter „Kegelschnitt" immer *irreduzibler* Kegelschnitt verstanden.

Digitized by Google

Wir finden

$$\overline{s's} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\varphi,$$

$$\overline{ok} = [o\mathfrak{S}]\,\frac{1}{\sin\varphi} = \overline{s's}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Der Schnittpunkt k von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ bleibt also fest, wenn s auf K_0 fortrückt, d. h. die zu den Punkten s von K_0 gehörigen Speere $\mathfrak{S}$ gehören dem Nullzykel $\mathfrak{K}_0$ mit dem Mittelpunkt k an, w. z. b. w.

Unsere Überlegung ist natürlich wieder ohne weiteres umkehrbar, so daß auch zu jedem Nullzykel von ζ ein Kegelschnitt auf Z gehört, dessen Ebene durch o hindurchgeht.

4. Verschieben wir den Zylinder Z in sich um die Strecke $\mathfrak{r}$, deren Vorzeichen durch die Orientierung von $\mathfrak{Z}$ festgelegt ist. Diese Verschiebung $\Delta_Z\{s \to s^*\}$ führt jeden Punkt s des Zylinders in einen Punkt s^* derselben Erzeugenden über, so daß die Strecke $\overline{ss^*} = \mathfrak{r}$ ist.

Wir wollen die zugehörige Transformation $\Delta_\zeta\{\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^*\}$ der Speere von ζ aufsuchen. Um zu einem Speere $\mathfrak{S}$ in der Abbildung Δ_ζ den entsprechenden Speer $\mathfrak{S}^*$ zu finden, haben wir so vorzugehen. Zuerst sucht man den zu $\mathfrak{S}$ in der Abbildung Φ^{-1} gehörigen Punkt s des Zylinders Z, dann den Punkt s^* von Z, der dem Punkte s in der Transformation Δ_Z entspricht, und endlich hat man den zu s^* vermöge Φ zugeordneten Speer $\mathfrak{S}^*$ zu konstruieren. Diesen Vorgang können wir symbolisch so kennzeichnen

$$\Delta_\zeta = \Phi^{-1}\Delta_Z\Phi.$$

Es ergibt sich, daß Δ_ζ die Dilatation durch die Strecke $\varrho = \mathfrak{r}$ ist.

5. Die Betrachtung der Nr. 4 führt uns dazu, das Ergebnis der Nr. 3 zu verallgemeinern.

Wir verschieben den Kegelschnitt K_0 auf Z um die Strecke ϱ nach K, so daß also der Mittelpunkt m von K auf $\mathfrak{Z}$ die Strecke $\overline{om} = \varrho$ bestimmt. Der Nullzykel $\mathfrak{K}_0$ wird durch die zugehörige Dilatation in einen Zykel $\mathfrak{K}$ mit dem Radius ϱ und demselben Mittelpunkt k übergeführt.

Es findet sich mithin:

Die Kegelschnitte K auf Z sind durch Φ ausnahmslos umkehrbar eindeutig auf die Zykel $\mathfrak{K}$ von ζ bezogen.

Stellen wir uns die folgende Aufgabe: Es sei ein Kegelschnitt K gegeben, man soll den Mittelpunkt k des zugehörigen Zykels $\mathfrak{K}$ konstruieren.

Die Formeln der Nr. 3 bestätigen die Richtigkeit der folgenden Lösung. Man lege durch den Punkt m_{-1} auf $\mathfrak{Z}$, dessen Abstand von

Digitized by Google

$\overline{om}_{-1}$ von o gleich -1 ist, eine Ebene ε_{-1} parallel zur Ebene ε von K. Von der Spur der Ebene ε_{-1} auf ζ suchen wir den Pol bezüglich des Spurkreises von Z auf ζ und drehen diesen Pol um $\mathfrak{Z}$ durch einen rechten Winkel; der so gefundene Punkt ist k.

Geben wir nun eine Gegenüberstellung entsprechender Gebilde von Z und ζ.

$$\xrightarrow{\Phi}$$

Zylinder.	*Grundebene.*
Punkt.	Speer.
Punkte einer Erzeugenden.	Gleichsinnig parallele Speere.
Kegelschnitt.	Zykel.
Kegelschnitte in parallelen Ebenen.	Konzentrische Zykel.
Konzentrische Kegelschnitte.	Zykel mit gleichem Radius.
Schiebung.	Dilatation.
Spiegelung von Z an o.	Umkehrung.

6. Wir haben bemerkt, daß die Transformation T_Z des Zylinders Z, die jeden seiner Punkte in den bezüglich o symmetrischen überführt, durch die Abbildung Φ übergeht in die Transformation $T_\zeta = \Phi^{-1} T_Z \Phi$ der Speere von ζ, die jeden Speer mit dem gegensinnig zusammenfallenden vertauscht und die wir kurz „Umkehrung“ nennen.

Diese Überlegung kann man nun wieder verallgemeinern. Es sei p ein im übrigen beliebiger Punkt des Raumes, von dem wir nur annehmen wollen, daß er weder mit o zusammenfalle, noch auf dem Zylinder Z gelegen sei. Dann können wir auf Z eine involutorische[1]) Vertauschung $T_Z\{s \leftrightarrow s^*\}$ definieren, indem wir zwei Punkte s, s^* einander zuordnen, die mit p in gerader Linie liegen. Wir stellen Eigenschaften von T_Z und der zugehörigen Abbildung in ζ $T_\zeta = \Phi^{-1} T_Z \Phi$ einander gegenüber.

Zylinder.	*Grundebene.*
T_Z ist eine Punkttransformation.	T_ζ ist eine Speertransformation.
T_Z führt Punkte in einer Erzeugenden wieder in Punkte einer Erzeugenden über.	T_ζ *führt gleichsinnig parallele Speere wieder in solche über.*
T_Z vertauscht die Kegelschnitte von Z untereinander.	T_ζ *vertauscht die Zykel von* ζ *untereinander.*

1) D. h. es ist $T_Z = T_Z^{-1}$.

Digitized by Google

Zylinder.	*Grundebene.*
Bei T_Z bleibt jeder der ∞^2 Kegelschnitte als Ganzes in Ruhe, deren Ebenen durch p hindurchgehen.	Durch T_ζ werden ∞^2 Zykel in sich transformiert.
Unter diesen gibt es insbesonders ∞^1 Kegelschnitte, deren Ebenen auch durch o gehen.	Unter diesen gibt es insbesonders ∞^1 Nullzykel.
Ihre Ebenen bilden ein Ebenenbüschel.	Ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden G.

Die Richtigkeit der letzten Behauptung rechts folgt daraus, daß die ∞^1 Nullzykel zwei gegensinnig zusammenfallende Speere gemein haben.

7. Jetzt sind wir schon in der Lage, die Konstruktion der Abbildung T_ζ in der Ebene ζ ausführen zu können, ohne auf den Zylinder zurückgreifen zu müssen.

Nehmen wir an, es sei uns die Gerade G gegeben und außerdem ein Zykel $\mathfrak{K}$, der durch T_ζ in sich transformiert wird. Geht man für einen Augenblick auf den Zylinder Z zurück, so erkennt man, daß die Bestimmungsstücke G und $\mathfrak{K}$ voneinander unabhängig sind und zur Festlegung von T_ζ ausreichen, denn durch G ist die Gerade op bestimmt und durch $\mathfrak{K}$ ein Kegelschnitt K von Z, dessen Ebene mit der Geraden op den Punkt p gemein hat.

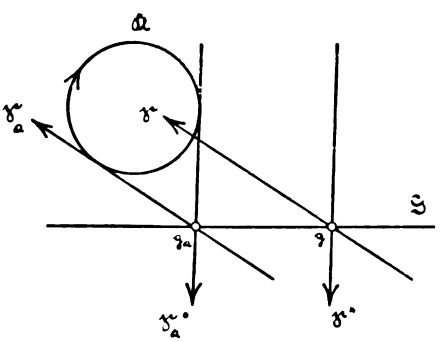


Fig. 3.

Wir können nun in einfachster Weise zu jedem Speere $\mathfrak{S}$ von ζ den vermöge T_ζ entsprechenden $\mathfrak{S}^*$ auffinden (vgl. die Fig. 3). Zuerst suchen wir den (einzigen) Speer $\mathfrak{S}_\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{K}$ auf, der zu $\mathfrak{S}$ *gleichsinnig* parallel ist. $\mathfrak{S}_\mathfrak{K}$ treffe G im Punkte $g_\mathfrak{K}$.[1]) Der zugehörige Speer $\mathfrak{S}^*_\mathfrak{K}$ muß ebenfalls dem Nullzykel mit dem Mittelpunkte $g_\mathfrak{K}$ und dem Zykel $\mathfrak{K}$ angehören, ist also, da $\mathfrak{S}_\mathfrak{K}$ im allgemeinen nicht mit $\mathfrak{S}_\mathfrak{K}$ zusammenfällt, mit dem zweiten Speere von $\mathfrak{K}$ identisch, der durch $g_\mathfrak{K}$ hindurchgeht. Der gesuchte Speer $\mathfrak{S}^*$ geht durch den Schnittpunkt g von $\mathfrak{S}$ und G und ist zu $\mathfrak{S}^*_\mathfrak{K}$ gleichsinnig parallel.

1) Hier schließen wir den Fall aus, daß $\mathfrak{S}$ und G parallel sind, der sich nachträglich leicht erledigen läßt.

Digitized by Google

Es treten nun die Analogien zutage, die zwischen der gefundenen Abbildung T_ζ, die wir *Laguerresche Spiegelung* nennen wollen, und der Transformation durch reziproke Radien oder Inversion bestehen.

Inversion.	*Laguerresche Spiegelung.*
Die Inversion führt Punkte in Punkte über	Die Laguerresche Spiegelung führt Speere in Speere über
und Kreise in Kreise.	und Zykel in Zykel.
Sie läßt ∞^2 Kreise als Ganzes in Ruhe.	Sie läßt ∞^2 Zykel als Ganzes in Ruhe.
Entsprechende Punkte m, m^* liegen mit einem festen Punkte n in gerader Linie.	Entsprechende Speere $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^*$ schneiden eine feste Gerade G in demselben Punkte.
Zwischen den Entfernungen $\overline{nm}$, $\overline{nm^*}$ besteht eine Beziehung $\overline{nm} \cdot \overline{nm^*} = \text{const.}$	Zwischen den Winkeln $[G\mathfrak{S}]$ und $[G\mathfrak{S}^*]$ besteht eine Beziehung $\operatorname{tg}\frac{[G\mathfrak{S}]}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{[G\mathfrak{S}^*]}{2} = \text{const.}$

Je nachdem der Punkt p außerhalb oder innerhalb des Zylinders Z gelegen ist, bleiben bei der Transformation T_ζ entweder $2 \cdot \infty^1$ Speere, die sich auf zwei verschiedene Büschel gleichsinnig paralleler Speere verteilen, oder kein (reeller) Speer in Ruhe.

8. Es soll nun kurz darauf hingewiesen werden, wie auch die Eigenschaft der Inversion, (uneigentlich) konform oder winkeltreu zu sein, bei der Laguerreschen Spiegelung ihr Analogon hat.

Wir vereinbaren zunächst einen positiven Drehungssinn in den Tangentialebenen der Punkte des Zylinders. Zu dem Zwecke orientieren wir die Normalen des Zylinders so, daß der positive Sinn einer solchen Normalen im Zylinderpunkte s von s nach s weist, wenn wir mit s ihren Schnittpunkt mit der Drehachse $\mathfrak{Z}$ bezeichnen (Fig. 1).

Es seien nun auf dem Zylinder Z zwei Kurven C_1 und C_2 gezogen[1]), die sich in s treffen und deren Tangenten T_1 und T_2 in s von der Zylindererzeugenden E durch s verschieden sein mögen. Wir wollen die (unzweideutig bestimmte) Größe

$$\operatorname{cotg}[T_2 E] - \operatorname{cotg}[T_1 E] = \tau$$

den *Pseudowinkel* der Kurven C_1, C_2 im Punkte s nennen.

1) Unter „Kurve" sei etwa *reeller Zug einer analytischen Kurve* verstanden.

Digitized by Google

Einer Kurve C von Z entspricht eine Schar von ∞^1 Speeren in ξ, die wir als „orientierte Kurve“ bezeichnen wollen.[1]) Den beiden Kurven C_1 und C_2 entsprechen zwei orientierte Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die den Speer $\mathfrak{S}$ gemein haben, der dem Punkte s durch Φ zugeordnet ist. Die „Berührungspunke“ t_1 und t_2 von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{S}$ bestimmen (auch dem Vorzeichen nach) eine Strecke

$$\overline{t_1 t_2} = \overline{q t_2} - \overline{q t_1},$$

wenn wir mit q den Fußpunkt der Normalen von o auf $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Diese Strecke bezeichnet man als *Tangentialentfernung* von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in $\mathfrak{S}$.

Aus der zweiten Gleichung der Nr. 3 folgt durch Anwendung einer Dilatation, daß

$$\overline{q t_1} = \operatorname{cotg}[T_1 E],$$

$$\overline{q t_2} = \operatorname{cotg}[T_2 E]$$

ist und daher

$$\overline{t_1 t_2} = \tau,$$

d. h. die *Tangentialentfernung gleich dem zugehörigen Pseudowinkel* ist.

9. Wir können jetzt unsere Gegenüberstellung der geometrischen Beziehungen auf Z und ξ fortsetzen und finden folgende entsprechende Tatsachen:

Zylinder.	*Grundebene.*
Zwei Kurven bestimmen in einem Punkte den Pseudowinkel τ.	Zwei orientierte Kurven bestimmen in einem Speere die Tangentialentfernung τ.
Die Transformation T_Z vertauscht jeden Pseudowinkel mit einem entgegengesetzt-gleichen oder ist uneigentlich pseudo-konform.	*Die Transformation T_ξ vertauscht jede Tangentialentfernung mit einer entgegengesetzt-gleichen* oder ist *uneigentlich äquilong.*
Die Transformationen T_Z erzeugen eine sechsgliedrige, aus vier getrennten kontinuierlichen Scharen gebildete Gruppe von automorphen Kollineationen des Zylinders Z.	Die Transformationen T_ξ erzeugen eine sechsgliedrige Gruppe von Speertransformationen in ξ, die aus vier getrennten kontinuierlichen Scharen zusammengesetzt ist, die *„Laguerresche Gruppe“*.
Zwei der vier Scharen bestehen aus eigentlich, die beiden andern aus uneigentlich pseudokonformen Abbildungen.	Zwei der vier Scharen bestehen aus eigentlich, die beiden andern aus uneigentlich aequilongen Abbildungen.

1) In diesen Begriff gehört auch der Nullzykel.

Digitized by Google

Zylinder.	*Grundebene.*
Die Gesamtheit aller pseudokonformen Punkttransformationen von Z bildet eine „unendliche" Gruppe.	Die Gesamtheit aller äquilongen Speertransformationen von ζ bildet eine „unendliche" Gruppe.[1])
„Pseudo-isogonale" Trajektorie einer (von den Erzeugenden verschiedenen) Kurvenschar.	*Äquitangentialkurve*[2]) einer Schar orientierter Kurven.
Schraubenlinie.	Orientierte Kreisevolvente.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die Gruppe der flächentreuen Punkttransformationen auf Z durch Φ in die bemerkenswerte Gruppe der *„umfangstreuen"* Speertransformationen in ζ übergeführt wird.[3])

10. Hebt man die Beschränkung auf reelle Elemente auf, so zeigt es sich, daß die (komplexe) Laguerresche Gruppe aus der Gruppe der (komplexen) Bewegungen und Umlegungen des Raumes in einfacher Weise durch die sogenannte *Minimalprojektion* hergeleitet werden kann, wie schon S. Lie angegeben hat.[4]) Diese Abbildung $M\{\varepsilon \to \mathfrak{S}\}$, die die Minimalebene ε des Raumes in die (komplexen) Speere $\mathfrak{S}$ von ζ überführt, steht mit unserer Transformation Φ in einer einfachen Beziehung. Man kann nämlich eine (imaginäre) reziproke Transformation (Korrelation) $P\{s \to \varepsilon\}$, die die Punkte des Zylinders Z in die Minimalebenen transformiert, so bestimmen, daß $\Phi = P \cdot M$ ist.

Noch etwas einfacher ist der Zusammenhang zwischen Φ und der von W. Fiedler als *Zyklographie* bezeichneten Abbildungsart.

Pisa, den 22. Januar 1910.

---

1) Näheres über diese in den Sätzen zu rechter Hand angedeuteten Tatsachen (auch Literaturangaben) findet man in einer Abhandlung des Verfassers: Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene. Monatshefte f. Math. XXI, 1910.

2) Vgl. G. Scheffers, Isogonalkurven . . ., Math. Annalen **60**, 1905.

3) Vgl. die Arbeit des Verfassers: Über einige unendliche Gruppen orientierter Berührungstransformationen in der Ebene, Math. Annalen **69**, 1910.

4) Vgl. die oben zitierte Abhandlung: Untersuchungen über die Geom. der Speere § 2.

Digitized by Google

Das Colonel Titus's Problem.

Von JOH. SCHUMACHER in München.

In den Collected Mathematical Papers von Arthur Cayley findet sich im Vol. IV. Nr. 256 die folgende Note:

„Die Auflösung der Gleichungen

$$a^2 + bc = \lambda, \quad b^2 + ac = \mu, \quad c^2 + ab = \nu,$$

in welcher λ, μ, ν die Werte 16, bzw. 17, 18 haben, ist unter dem Namen Colonel Titus's arithmetical Problem bekannt. (Siehe Maseres: Tracts on the resolution of affected algebraick equations. London 1800. 8^0.)

Cayley gibt hiervon eine Lösung, welche ich nach einigen geschichtlichen Bemerkungen folgen lasse. Um aber dieser Abhandlung eine gewisse Abrundung zu geben, will ich auch die mir bekannten und zugänglichen Bearbeitungen des Problems von John Wallis und William Frend beifügen. Den Schluß sollen meine eigenen Untersuchungen über diese Aufgabe bilden.

Als geschichtliche Hilfsmittel benutzte ich Maseres: „Tracts on the resolution of affected algebraick equations by Dr. Halley's, Mr. Raphson's and Sir Isaac Newton's methods of approximation, London 1800. 8^0", ein Werk, welches in der Bibliothek des Britischen Museums unter der Signatur 529. i. 14 und in der Kgl. Bibliothek zu Berlin unter der Signatur Oc 172 sich befindet; außerdem M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. 2., 3., 4. Band.

1. Wie ist der Name Colonel Titus's Problem entstanden? — Auf Seite XL seiner Vorrede und auf Seite 188 (number III. art. 2) schreibt Maseres:

„Der nächste (3. Teil) dieser Sammlung enthält eine sehr ausführliche Darstellung von Dr. John Wallis's Lösung einer (für die damalige Zeit. D. V.) äußerst schwierigen Aufgabe, welche ihm (Wallis) von Colonel Titus mitgeteilt wurde, einem zur Zeit Karls II. hochangesehenen Manne, dem auch eine zeitlang die Ehre eines Kammerherrn (bed-chamber) übertragen war. Dr. Wallis berichtet uns weiter, daß das Problem dem Colonel Titus (as the Colonel informed him) ursprünglich von Dr. John Pell, dem berühmten Algebraisten jener Zeit, vorgelegt worden ist. Daher (wahrscheinlich mit Rücksicht auf die Männer, welche sich für das Problem interessierten. D. Verf.) wurde es zu einer Frage, welche die Aufmerksamkeit erregt und die Talente sehr

Digitized by Google

bedeutender Mathematiker beschäftigt hat. Der Grund, warum *ich* (Maseres) das Problem in diese Abhandlung aufnahm, usw. usw. war sein Zusammenhang mit der biquadratischen Gleichung $14937x - 1998x^2 + 80x^3 - x^4 = 5000$, welche in dem vorangehenden Appendix zu Dr. Halley's Arbeit: „An appendix to the foregoing tract of Dr. Edmund Halley on the resolution of algebraick equations of all degrees by approximation" den Hauptgegenstand unserer Aufmerksamkeit und Untersuchung bildete. Aus diesem Umstande erschien es wünschenswert, meine Leser mit dem Problem bekannt zu machen, aus welchem obige Gleichung abgeleitet ist, damit sie seine Lösung durch Dr. Wallis verstehen. Usw. usw."

Hieraus folgt, wenn Maseres's Angaben verlässig sind, daß Dr. John Pell der *wahrscheinliche* Erfinder des Problems gewesen ist, und daß es richtiger „Pell's" Problem heißen sollte. Ich nannte Pell nicht ohne Absicht den „wahrscheinlichen Erfinder", weil ich nicht nachzuweisen vermag, ob dieser das Problem wirklich selbst gestellt oder aus der Schweiz, vielleicht von Johann Heinrich Rahn, mitgebracht hat. John Pell war von 1654—1658 als Resident Cromwell's in der Schweiz mit dem Auftrage, die Kantone von Frankreich zu trennen und sie zu einer kontinentalen, protestantischen Liga unter dem Schutze Englands herbeizuziehen. Dort war er mit Johann Heinrich Rahn bekannt geworden, welcher die Ausgabe einer „Teutschen Algebra" vorbereitete, die 1659 erschien und auf Veranlassung Pell's im Jahre 1668 durch Thomas Brancker ins Englische übersetzt wurde. Ich möchte daher nur auf die Möglichkeit hinweisen, daß das sog. Colonel Titus's Problem ebensowohl von Rahn wie von Pell stammen kann, oder aus den gemeinsamen Besprechungen beider Mathematiker hervorgegangen ist. Den Grund zu dieser Vermutung gibt die historische Tatsache, daß Pell inbezug auf Quellenangaben nicht immer peinlich gewissenhaft war.

Wie uns also Maseres bezeugt, hat Pell dem Colonel Titus, geb. 1623?, gest. 1704, das Problem proponiert. Dieser war eine sehr einflußreiche und hochgeachtete Persönlichkeit, stand im unmittelbaren Dienste von 4 englischen Königen (Karl I., Karl II., Jakob II und Wilhelm III.), durchlebte unter tätigster Anteilnahme an den wichtigsten Staatsereignissen die ganze Konfliktszeit Englands bis zur Restauration, war zwar in erster Linie Hof- und Staatsmann, aber doch ein großer Freund aller nützlichen Wissenschaften, insbesondere der Mathematik. Jenen beurteilt die Geschichte mehr als Mathematiker denn Politiker, trotzdem ihm auf diesem Gebiete immerhin ein großes Vertrauen entgegengebracht worden sein muß, weil ihn sonst nicht Cromwell mit

Digitized by Google

einer so schwierigen und verantwortungsvollen Mission in die Schweiz betraut hätte. Zwischen dem Colonel und Pell bestand demgemäß eine doppelte Interessengemeinschaft, die beide zusammenschloß und begreiflich erscheinen läßt, warum dieser jenem das Problem mitteilte. Aber da Pell das Problem nicht löste, von Titus eine Lösung auch nicht erwartete, wird man versucht eine Nebenabsicht Pell's anzunehmen, die aber nicht bestanden zu haben braucht. John Wallis wurde im Jahre 1660 zum „royal chaplain of the King the Second" ernannt. Sein Name als Mathematiker ist bekannt. In seiner neuen Eigenschaft (er war seit 1649 Professor der Geometrie an der Universität Oxford) verkehrte er häufig am Hofe und kam aus dienstlichen und persönlichen Gründen sicher öfter mit Titus in Berührung. Es ist daher nicht unmöglich, daß Pell das Problem dem Colonel in der Absicht oder mit dem Wunsche vorlegte, dieser möchte John Wallis dafür interessieren. Die Kenntnis der Beziehungen zwischen Pell und Wallis könnten hier aufklärend wirken, ob ersterer eines Vermittlers bedurfte. Sicher ist, daß John Wallis zuerst das Problem löste. Wenn ich daher die Benennung des Problems auf die Tätigkeit des Vermittlers zurückführe, so habe ich hierzu wenigstens einen Schein von Berechtigung. Derartige unverdiente Benennungen sind auch in der Geschichte der Mathematik nicht selten. Ich erwähne nur das naheliegende Beispiel der Pellschen Aufgabe $ax^2 + 1 = y^2$, welche bekanntlich von Fermat herrührt und Fermatsche Aufgabe heißen sollte.

Über die Erhebung der in der heutigen Zeit elementaren Aufgabe zum „Problem" wird man sich weniger wundern, wenn man den Stand der mathematischen Wissenschaft im 17. und bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts sich vergegenwärtigt (Siehe M. Cantor, 2. Band p. 787; 3. Band p. 98 und p. 390). Einen genauen Einblick in die Geschichte des „Problems" selbst erhält man aus Maseres: „Tracts on the resolution usw., usw." Für den Forscher ist dieses Buch ohne Zweifel belehrend, aber wegen des schleppenden Ganges der Darstellung auch ermüdend. Als Unterrichtsbuch ist es empfehlenswert, weil jeder Lehrer auf einen sichern Erfolg rechnen kann, wenn er nach Maseres's Methode die Annäherungsverfahren zur Bestimmung der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung vorträgt. Freilich muß er dann über die notwendige Zeit verfügen. Das Buch enthält 10 Abschnitte. Es ist begreiflich, warum Maseres die Lösung des Titus's Problems (number III u. IV) der Arbeit Dr. Edmund Halley's „A new, exact and easy method of finding the roots of any equations generally; and that without any previous reduction" (number I) und seiner eigenen „An appendix to the foregoing tract of Dr. Edmund Halley on the resolution of algebraick equations

Digitized by Google

of all degrees by approximation (number II) nachgestellt hat, wiewohl Dr. John Wallis's Lösung des Problems, die im Jahre 1662 erfolgte, der Arbeit Halley's, die erst 1694 erschien, voranging. Er gibt auch den Grund in der Vorrede an: „Der Hauptgegenstand der vorliegenden Reihe von Abhandlungen ist die Erläuterung und Begründung von Mr. Raphson's und Dr. Halley's Annäherungsmethoden zur Auflösung (affected) algebraischer Gleichungen durch Beispiele und eine Gegenüberstellung dieser Methoden zum Vergleiche ihrer Vorteile und Nachteile." Unter diesen Beispielen ist auch jene Gleichung enthalten, auf welche John Wallis in seiner Lösung des Titus's Problems gekommen ist. Es war mir von Interesse zu sehen, daß die weitaus meisten von ihnen die Bezeichnung „Affektgleichung im Kroneckerschen Sinne" nicht mehr verdienen.

2. Die Lösung von Dr. John Wallis, (geb. 23. Nov. 1616, gest. 28. Okt. 1703), Savilian Professor of Geometry at Oxford, in June, 1662.

(1) $a^2 + bc = 16 = l$, (2) $b^2 + ac = 17 = m$, (3) $c^2 + ab = 18 = n$.

Wallis beweist zunächst, daß jede von den 3 Größen a, b, c von den beiden andern verschieden ist. Ferner zeigt er, daß $c > b > a$ und gründet den Beweis auf die Eigenschaft der konstanten Größen, welche eine arithmetische Progression bilden. Hierauf eliminiert er c, wie folgt:

$$c = \frac{l - a^2}{b}, \qquad c^2 = n - ab,$$

woraus

$$b^2 = \frac{nb^2 - l^2 + 2la^2 - a^4}{ab}.$$

Die Gl. (2) liefert mit diesen Werten von c und b^2:

$$mab - la^2 + a^4 = nb^2 - l^2 + 2la^2 - a^4$$

$$b^2 - \frac{ma}{n} b = \frac{2a^4 - 3la^2 + l^2}{n},$$

$$(4) \qquad b = \frac{ma}{2n} + \frac{\sqrt{8na^4 - 12lna^2 + m^2a^2 + 4l^2n}}{2n}.$$

Indem nun Wallis diesen *einen* Wert von b und den Wert von c aus (1) in (2) substituiert und für die Wurzelgröße abkürzend E einführt, erhält er die irrationale Gleichung

$$E^2 + m^2a^2 + 2maE + \frac{8ln^3a - 8n^3a^3}{ma + E} = 4mn^2,$$

oder nach Wegschaffung des Nenners:

$$3maE^2 + m^3a^3 + 8ln^3a - 8n^3a^3 - 4m^2n^2a = 4mn^2E - 3m^2a^2E - E^3.$$

Digitized by Google

Substitution des Wertes für E^2 gibt:

$$24mna^5 - 36lmna^3 + 4m^3a^3 + 12l^2mna + 8ln^3a - 8n^3a^3 - 4m^2n^2a = 4mn^2E - 3m^2a^2E - E^3.$$

Wallis macht diese Gleichung durch zweimaliges Quadrieren rational und substituiert für jedes E^2 seinen Wert. Dadurch erhält er eine Gleichung, welche inbezug auf a bis zum 12. Grade ansteigt. Zum Schlusse setzt er noch $2a^2 = e^2$ und bekommt:

$$e^{12} - 9le^{10} + (33l^2 - mn)\,e^8 - (63l^3 - 9lmn + m^3 + n^3)\,e^6 + (66l^4 + 4lm^3 + 2m^3n^2 - 28l^2mn + 4ln^3)\,e^4 - (36l^5 - 36l^3mn + 4l^2m^3 + 4l^2n^3 + 8lm^2n^2)\,e^2 + 8l^6 + 8l^2m^2n^2 - 16l^4mn = 0.$$

Wallis erkennt, daß diese Gleichung mit $e^4 - 4le^2 + 4l^2 = (e^2 - 2l)^2$ reduzibel ist, und bekommt die Schlußgleichung:

$$e^8 - 5le^6 + (9l^2 - mn)\,e^4 - (7l^3 - 5lmn + m^3 + n^3)\,e^2 + 2l^4 - 4l^2mn + 2m^2n^2 = 0,$$

welche nach Einsetzung der numerischen Werte $l = 16$, $m = 17$, $n = 18$ keine andere als

$$e^8 - 80e^6 + 1998e^4 - 14937e^2 + 5000 = 0$$

ist, und welche Halley später aufgriff, um auch an ihr seine Näherungsmethoden zu illustrieren.

Wallis bestimmte die Wurzeln dieser Gleichung nach der Näherungsmethode von Vieta. Die zweitkleinste der 4 „realen, affirmativen" Wurzeln ist:

$$e_1^2 = 12{,}756\,441\,794\,480\,744, \text{ woraus } a_1 = 2{,}525\,513\,986\,744\,158,$$
$$b_1 = 2{,}969\,152\,768\,619\,848,\ c_1 = 3{,}240\,580\,681\,617\,174.$$

Die kleinste Wurzel der Gleichung in e^2 ist $e_2^2 = 0{,}350\,987\,045\,866\,14$. Ihr entsprechen:

$$a_2 = 0{,}418\,919\,470\,701\,7, \quad b_2 = 3{,}912\,226\,866, \quad c_2 = 4{,}044\,884\,670.$$

Die beiden größten Werte von e^2 der obigen Gleichung, nämlich $e_3^2 = 32{,}060\,290\,8$, $e_4^2 = 34{,}832\,280\,2$ haben keine Beziehung zu dem Colonel Titus's Problem, weil die aus ihnen sich ergebenden Werte a, b, c die vorgelegten Gleichungen nicht befriedigen. Sie sind Wurzeln des Gleichungssystems $a^2 - bc = 16$, $b^2 + ac = 17$, $c^2 - ab = 18$, resp. $a^2 - bc = 16$, $b^2 - ac = 17$, $c^2 + ab = 18$. (Siehe Dr. Wallis's Algebra, chapter LXII, articles 63, 64, ... 79.) Diesen Hinweis setzt Maseres mit der Bemerkung fort: „ . . . in welcher (Dr. Wallis's Algebra. D. Verf.) der Gegenstand ausführlich besprochen ist, aber nicht ohne ein gewisses Maß von Unklarheit (obscurity), welche von der Berücksichtigung negativer Größen, von

Digitized by Google

der Ableitung von Gleichungen durch gegenseitige Multiplikation, etc; ... und von der ganz unrichtigen Voraussetzung herrührt, daß jede algebraische Gleichung ebensoviele Wurzeln hat, als Einheiten in dem Exponenten der höchsten Potenz enthalten sind. Denn diese Ableitung von Gleichungen durch gegenseitige Multiplikation, welche von Harriot gefunden, von Descartes und Wallis und fast von allen nachfolgenden Algebraisten adoptiert wurde, hatte nach meiner Meinung keinen Vorteil, sondern einen großen Nachteil zur Folge, indem sie die Einfachheit und Klarheit zerstörte. Man sollte daher wieder von ihr absehen."

So schrieb noch Francis Maseres im Jahre 1800, der wie sein Vorgänger Robert Simson (geb. 14. Okt. 1687, gest. 1. Okt. 1768) und sein Nachfolger William Frend (geb. 22. Nov. 1757, gest. 21. Feb. 1841) die negativen Zahlen, von den imaginären gar nicht zu reden, in der Algebra verworfen wissen wollte.

3. Die Lösung von William Frend, Fellow of Jesus College, Cambridge. Maseres schreibt auf Seite 239. „Mr. William Frend, der geistreiche Verfasser der klaren Abhandlung über Algebra, betitelt „Principles of Algebra" (in welcher er die absurde und verworrene Lehre von den negativen Größen, oder den Größen weniger als nichts, oder den durch Subtraktion kleinerer Größen von größeren erhaltenen Größen vollständig verwirft), hat mir kürzlich eine andere Lösung des Titus's Problems mitgeteilt, welche nur auf eine biquadratische Gleichung führt. Und diese Gleichung hat 3 Wurzeln, oder in der Sprache der neuern Algebraisten, 3 reelle und affirmative Wurzeln, von denen die mittlere uns ermöglicht, die Werte $a_1 = 2{,}5255\ldots$, $b_1 = 2{,}96915\ldots$, $c_1 = 3{,}2405\ldots$, die größte die Werte $a_2 = 0{,}41891947$, $b_2 = 3{,}9122268$, $c_2 = 4{,}0448846$ zu finden." Diese Lösung werde ich jetzt folgen lassen:

Basierend auf Wallis's Nachweis, daß $a < b < c$, setzt Frend

$$b:a = x:1, \text{ also } b = ax; \quad c:a = y:1, \text{ also } c = ay.$$

Demzufolge ist

(1) $a^2 + xya^2 = 16 = l$, (2) $x^2a^2 + ya^2 = 17 = m$, (3) $y^2a^2 + xa^2 = 18 = n$.

Durch Elimination von a^2 folgt aus (1) und (2): $\frac{l}{1+xy} = \frac{m}{x^2+y}$, woraus

$$\text{(I)} \qquad y = \frac{lx^2 - m}{mx - l},$$

und aus (2) und (3) $\frac{m}{x^2+y} = \frac{n}{y^2+x}$, woraus

$$y^2 - \frac{ny}{m} = \frac{nx^2 - mx}{m},$$

$$\text{(II)} \qquad y = +\sqrt{\frac{nx^2 - mx}{m} + \frac{n^2}{4m^2}} + \frac{n}{2m}.$$

Digitized by Google

Aus (I) und (II) folgt[1]):

$$\frac{lx^2-m}{mx-l}-\frac{n}{2m}=\sqrt{\frac{nx^2-mx}{m}+\frac{n^2}{4m^2}}.$$

Macht man rational, so entsteht:

$$x^4-\frac{ln+m^2}{mn-l^2}x^3+\frac{4lm}{mn-l^2}x^2-\frac{l^2+mn}{mn-l^2}x=\frac{m^2-ln}{mn-l^2}$$

und hieraus für $l=16$, $m=17$, $n=18$, die Frendsche biquadrische Gleichung

$$x^4-11{,}54x^3+21{,}76x^2-11{,}24x=0{,}02.$$

Den Wert von x trägt man in (I) ein und findet dann y. Aus (1) ergibt sich dann a, und damit b und c.

Maseres bestimmt nun nach der Methode Raphson's einen ersten Annäherungswert von x:

$$x=1{,}027179787,$$

welcher nur in der letzten Dezimalstelle ungenau ist. Aber dieser Wert ist für die Lösung des Titus's Problems unbrauchbar, weil, wie Maseres sagt, $lx^2=16x^2=16{,}881573037141845904$ kleiner als 17, also $y=\frac{16x^2-17}{17x-16}$ negativ würde.

(Raphson sucht einen Annäherungswert, indem er statt x die Größe x_1+z setzt, wobei x_1 ein erster Näherungswert ist, in der transformierten Gleichung alle höheren Potenzen als die erste unterdrückt und die Korrektur z aus einer linearen Gleichung bestimmt. Halley behält auch noch die zweite Potenz der Korrektur bei und ermittelt z aus einer quadratischen Gleichung.)

Um die zweite und dritte Wurzel der biquadrischen Gleichung zu finden, schlägt Maseres das folgende Verfahren ein:

Es sei f eine größere Wurzel als die gefundene, die er mit e bezeichnet. Man erhält dann

$$f^4-11{,}54f^3+21{,}76f^2-11{,}24f=e^4-11{,}54e^3+21{,}76e^2-11{,}24e,$$

hieraus

$$\frac{f^4-e^4}{f-e}+21{,}76\frac{f^2-e^2}{f-e}=11{,}54\frac{f^3-e^3}{f-e}+11{,}24\frac{f-e}{f-e}$$

oder $f^3+f^2e+fe^2+e^3+21{,}76(f+e)=11{,}54(f^2+fe+e^2)+11{,}24.$

Indem er für e den gefundenen Wert einsetzt, bekommt er die kubische Gleichung $10{,}513f^2-10{,}963149f-f^3=0{,}019154023$, die er inbezug auf „ihre Möglichkeit" untersucht. Substituiert man für f

1) (Siehe Maseres Vorrede LXXI). Verbesserung durch the Reverend Mr. John Hellins, vicar of Potters Pury zu Northamptonshire.

Digitized by Google

den gefundenen Näherungswert 1,027, so wird sie unmöglich, weil $10{,}963149f + f^3 >$ als $10{,}513f^2$, und zu einer negativen Größe führen würde. Nun setzt er

$$10{,}513f^2 - 10{,}963149f - f^3 = 0,$$

dividiert durch f und findet die beiden Werte $f = 1{,}175$ und $f = 9{,}337$. Diese Werte sind brauchbar, weil für beide die linke Seite der Gleichung

$$10{,}513f - 10{,}96314 - f^2 > 0.$$

Als sehr genauen Wert der mittleren Wurzel der biquadratischen Gleichung erhält Maseres $x = 1{,}17505646$, der die Werte entsprechen:

$$a = 2{,}5255, \quad b = 2{,}96915, \quad c = 3{,}2405.$$

Die 3. Wurzel ist $x = 9{,}3388519$, welche führt zu: $a = 0{,}41891947$, $b = 3{,}912226888$, $c = 4{,}044884650$. Die beiden letzten Größen stimmen mit den von Wallis gefundenen in den ersten 8 Ziffern überein.

Maseres schließt mit einem Vergleich der Lösungen von Wallis und Frend: „Mr. Frend's Lösung hat gegenüber jener von Wallis den Vorteil voraus, daß sie uns der Mühe jener sehr weitschweifigen, unklaren algebraischen Multiplikationen und Divisionen, welche die Lösung Wallis's notwendig macht, und die ohne Vorzeichenfehler nur schwer durchzuführen sind, überhebt."

Zur Charakterisierung von Frend's Stellungnahme zur Theorie der algebraischen Gleichungen verweise ich auf sein Werk[1]) „Remarks on the number of negative and impossible roots in algebraick equations". Dort heißt es im Artikel 1: Sir Isaac Newton, Mr. George Cumpbell, der berühmte Mac Laurin, der ehemalige Professor Waring und andere hervorragende Algebraiker haben Regeln zur Auffindung der Anzahl der impossible roots einer beliebigen algebraischen Gleichung aufgestellt. Aber diese sind weder klar, noch genügend und einige von ihnen vollständig unverständlich. Man wird sich aber darüber nicht wundern, wenn man weiß, daß sie alle auf grund einer falschen Voraussetzung gefunden wurden, welche sämtliche daraus gezogenen Schlüsse ungültig macht. Diese Voraussetzung ist: „Jede algebraische Gleichung hat ebensoviele Wurzeln, als ihr Grad anzeigt", obgleich „in Wirklichkeit sehr wenige Gleichungen existieren, für welche dieser Lehrsatz gilt, nämlich nur eine einzige für jeden Gleichungsgrad. So hat beispielsweise von allen 3 Formen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px = q$, $x^2 - px = q$, $px - x^2 = q$ nur die 3te zwei Wurzeln und dies nur, wenn $q < \frac{p^2}{4}$; ebenso hat von allen 13 Formen einer kubischen

1) Vergleiche auch Maseres Vorrede pag. LXVIII.

Digitized by Google

Gleichung nur die Form $x^3 - px^2 + qx = r$ drei Wurzeln, und dies nur, wenn $r < \frac{p^3}{27}$ ist. Von den 45 Formen einer biquadratischen Gleichung besitzt nur $-x^4 + px^3 - qx^2 + rx = s$ vier Wurzeln, wenn $s < \frac{p^4}{256}$". Weil die Gleichung $14937x - 1998x^2 + 80x^3 - x^4 = 5000$ dieser Bedingung genügt, wurde sie wohl von Maseres eingehend behandelt, und kam Halley auch auf sie in seinem „A new exact and easy method etc" zurück, ohne daß letzterer Maseres's und Frend's Ansicht damit beitreten wollte.

4. Cayley's Lösung. — „Setzen wir der Kürze wegen $\sigma = \nu - c^2$, dann liefert die 3. Gleichung $b = \frac{\sigma}{a}$. Indem wir diesen Wert von b in die 2 andern Gleichungen einsetzen, erhalten wir

$$a^2 + \frac{\sigma c}{a} = \lambda; \quad \frac{\sigma^2}{a^2} + ca = \mu, \text{ oder}$$
$$a^3 - \lambda a + \sigma c = 0, \quad ca^3 - \mu a^2 + \sigma^2 = 0.$$

Die Elimination von a aus diesen beiden Gleichungen ergibt:

$$\sigma^4 - 3c^2\sigma^3 + (3c^4 - 2\lambda\mu)\sigma^2 - c^2(c^4 - \lambda\mu)\sigma + c^4\lambda\mu - c^2(\lambda^3 + \mu^3) + \lambda^2\mu^2 = 0,$$

wo $\sigma = \nu - c^2$. Die Gleichung ist inbezug auf c^2 vom 4. Grade. Substituieren wir für c^2 seinen Wert $\nu - \sigma$ und betrachten σ als Unbekannte, so wird die neue Gleichung inbezug auf σ ebenfalls vom 4. Grade:

$$8\sigma^4 - 12\nu\sigma^3 + (6\nu^2 - 2\lambda\mu)\sigma^2 + (\lambda^3 + \mu^3 - \nu^3 - \lambda\mu\nu)\sigma$$
$$+ (\lambda\nu - \mu^2)(\mu\nu - \lambda^2) = 0.$$

Ist $\sigma = 0$, dann verschwindet a oder b; aus den ursprünglichen Gleichungen folgt $\lambda\nu - \mu^2 = 0$ oder $\mu\nu - \lambda^2 = 0$, was mit dem aus der Gleichung in σ sich ergebenden Resultate übereinstimmt.

Ist $\sigma = \nu$, dann wird $c = 0$. Aus den ursprünglichen Gleichungen folgt unter dieser Voraussetzung $\nu^2 - \lambda\mu = 0$. Die linke Seite der Gleichung in σ wird, wenn wir $\sigma = \nu$ substituieren, den Faktor $\nu^2 - \lambda\mu$ enthalten. In der Tat geht sie in $\nu^4 - 2\lambda\mu\nu^2 + \lambda^2\mu^2 = (\nu^2 - \lambda\mu)^2$ über." Soweit Cayley.

5. Neue Lösung. — Ich will nun diese elementare Aufgabe auf eine andere Art in Angriff nehmen. Aus dem Bau der Gleichungen kann unmittelbar entnommen werden:

1. Es gibt 8 Tripel von zusammengehörigen Werten a, b, c, welche das Gleichungssystem befriedigen.

2. Vier von ihnen unterscheiden sich von den übrigen nur durch das Vorzeichen.

Digitized by Google

3. Eliminiert man aus den Gleichungen b, c, so wird die Resultante in a^2 wegen der Eigenschaft sub 2 vom 4. Grade.

4. Für $a = b = c$ wird $\lambda = \mu = \nu$.

5. Wird $a = b$, $c \gtrless a, b$, oder sind die Wurzeln $a, b, a + b$, so wird $\lambda = \mu$.

6. Die Bedingung, daß a, b, c den Wert 0 annimmt, hat zur Folge, daß $\lambda^2 - \mu\nu$, resp. $\mu^2 - \lambda\nu$, resp. $\nu^2 - \lambda\mu$ verschwinden muß.

7. $a^2 + bc$, $b^2 + ac$, $c^2 + ab$ können als unsymmetrische, dreiwertige, ganze, rationale Funktionen von a, b, c angesehen werden, deren Stammgleichung

$$\omega^3 + \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

sein möge.

Von dieser letzteren Auffassung soll die folgende Lösung ausgehen. Man setze

$$\lambda + \mu + \nu = -m, \qquad \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu = n, \qquad \lambda\mu\nu = -p.$$

Aus den Originalgleichungen folgt dann:

$$(1)\ \Sigma a^2 + \Sigma ab = \alpha^2 - \beta, \qquad = \Sigma\lambda = -m,$$

$$(2)\ \Sigma a^2b^2 + \Sigma a^3b + abc\Sigma a = \alpha^2\beta - \beta^2 - 2\alpha\gamma \qquad = \Sigma\lambda\mu = n$$

$$(3)\ 2a^3b^3c^3 + \Sigma a^3b^3 + abc\Sigma a^3 = 8\gamma^2 + \beta^3 - 6\alpha\beta\gamma + \alpha^3\gamma = \lambda\mu\nu = -p.$$

Hieraus $\qquad \beta = \alpha^2 + m, \quad \gamma = \frac{-(\alpha^3 m + m^2 + n)}{2\alpha}.$

Substituiert man diese Werte in die letzte der vorangehenden Gleichungen, so erhält man

$$(\mathrm{I})\quad 2\alpha^8 + 11\alpha^6 m + [16m^2 + 5(m^2 + n)]\alpha^4 + 2[8m(m^2 + n) - (mn - p)]\alpha^2 + 4(m^2 + n)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist in α^2 vom 4. Grade; ihre Auflösung bietet keine Schwierigkeit. Mit α sind auch β und γ bekannt. Aus $\omega^3 + \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ können dann die zusammengehörigen Werte a, b, c berechnet werden.

1. Fall: $m^2 + n = 0$.

$$\begin{aligned} m^2 + n &= \Sigma\lambda^2 + 3\Sigma\lambda\mu = \alpha \cdot (\alpha^3 - \alpha\beta - 2\gamma) \\ &= 5(2\lambda + 3\mu + 3\nu)^2 - (5\mu + \nu(3 + 4i))(5\mu + \nu(3 - 4i)) = 0 \\ &= (2\lambda + 3\mu + 3\nu)^2 - (5\mu^2 + 6\mu\nu + 5\nu^2) = 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man λ, μ, ν als Punktkoordinaten einer Fläche, so repräsentiert die Gleichung einen Kreiskegel mit dem Nullpunkt als Spitze. Schneidet man diese Kegelfläche mit der Ebene $\lambda = \mu$, so erhält man die beiden Geraden $\lambda = \mu$, $\nu = -5\lambda$; $\lambda = \mu$, $\nu = -\lambda$.

Digitized by Google

Aus der Gleichung (I) folgt aber für $m^2 + n = 0$: $\alpha^2 = 0$.
Es ist dann, wie aus den Gleichungen (1) bis (3) hervorgeht,

$$\beta = m; \quad \beta^2 = -n; \quad 8\gamma^2 + \beta^3 = -p;$$

also

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{mn - p}{8}}.$$

Für die Punkte der ersten Geraden werden die Originalgleichungen:

$$a^2 + bc = \lambda; \quad b^2 + ac = \lambda; \quad c^2 + ab = -5\lambda.$$

Also $\quad m = 3\lambda; \quad n = -9\lambda^2; \quad p = 5\lambda^3.$

Mithin $\quad \beta = 3\lambda; \quad \gamma = \pm 2\lambda\sqrt{-\lambda}.$

Die kubische Gleichung für a, b, c lautet: $\omega^3 + 3\lambda\omega \pm 2\sqrt{-\lambda} = 0$, der die Wurzeln genügen.

$$a = -\sqrt{-\lambda}; \quad b = -\sqrt{-\lambda}; \quad c = +2\sqrt{-\lambda}, \text{ resp.}$$
$$a = +\sqrt{-\lambda}; \quad b = +\sqrt{-\lambda}; \quad c = -2\sqrt{-\lambda}.$$

Für die Punkte der zweiten Geraden ist sowohl $m^2 + n = 0$, als auch $mn - p = 0$:

$$a^2 + b = \lambda; \quad b^2 + ac = \lambda; \quad c^2 + ab = -\lambda.$$

Also $\quad m = -\lambda; \quad n = -\lambda^2; \quad p = \lambda^3.$

Mithin $\quad \beta = -\lambda; \quad \gamma = 0.$

2. Fall: $mn - p = 0$; $m^2 + n \gtrless 0$.

$$mn - p = -\sum\lambda^2\mu - 2\lambda\mu\nu = -(\lambda + \mu)(\lambda + \nu)(\mu + \nu)$$
$$= -\alpha^4\beta + 3\alpha^3\gamma + 2\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta\gamma + 8\gamma^2 = 0.$$

Dies tritt ein, wenn $\lambda = -\mu$, resp. $\lambda = -\nu$, resp. $\mu = -\nu$ ist.

Die Gleichung (I) geht für $\lambda = -\mu$ über in:

I′ $\quad 2\alpha^8 - 11\alpha^6\nu + (21\nu^2 - 5\lambda^2)\alpha^4 - 16(\nu^2 - \lambda^2)\nu \cdot \alpha^2 + 4(\nu^2 - \lambda^2)^2 = 0,$

aus welcher α berechnet werden kann.

Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt, weil $m = -\nu$, $n = -\lambda^2$, $p = +\lambda^2\nu$,

$$\beta = \alpha^2 - \nu; \quad \gamma = \frac{\alpha^2\nu - \lambda^2 - \nu^2}{2\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Wurzeln a, b, c dient die kubische Gleichung:

$$\omega^3 + \alpha\omega^2 + (\alpha^2 - \nu)\omega + \frac{\alpha^2\nu - \lambda^2 - \nu^2}{2\alpha} = 0.$$

Betrachtet man wieder λ, μ, ν als Punktkoordinaten, so ist klar, daß die Fläche 3. Ordnung $mn - p = 0$ zerfällt in die drei Ebenen

$$\lambda + \mu = 0; \quad \lambda + \nu = 0; \quad \mu + \nu = 0.$$

Digitized by Google

Schneidet man mit einer derselben, etwa mit der Ebene $\lambda + \mu = 0$, die Fläche 2. Ordnung $\sum\lambda^2 + 3\sum\lambda\mu = m^2 + n$, so erhält man als Schnitt die Hyperbel $\nu^2 - \lambda^2 = m^2 + n$, welche in ein Geradenpaar degeneriert, wenn $m^2 + n = 0$ ist. Dieses Resultat stimmt mit dem aus der Gleichung I′ entnommenen überein, aus welcher für $\nu^2 - \lambda^2 = 0$ zunächst $\alpha^2 = 0$ sich ergibt, was hinwiederum $m^2 + n$ zur Folge hat. Bei der Betrachtung des 1. Falles wurde diese Spezialisierung am Schlusse bereits berücksichtigt.

3. Fall: $\gamma = 0$.

Zunächst entnimmt man wieder aus den Gleichungen (1) bis (3) für $\gamma = 0$: $\alpha^2 - \beta = -m$; $\alpha^2\beta - \beta^2 = n$; $\beta^3 = -p$; hieraus $\alpha = \pm\sqrt{\frac{m^2+n}{m}}$, $\beta = -\frac{n}{m}$, woraus in Übereinstimmung mit dem Resultate Cayleys $n^3 - pm^3 = 0$ folgt; denn es ist

$$\begin{aligned} n^3 - pm^3 &= (\sum\lambda\mu)^3 - \lambda\mu\nu(\sum\lambda)^3 = \sum\lambda^3\mu^3 - \lambda\mu\nu\sum\lambda^3 \\ &= -(\lambda^2 - \mu\nu)(\mu^2 - \lambda\nu)(\nu^2 - \lambda\mu) \\ &= -abc(a^3 - b^3 - c^3 + abc)(-a^3 + b^3 - c^3 + abc)(-a^3 - b^3 + c^3 + abc). \end{aligned}$$

$n^3 - pm^3 = 0$ drückt also das Kriterium für das Verschwinden einer der drei Wurzeln a, b, c aus.

Zur Bestimmung derselben dient die kubische Gleichung

$$\omega^3 \pm \sqrt{-\frac{m^2+n}{m}}\,\omega^2 - \frac{n}{m}\,\omega = 0.$$

Von weiteren Folgerungen soll abgesehen werden. Nur eine Beziehung zwischen den Wurzeln a, b, c und den Größen λ, μ, ν dürfte erwähnenswert sein. Es ist

$$\begin{aligned} u &\equiv a^2 + bc - \lambda = \alpha + \beta a + 2a^2 - \lambda = \gamma + \lambda a - a^3 = 0, \\ v &\equiv b^2 + ac - \mu = \alpha + \beta b + 2b^2 - \mu = \gamma + \mu b - b^3 = 0, \\ w &\equiv c^2 + ab - \nu = \alpha + \beta c + 2c^2 - \nu = \gamma + \nu c - c^3 = 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus dem mittleren Gleichungssystem α, β, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a^2-\lambda \\ 1 & b & 2b^2-\mu \\ 1 & c & 2c^2-\nu \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & \lambda \\ 1 & b & \mu \\ 1 & c & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Oder $\qquad 2\sqrt{\Delta} = a(\mu - \nu) + b(\nu - \lambda) + c(\lambda - \mu)$,

Δ die Diskriminante der kubischen Gleichung $\omega^3 + \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$.

Für $\mu = \lambda$ geht diese Gleichung in $2\sqrt{\Delta} = (\lambda - \nu)(a - b)$ über. Hieraus folgt, daß entweder $a - b = 0$, d. h. $a = b$, oder $2(b - c)(c - a)$

Digitized by Google

$= \lambda - \nu$, d. h. $c = a$, oder $c = a + b$, wenn man für λ und ν die entsprechenden Werte aus den Originalgleichungen substituiert usw.

6. Cayley schließt seine Note mit der Bemerkung: „Wenn wir in den Originalgleichungen für $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$ setzen, erhalten wir die drei homogenen Gleichungen zweiten Grades,

$$u \equiv x^2 + cyz - \lambda z^2 = 0, \qquad v \equiv y^2 + czx - \mu z^2 = 0,$$
$$w \equiv (c^2 - \nu)z^2 + xy = 0,$$

aus denen durch Elimination von x, y, z die gesuchte Gleichung in c hervorgeht. Es würde, wie ich glaube, nicht schwer sein, nach der bekannten Methode für den allgemeinen Fall das vorangehende Resultat für den sehr speziellen Fall welcher hier in Frage kommt, abzuleiten".

Ich führe die Rechnung durch und bilde zunächst die Jacobische Determinante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = cz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = cy - 2\lambda z;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = cz; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = cx - 2\mu z;$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2z(c^2 - \nu).$$

Die Jacobische Determinante ist:

$$J = \begin{vmatrix} 2x & cz & cy - 2\lambda z \\ cz & 2y & cx - 2\mu z \\ y & x & -2\sigma z \end{vmatrix} = 0$$

$$J = -cx^3 + 2\mu x^2 z + (c^2 - 4\sigma)xyz - c\lambda xz^2 - cy^3 + 2\lambda y^2 z$$
$$- c\mu yz^2 + c^2\sigma z^3 = 0.$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -3cx^2 + 4\mu xz + (c^2 - 4\sigma)yz - c\lambda z^2 = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = (c^2 - 4\sigma)xz - 3cy^2 + 4\lambda yz - c\mu z^2 = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = 2\mu x^2 + (c^2 - 4\sigma)xy - 2c\lambda xz + 2\lambda y^2 - 2c\mu yz + 3c^2\sigma z^2 = 0.$$

Eliminiert man aus den 6 Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^2 & . & . & . & + cyz & - \lambda z^2 = 0, \\
. & . & cxz & + y^2 & . & - \mu z^2 = 0, \\
. & xy & . & . & . & - \sigma z^2 = 0, \\
-3cx^2 & . & + 4\mu xz & . & +(c^2-4\sigma)yz & - c\lambda z^2 - 0, \\
. & . & (c^2-4\sigma)xz & -3cy^2 & + 4\lambda yz & - c\mu z^2 = 0, \\
2\mu x^2 & + (c^2-4\sigma)xy & - 2c\lambda xz & + 2\lambda y^2 & - 2c\mu yz & + 3c^2\sigma z^2 = 0
\end{array}$$

Digitized by Google

die Größen x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2, so erhält man die Resultante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & c & -\lambda \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ -3c & 0 & 4\mu & 0 & (c^2-4\sigma) & -c\lambda \\ 0 & 0 & (c^2-4\sigma) & -3c & 4\lambda & -c\mu \\ 2\mu & (c^2-4\sigma) & -2c\lambda & 2\lambda & -2c\mu & 3c^2\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit der eingangs der Cayleyschen Note erhaltenen Gleichung in σ^4 identisch ist. Addiert man zur 4., resp. 6. Zeile das $3c$fache der 1., resp. 2. Zeile, subtrahiert von der 6. Zeile das 2μfache der 1. Zeile, hierauf das 2λfache der 2. Zeile, addiert endlich zur 6. Kolonne das σfache der 2. Kolonne und dividiert mit $4 \cdot 4 \cdot 4$, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \mu & c^2-\sigma & c\lambda \\ c^2-\sigma & \lambda & c\mu \\ c\lambda & c\mu & \sigma(c^2-\sigma)+\lambda\mu \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\sigma^4 - 3c^2\lambda^3 + (3c^4 - 2\lambda\mu)\sigma^2 - c^2(c^4 - \lambda\mu)\sigma + c^4\lambda\mu - c^2(\lambda^3+\mu^3) + \lambda^2\mu^2 = 0.$$

München, Oktober 1910.

Some Properties of Four-nodal Cubic Surfaces, being Analogues of Pascal's Theorem and of the Nine-point Circle in Three Dimensions.

By W. H. Salmon, London.

The equation

$$u\beta\gamma\delta + v\gamma\delta\alpha + w\delta\alpha\beta + t\alpha\beta\gamma = 0 \tag{1}$$

in quadriplanar co-ordinates represents a family of cubic surfaces passing through the edges of the tetrahedron of reference and having the four vertices of the tetrahedron as nodes. The general properties of these surfaces have already been investigated.[1]) The 27 straight lines on

1) Salmon, *Geometry of Three Dimensions*, Art. 536; Blythe, *Cubic Surfaces*, p. 16; J. Neuberg, *Zur Tetraedergeometrie*, published in this Archiv (3) **16**, 18; **17**, 54, where the surface (2) is called Simsonsche Fläche. Compare also this Archiv (3) **4**, 276. R. Sturm, *Verwandtschaften* III, 368, 369. Models of various types of cubic surfaces have been considered by Klein, and constructed by Schilling; that of one of the family of surfaces (1) may be seen in the Department of Applied Mathematics, University College, London.

Digitized by Google

any one of them are the six edges of the tetrahedron (each reckoned four times), and three coplanar lines each intersecting a pair of opposite edges.

These surfaces are closely analogous to the circum-conics of a triangle, and the particular surface whose equation is

$$A\beta\gamma\delta + B\gamma\delta\alpha + C\delta\alpha\beta + D\alpha\beta\gamma = 0 \tag{2}$$

where A, B, C, D, are the areas of the faces of the tetrahedron of reference, corresponds to the circum-circle of the triangle.

The family of surfaces (1) will therefore be called the *Circum-cubics of the Tetrahedron*, and the surface (2) the *Principal Circum-cubic of the Tetrahedron.*

The following properties (analogous to corresponding properties of the triangle) will be established. The plane theorem and its solid analogue are placed side by side in each case:

1. If perpendiculars be drawn to the sides of a triangle from any point on the circum-circle, the feet of these perpendiculars lie in a straight line.

(Simson's Pedal Line).

2. The circum-circles of the four triangles determined by any four straight lines meet in a point P and the pedal lines of P for the four triangles are coincident.

1. If perpendiculars be drawn to the faces of a tetrahedron from any point on the principal circum-cubic, the feet of these perpendiculars lie on a plane.[1])

(The Pedal Plane).

2. The principal circum-cubics of the fifteen tetrahedra determined by any six planes meet in a point P, and the pedal planes of P for the fifteen tetrahedra are coincident.

An analogue of a form of Pascal's theorem can also be obtained in three dimensions:

3. If a triangle $A'B'C'$ have its vertices on a circum-conic of a triangle ABC, the three pairs of lines

$$\left.\begin{matrix} BC' \\ B'C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} CA' \\ C'A \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} AB' \\ A'B \end{matrix}\right\}$$

will determine three points lying in a straight line.

3. If a tetrahedron $A'B'C'D'$ have its vertices on a circum-cubic of a tetrahedron $ABCD$, the four triads of planes

$$\left.\begin{matrix} BCD' \\ BC'D \\ B'CD \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} CDA' \\ CD'A \\ C'DA \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} DAB' \\ DA'B \\ D'AB \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ABC' \\ AB'C \\ A'BC \end{matrix}\right\}$$

will determine four points lying on a plane.

1) This property is well-known, but is included here for the sake of completeness.

Digitized by Google

The theorem of the Nine-point circle can be extended to three dimensions in the following form:

4. The middle points of the three sides of a triangle, and the middle points of the lines joining the orthocentres to the vertices lie on the circum-circle of the pedal triangle.

4. The middle points of the six edges of an orthocentric tetrahedron, the middle points of the four lines joining the orthocentre to the vertices, the six feet of the twelve perpendiculars from the vertices on the edges, the middle points of the sides of the triangle EFG (where E, F, G are the points in which the three lines perpendicular to pairs of opposite edges of the tetrahedron meet the plane of perspective of the original tetrahedron and the pedal[1]) tetrahedron) and the middle points of the 15 lines joining E, F, G to the orthocentre and to the vertices of the tetrahedron lie on a cubic surface, the principal circum-cubic of the pedal tetrahedron.

(34-point cubic).

The theorem (1) has been investigated before, but the following is perhaps a more direct proof than any yet published.

Let P be any point whose quadriplanar coordinates referred to the tetrahedron in question are $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$, and let PL, PM, PN, PQ be perpendicular to the faces of the tetrahedron. Then the volume of the tetrahedron $PMNQ$ is $k_1\beta_0\gamma_0\delta_0$ where k_1 is a constant depending solely on the original tetrahedron; similarly $PNQL = k_2\gamma_0\delta_0\alpha_0$, $PQLM = k_3\delta_0\alpha_0\beta_0$ and $PLMN = k_4\alpha_0\beta_0\gamma_0$. By taking P at the centre of the inscribed sphere it is seen that k_1, k_2, k_3, k_4 are proportional to A, B, C, D, the areas of the faces of the tetrahedron. Hence the volume of the tetrahedron $LMNQ$ is proportional to $A\beta_0\gamma_0\delta_0 + B\gamma_0\delta_0\alpha_0$

1) If the planes drawn through the edges of an orthocentric tetrahedron perpendicular to the opposite edges meet those edges AB, BC, CA, AD, BD, CD in P, Q, R, S, T, V, respectively then the planes PSR, TQP, RVQ, STV form a tetrahedron which from its close analogy to the pedal triangle may be called the *pedal tetrahedron.*

Digitized by Google

$+ C\delta_0\alpha_0\beta_0 + D\alpha_0\beta_0\gamma_0$. If the points L, M, N, Q, are coplanar, then the locus of P is

$$A\beta\gamma\delta + B\gamma\delta\alpha + C\delta\alpha\beta + D\alpha\beta\gamma = 0. \tag{2}$$

If the volume of the tetrahedron $LMNQ$ is constant but not zero, then the locus of P is the cubic surface

$$A\beta\gamma\delta + B\gamma\delta\alpha + C\delta\alpha\beta + D\alpha\beta\gamma - k(A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta)^3 = 0 \tag{3}$$

i. e. a cubic surface touching the surface (2) along its curve of intersections with the plane at infinity. This property is of course analogous to the plane theorem that if the feet of the perpendiculars from P on the sides of a triangle form a triangle of constant area, the locus of P is a circle concentric with the circumscribing circle, i. e. a circle touching it at its points of intersection with the line at infinity.

Let $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ be any six planes and let the principal circum-cubics of the tetrahedra $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\beta\gamma\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma\zeta$ intersect in the point P. Then the feet of the perpendiculars from P on the planes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ are coplanar and therefore P is a point on the principal circum-cubic of any of the 15 tetrahedra which can be formed from the six planes, and theorem (2) is proved.

Analogue of Pascal's Theorem.

A number of extensions and analogues of Pascal's Theorem have already been discovered. Plane extensions and spherical analogues are due to Möbius[1]), Clifford[2]), Folie[3]) and Thieme.[4]) Among analogues for quadric surfaces are Serret's theorem[5]), Chasles' theorem[6]), and the investigations of M. Petot.[7])

Pascal's theorem may be stated in the form of theorem (3) and the analogue there enunciated may be proved as follows.

Taking $ABCD$ as the tetrahedron of reference we have as the equation of any circum-cubic in quadriplanar coordinates

$$\frac{u}{\alpha} + \frac{v}{\beta} + \frac{w}{\gamma} + \frac{t}{\delta} = 0. \tag{4}$$

---

1) *Berichte über die Verhandlungen (Math. Phys. Klasse) der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, Leipzig B. 1. (1846) p. 170.

2) *Quarterly Journal of Mathematics.* Vol. 6. (1863) p. 216.

3) *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences de Belgique.* Vol. 36 (1873) p. 620.

4) *Archiv der Mathematik und Physik,* Vol. 60 (1877) p. 43.

5) *Comptes Rendus,* Vol. 82 (1876) p. 208.

6) Quoted in Salmon's *Geometry of Three Dimensions.* Art. 144.

7) *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* Paris. Vol. 5. (1888).

Digitized by Google

If the coordinates of the points A', B', C', D' be $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3)$, $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4)$, the equation of the plane BCD' will be $\frac{\delta}{\delta_4} = \frac{\alpha}{\alpha_4}$, the equation of $BC'D$ will be $\frac{\gamma}{\gamma_3} = \frac{\alpha}{\alpha_3}$, and of $B'CD$ will be $\frac{\beta}{\beta_2} = \frac{\alpha}{\alpha_2}$.

Hence the first triad of planes will meet in the point A'' given by

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma_3}{\alpha_3}} = \frac{\delta}{\frac{\delta_4}{\alpha_4}}. \tag{5}$$

Similarly the second triad determines the point B'' given by

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma_3}{\beta_3}} = \frac{\delta}{\frac{\delta_4}{\beta_4}}. \tag{6}$$

The third triad determines the point C'' given by

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}} = \frac{\beta}{\frac{\beta_2}{\gamma_2}} = \frac{\gamma}{1} = \frac{\delta}{\frac{\delta_4}{\gamma_4}} \tag{7}$$

and the fourth triad the point D'' given by

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha_1}{\delta_1}} = \frac{\beta}{\frac{\beta_2}{\delta_2}} = \frac{\gamma}{\frac{\gamma_3}{\delta_3}} = \frac{\delta}{1}. \tag{8}$$

These four points will lie on a plane if

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} & \frac{\gamma_3}{\alpha_3} & \frac{\delta_4}{\alpha_4} \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 1 & \frac{\gamma_3}{\beta_3} & \frac{\delta_4}{\beta_4} \\ \frac{\alpha_1}{\gamma_1} & \frac{\beta_2}{\gamma_2} & 1 & \frac{\delta_4}{\gamma_4} \\ \frac{\alpha_1}{\delta_1} & \frac{\beta_2}{\delta_2} & \frac{\gamma_3}{\delta_3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

i. e. if

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_3} & \frac{1}{\alpha_4} \\ \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\beta_4} \\ \frac{1}{\gamma_1} & \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_3} & \frac{1}{\gamma_4} \\ \frac{1}{\delta_1} & \frac{1}{\delta_2} & \frac{1}{\delta_3} & \frac{1}{\delta_4} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Digitized by Google

and this relation is fulfilled, for the four points $A'B'C'D'$ lie on the cubic (4).

It will be seen that 24 such planes may be obtained by the 24 possible ways of associating the nodes A, B, C, D, with the four points A', B', C', D'. The equation of one such plane $A''B''C''D''$ is

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 1 & \frac{\gamma_3}{\beta_3} & \frac{\delta_4}{\beta_4} \\ \frac{\alpha_1}{\gamma_1} & \frac{\beta_2}{\gamma_2} & 1 & \frac{\delta_4}{\gamma_4} \\ \frac{\alpha_1}{\delta_1} & \frac{\beta_2}{\delta_2} & \frac{\gamma_3}{\delta_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i. e.

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\alpha_1} & \frac{\beta}{\beta_2} & \frac{\gamma}{\gamma_3} & \frac{\delta}{\delta_4} \\ \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\beta_2} & \frac{1}{\beta_3} & \frac{1}{\beta_4} \\ \frac{1}{\gamma_1} & \frac{1}{\gamma_2} & \frac{1}{\gamma_3} & \frac{1}{\gamma_4} \\ \frac{1}{\delta_1} & \frac{1}{\delta_2} & \frac{1}{\delta_3} & \frac{1}{\delta_4} \end{vmatrix} = 0$$

or

$$\frac{A_1\alpha}{\alpha_1} + \frac{A_2\beta}{\beta_2} + \frac{A_3\gamma}{\gamma_3} + \frac{A_4\delta}{\delta_4} = 0 \tag{10}$$

where $A_1, -A_2, A_3, -A_4$ are the minors of $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \frac{1}{\alpha_4}$ in the determinant in equation (9). If we write $\frac{A_1}{\alpha_1} = a_1, \frac{A_2}{\alpha_2} = a_2, \ldots \frac{A_1}{\beta_1} = b_1, \ldots$ the equations of the 24 planes may be written: —

I $a_1\alpha + b_2\beta + c_3\gamma + d_4\delta = 0$	XIII $a_3\alpha + b_4\beta + c_1\gamma + d_2\delta = 0$
II $a_1\alpha + b_2\beta + c_4\gamma + d_3\delta = 0$	XIV $a_3\alpha + b_4\beta + c_2\gamma + d_1\delta = 0$
III $a_1\alpha + b_3\beta + c_2\gamma + d_4\delta = 0$	XV $a_3\alpha + b_1\beta + c_4\gamma + d_2\delta = 0$
IV $a_1\alpha + b_3\beta + c_4\gamma + d_2\delta = 0$	XVI $a_3\alpha + b_1\beta + c_2\gamma + d_4\delta = 0$
V $a_1\alpha + b_4\beta + c_2\gamma + d_3\delta = 0$	XVII $a_3\alpha + b_2\beta + c_1\gamma + d_4\delta = 0$
VI $a_1\alpha + b_4\beta + c_3\gamma + d_2\delta = 0$	XVIII $a_3\alpha + b_2\beta + c_4\gamma + d_1\delta = 0$
VII $a_2\alpha + b_3\beta + c_4\gamma + d_1\delta = 0$	XIX $a_4\alpha + b_1\beta + c_2\gamma + d_3\delta = 0$
VIII $a_2\alpha + b_3\beta + c_1\gamma + d_4\delta = 0$	XX $a_4\alpha + b_1\beta + c_3\gamma + d_2\delta = 0$
IX $a_2\alpha + b_4\beta + c_3\gamma + d_1\delta = 0$	XXI $a_4\alpha + b_2\beta + c_1\gamma + d_3\delta = 0$
X $a_2\alpha + b_4\beta + c_1\gamma + d_3\delta = 0$	XXII $a_4\alpha + b_2\beta + c_3\gamma + d_1\delta = 0$
XI $a_2\alpha + b_1\beta + c_3\gamma + d_4\delta = 0$	XXIII $a_4\alpha + b_3\beta + c_1\gamma + d_2\delta = 0$
XII $a_2\alpha + b_1\beta + c_4\gamma + d_3\delta = 0$	XXIV $a_4\alpha + b_3\beta + c_2\gamma + d_1\delta = 0.$

Digitized by Google

Now by relation (9)

$$(11) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0. \end{cases}$$

Hence, shortening the notation and calling the planes I, II, ... (1234), (1243), ... we see that the planes

(1234), (2341), (3412), (4123) meet in a point.

So do (1234), (2413), (3142), (4321);

also (1234), (2143), (3421), (4312);

and (1234), (2143), (3412), (3421).

Now by the theory of Latin Squares[1]) we shall have four sets of four planes arising from each of the six planes beginning with the figure 1. Hence there will be 24 such points (unrepeated), and each of the planes I—XXIV will pass through four of the points. Thus *the 24 planes intersect four by four in 24 points, and each plane of the system contains four of these points.* These points are evidently analogous to the Steiner and Kirkman points of intersection of the Pascal lines of a hexagon inscribed in a conic.

Analogue of the Nine-point Circle.

In seeking to extend properties of the triangle to three dimensions, we are at once confronted with the difficulty that the tetrahedron is a more "general" figure in three dimensions than the triangle is in two dimensions, and therefore that many properties of the triangle, e. g. the orthocentre, can only have their analogue in a restricted form of the tetrahedron. The necessity of this limitation has long been recognized, and analogues of the nine-point circle have been obtained for a tetrahedron with its opposite edges at right angles, generally referred to as the *orthocentric* tetrahedron.

The most important of the analogues which have been obtained for the nine-point circle are the two twelve-point spheres of the orthocentric tetrahedron.[2]) We shall here however investigate the properties of a 34-point cubic surface for the orthocentric tetrahedron

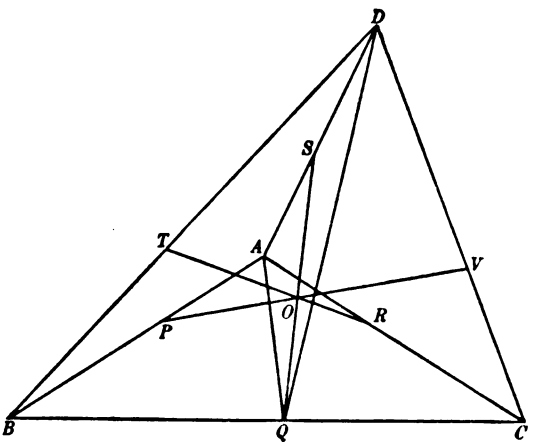
1) See for example Professor Cayley on Latin Squares, *Messenger of Mathematics*, Vol. 19, p. 135.

2) Temperley, *Messenger of Mathematics* **11** (1882) p. 114; S. Roberts, *Proc. L. M. S.* **19** (1888) p. 152; Longchamps, *Mathesis* **10** (1890) pp. 49, 77.

Digitized by Google

which presents some very close analogies to the nine-point circle of the triangle. These properties are stated in theorem (4) above, and may be proved as follows.

Let $ABCD$ be an orthocentric tetrahedron, and let the planes drawn through its edges perpendicular to the opposite edges meet those edges AB, BC, CA, AD, BD, CD in P, Q, R, S, T, V. Then it can easily be proved[1]) that the plane ADQ bisects the angle between the planes PTQ, RVQ. Hence the planes PSR, TQP, RVQ, STV form a tetrahedron, the bisectors of whose dihedral angles will be the planes ADQ, etc. This tetrahedron we may call the *pedal tetrahedron*. It may be noted that the orthocentre O of an orthocentric tetrahedron is the centre of the inscribed sphere of the pedal tetrahedron. The two tetrahedra are also in perspective, and O is their centre of homology.



Take now the pedal tetrahedron as the tetrahedron of reference. Then the equation of the plane ADQ is $\beta = \gamma$, and it is seen that:

The coordinates of A are given by $-\alpha = \beta = \gamma = \delta$

" " " B " " " $\alpha = -\beta = \gamma = \delta$

" " " C " " " $\alpha = \beta = -\gamma = \delta$

" " " D " " " $\alpha = \beta = \gamma = -\delta$.

The orthocentre O is the point of intersection of the planes bisecting the dihedral angles of the pedal tetrahedron; and its coordinates will be given by $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

The equation of any face, say BCD, of the original tetrahedron may be seen from the above to be $-\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. The point V will be the intersection of the three planes $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\alpha = \beta$; similarly P will be given by $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \delta$.

Consider now the point E whose coordinates are given by

$$\alpha = \beta = -\gamma = -\delta.$$

1) For the plane ADQ is perpendicular to the plane BCD, angle TQD = angle VQR, and angle PQA = angle RQA.

Digitized by Google

It lies on the planes $\alpha = \beta$ and $\gamma = \delta$, and therefore on PV their line of intersection. It also lies on the plane $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. This plane passes through the line of intersection of the planes $\alpha = 0$ and $-\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, i. e. of any two corresponding faces of the tetrahedron $ABCD$ and the pedal tetrahedron, and is the plane of perspective of the two tetrahedra. E therefore may be defined as the point in which the line PV, drawn perpendicular to the opposite edges AB, CD meets the plane of perspective of the original tetrahedron and the pedal tetrahedron; F, G are two similar points.

The actual coordinates of the points A, B, C, D, E, F, G, O may be tabulated as follows:

	α	β	γ	δ
A	$\frac{-3V}{-A+B+C+D}$	$\frac{3V}{-A+B+C+D}$	$\frac{3V}{-A+B+C+D}$	$\frac{3V}{-A+B+C+D}$
B	$\frac{3V}{A-B+C+D}$	$\frac{-3V}{A-B+C+D}$	$\frac{3V}{A-B+C+D}$	$\frac{3V}{A-B+C+D}$
C	$\frac{3V}{A+B-C+D}$	$\frac{3V}{A+B-C+D}$	$\frac{-3V}{A+B-C+D}$	$\frac{3V}{A+B-C+D}$
D	$\frac{3V}{A+B+C-D}$	$\frac{3V}{A+B+C-D}$	$\frac{3V}{A+B+C-D}$	$\frac{-3V}{A+B+C-D}$
E	$\frac{3V}{A+B-C-D}$	$\frac{3V}{A+B-C-D}$	$\frac{-3V}{A+B-C-D}$	$\frac{-3V}{A+B-C-D}$
F	$\frac{3V}{A-B+C-D}$	$\frac{-3V}{A-B+C-D}$	$\frac{3V}{A-B+C-D}$	$\frac{-3V}{A-B+C-D}$
G	$\frac{3V}{A-B-C+D}$	$\frac{-3V}{A-B-C+D}$	$\frac{-3V}{A-B-C+D}$	$\frac{3V}{A-B-C+D}$
O	$\frac{3V}{A+B+C+D}$	$\frac{3V}{A+B+C+D}$	$\frac{3V}{A+B+C+D}$	$\frac{3V}{A+B+C+D}$

We can now prove theorem (4). The equation of the principal circum-cubic of the pedal tetrahedron may be written

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} + \frac{D}{\delta} = 0. \tag{12}$$

The middle point of any edge, say AB, has coordinates proportional to $-A + B$; $A - B$; $C + D$; $C + D$. It therefore lies on the surface (12).

The coordinates of the middle point of the line joining the orthocentre to a vertex, say AO, are proportional to $-A$; $B + C + D$; $B + C + D$; $B + C + D$. Hence this point also lies on the surface.

Digitized by Google

The coordinates of the middle point of EF are proportional to $A-D;\ -B+C;\ B-C;\ -A+D$. Those of the middle point of EO are proportional to $A+B;\ A+B;\ -C-D;\ -C-D$; and those of the middle point of EA to $-A+C+D;\ B;\ A-C-D;\ A-C-D$. All the points therefore of which these are typical specimens lie on the cubic surface (12). The remaining points P, Q, R, S, T, V, being on the edges of the pedal tetrahedron are also points on the surface. Hence all the 34 points lie on the principal circum-cubic of the pedal tetrahedron.

Two further analogies may be noted between the circum-conics of a triangle, and the circum-cubics of a tetrahedron.

5. $A'B'C'$ is a triangle whose vertices lie on the sides of the triangle ABC; the two triangles are in perspective and O is their centre of homology. If the locus of O is a circum-conic of the triangle ABC, then the axis of homology passes trough a fixed point.[1])

6. $A'B'C'$, $A''B''C''$ are two triangles whose vertices lie on the sides of the triangle ABC; they are each of them in perspective with ABC, and O, O' are the centres of homology. If K, L, M be the points of intersection of the corresponding sides of the triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$, then AK, BL, CM meet in a point Z and if O, O' be any two points on a circum-conic of ABC, the point Z will be fixed.[1])

5. $A'B'C'D'$ is a tetrahedron whose edges pass through the edges of the tetrahedron $ABCD$; the two tetrahedra are in perspective and O is their centre of homology. If the locus of O is a circum-cubic of the tetrahedron $ABCD$, then the plane of homology passes through a fixed point.

6. $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$ are three tetrahedra whose edges pass through the edges of the tetrahedron $ABCD$; they are each of them in perspective with $ABCD$, and O, O', O'' are the centres of homology. If K, L, M, N be the points of intersection of the corresponding faces of the tetrahedra $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$, then AK, BL, CM, DN meet in a point Z, and if O, O', O'' lie on a circum-cubic of $ABCD$, the point Z will be fixed.

These properties may be established as follows. Let $ABCD$ be taken as the tetrahedron of reference, and let the edges AB, AC, AD, BC, CD, DB intersect the corresponding edges of $A'B'C'D'$ in P, R, S, Q, V, T respectively. Then if the tetrahedral coordinates of the

1) These now well-known properties were first discovered by Mr. A. Martin, *Messenger of Mathematics* Vol. IV.

Digitized by Google

centre of homology O be (x_0, y_0, z_0, w_0), the equation of any face of the tetrahedron $A'B'C'D'$, such as PRS, can at once be obtained as $-\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{w}{w_0}=0$. Similar equations represent the other faces, and it is seen that the plane of homology of the two tetrahedra is $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{w}{w_0}=0$. If the locus of O is the circum-cubic $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}+\frac{s}{w}=0$, the plane of homology passes through the fixed point $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{s}{w}$.

Again, if in theorem (6) $ABCD$ be taken as the tetrahedron of reference, and the coordinates of O, O', O'' be (x_0, y_0, z_0, w_0), (x_0', y_0', z_0', w_0') and $(x_0'', y_0'', z_0'', w_0'')$, the equations of three corresponding faces of the tetrahedra $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$, $A'''B'''C'''D'''$ will be $-\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{w}{w_0}=0$, $-\frac{x}{x_0'}+\frac{y}{y_0'}+\frac{z}{z_0'}+\frac{w}{w_0'}=0$, and $-\frac{x}{x_0''}+\frac{y}{y_0''}+\frac{z}{z_0''}+\frac{w}{w_0''}=0$. Their point of intersection K will be given by

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \frac{1}{y_0} & \frac{1}{z_0} & \frac{1}{w_0} \\ \frac{1}{y_0'} & \frac{1}{z_0'} & \frac{1}{w_0'} \\ \frac{1}{y_0''} & \frac{1}{z_0''} & \frac{1}{w_0''} \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{z_0} & \frac{1}{w_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{z_0'} & \frac{1}{w_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{z_0''} & \frac{1}{w_0''} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} & \frac{1}{w_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{y_0'} & \frac{1}{w_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{y_0''} & \frac{1}{w_0''} \end{vmatrix}} = \frac{-w}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} & \frac{1}{z_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{y_0'} & \frac{1}{z_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{y_0''} & \frac{1}{z_0''} \end{vmatrix}}$$

and the equation of the line AK will be

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{z_0} & \frac{1}{w_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{z_0'} & \frac{1}{w_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{z_0''} & \frac{1}{w_0''} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} & \frac{1}{w_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{y_0'} & \frac{1}{w_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{y_0''} & \frac{1}{w_0''} \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_0} & \frac{1}{y_0} & \frac{1}{z_0} \\ \frac{1}{x_0'} & \frac{1}{y_0'} & \frac{1}{z_0'} \\ \frac{1}{x_0''} & \frac{1}{y_0''} & \frac{1}{z_0''} \end{vmatrix}}.$$

Similar equations represent the lines BL, CM, DN. Hence AK, BL, CM, DN all meet in the point Z determined by the three planes $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}+\frac{w}{w_0}=0$, $\frac{x}{x_0'}+\frac{y}{y_0'}+\frac{z}{z_0'}+\frac{w}{w_0'}=0$, $\frac{x}{x_0''}+\frac{y}{y_0''}+\frac{z}{z_0''}+\frac{w}{w_0''}=0$. If O, O', O'' lie on the circum-cubic $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}+\frac{s}{w}=0$, then Z is the fixed point $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{w}{s}$.

London, June 24, 1910.

Digitized by Google

Zur Entstehung des 60-Systems.

Von G. Kewitsch in Freiburg i. B.

Es ist recht erfreulich, daß sich jetzt mehr Mathematiker mit dieser Frage beschäftigen. Merkwürdig ist aber, daß meine Nachfolger Simon, Hoppe[1]), Löffler[2]) zwar die Abfuhr der astronomischen Erklärung billigen, aber nicht das handliche Zählen, das Abfingern. Ja, meine Herren, ich bin doch auch Mathematiker und weiß, daß der Radius sich 6mal in den Kreis legen läßt, daß der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 60 Grad hat, daß 60 die kleinste Zahl ist, welche die ersten sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Faktoren enthält. Aber aus solchen rein mathematischen Erwägungen entsteht bei keinem Volk ein Zählsystem. Um eine mathematische Erklärung zu geben, hätte ich keine 6 Jahre nötig gehabt, um etwas Wahrscheinliches vorzutragen, das nicht auf bloßer Spekulation beruht, sondern Realitäten zur Grundlage hat. Alles Zählen beruht auf Abfingern; das Rechenbrett für handliche Fertigkeit gehört mit dazu, es tritt bei höherem Kulturstande auf, ohne jedoch das Abfingern ganz zu verdrängen, denn man hat nicht immer ein Rechenbrett mit seinen Schnüren und Kugeln zur Hand. Man unterschätze das Abfingern nicht; ich habe an einem Beispiel gezeigt, daß die Kurden in Persien noch heute mit Abfingern verblüffend schnell multiplizieren.

Es kann alles nichts helfen, jedes Zählen ist eine ethnologische, keine mathematische Frage. Wie hätte sonst das 11-System entstehen können! Ja, selbst unser 10-System, das die Welt erobert hat, ist unmathematisch; das 12-System ist weit besser, und dennoch hat es dem 10-System weichen müssen. Wäre der Faktorengedanke etwas Bestimmendes bei einem Zählsystem, dann hätte es nur 6- und 12-Zähler gegeben.

Für das 6-Zählen der Sumerer habe ich eine Anzahl Gründe und Belege herbeigeschafft, die beweisen, daß die 6 zum Kultureigentum dieses Volkes gehörte. Wenn ich das 6-System auf zwei Arten des Abfingerns verständlich mache, so ist das immerhin besser als nichts und ethnologisch wertvoller als Vorstellungen aus der Geometrie oder Faktorenzerlegungen. Wir wollen uns doch hüten, den Menschen, die

1) Dieses Archiv (3) **15**, 304—313; **16**, 278—279.
2) Dieses Archiv (3) **17**, 135—144.

Digitized by Google

vor vielen Jahrtausenden gelebt haben, unsere eigene Kultur zuzulegen. Der Begriff „Winkel“ und gar seine Drehung zu einer Vollebene, ebenso der Begriff „Faktorenzerlegung“ liegt viel zu hoch, jedenfalls höher als das Abfingern. Das Zählen gehört zu den früheren Gehirntätigkeiten als so abstrakte Vorstellungen. Wir wollen nicht vergessen, daß es noch heute Volksstämme gibt, die nur bis 3 zählen können. Dann werden wir auch an solche glauben dürfen, die schon bis 6 vorschritten, und daß „6“ lange Zeit ihnen die höchste Zahl war. Und wenn sie die ersten fünf mit den Fingern bezeichneten, so ist die Hand, die Faust für „6“ als zur Zeit „Höchstes“ ein ganz natürliches Sinnbild. Die $^1/_6$-Brüche, die Teilung des Tages, des Monats, des Jahres, des Längenmaßes in 6 Abschnitte, dann die Verwendung der Zahl 6 in allgemeinen Sentenzen, wie ich sie in den Unterrichtsblättern 1909 Nr. 6 im Anschluß an meinen Vortrag in der Freiburger Pfingstversammlung mitgeteilt habe, weisen unumstößlich darauf hin, daß die Urbevölkerung des Zweistromlandes zu den 6-Zählern gehörte. Mit dem bloßen Leugnen, daß es 11- und 6-Zähler gegeben habe, sind die Belege nicht aus der Welt geschafft und ist meine Erklärung beider Zählarten nicht durch eine bessere ersetzt.

Man wendet ein: die Namen der Zahlen in der Keilschrift für 1 bis 10 *išten*, ... *ešru* sprechen für 10-Zähler, ebenso die Keilschrift, wo der Haken ‹ den Wert 10 habe. Ja, glaubt man denn, das sei mir bei dem 6-jährigen Studium dieser Frage unbekannt geblieben? Jene Zahlnamen sind ja assyrische, und die Assyrer waren wie alle Semiten 10-Zähler. Die Sprache des Urvolkes kennen wir nicht. — Dann das Keilzeichen ‹. Die Sumerer als 6-Zähler und Erfinder der Keilschrift hatten nach meiner Vorstellung anfangs nur den Keil 𒁹, den sie neben und unter einander stellten: 𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 — 𒌋 𒌋𒁹𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹. Als sie anfingen, über 6 hinaus zu zählen, konnten sie noch eine dritte Reihe Keile hinzufügen: 𒌋 𒌋 𒌋, darüber hinaus aber nicht mehr, das Schriftbild würde zu umständlich. So schuf man denn eine zweite Ziffer ‹, die sich mit dem Spatel in Lehm leicht schreiben ließ und den Zahlwert 10 erhielt, das ist eine Klammer von 10 Keilen. Und weil die Sumerer nur die zwei Ziffern 𒁹 und ‹ hatten, mußten sie für höhere Zahlen notwendig auf den Stellenwert gelangen. Das ist ganz unabhängig vom Zahlsystem. Wären die Sumerer 10-Zähler gewesen, dann fehlte es an jedem vernünftigen Grund, warum sie bei dem Stellenwert dem linken Keil in 𒁹‹𒁹 = 71 den Wert 60 und nicht 100 beilegen sollten. Die Assyrer

Digitized by Google

als 10-Zähler hatten für 100 das Zeichen 𒁹. (Man hält es für ein Wort wie unser „hundert“ und spricht es *me* oder *mi*). Wie soll man verstehen, daß 10-Zähler zwar 9 Keile 𒌋, aber nicht 9 Haken 𒐐 zusammenstellen, wo doch 100 bei allen 10-Zählern der natürliche Abschluß ist? Waren die Sumerer aber 6-Zähler, dann erklärt sich der Abschluß bei 60 ganz einfach und natürlich: der frühere Abschluß 6, der aus grauer Vorzeit zur festen Gewohnheit in Sprache und Leben geworden war, wurde als höhere Zahleinheit erfaßt und an den zehn Fingern abgezählt. Von solch höherer Zahleinheit berichten die Reisenden noch heute: die Valman auf Neu-Guinea zählen Finger und Zehe bis 20, für höhere Zahlen verwenden sie als Zahleinheit nicht 20, sondern 5.

Bei weiterer Kulturentwicklung genügte der Abschluß 60 auch nicht mehr, man schritt weiter vor. Erhielt der linke Keil in 𒐕 den Wert *sôs*, dann ergab sich von selbst für den linken Haken in 𒐖 der Wert 600 *nêr*, womit Cantors Frage: wie kommt 600 ins 60-System? beantwortet ist. Mit dem weiteren Keil in 𒐗 $= 60^2 + 10 \cdot 60 + 60^1 + 10 + 1$ kam man abermals zu einem Abschluß; *sar* $= 60^2$ heißt Abschluß. Es war dies lange Zeit hindurch die höchste begreifbare Zahl. Später wurde auch sie überschritten, wie Hilprechts Tafeln zeigen.

Zu Herrn Hoppes Einwänden gegen meine Darlegung der zwei Zählmethoden, die Herr Löffler für stichhaltig erklärt, bemerke ich: Die Entstehung des 60-Systems durch Zusammentreffen von 6- und 10-Zählern führe ich nur als eine Möglichkeit an. Meine eigentliche Erklärung ist: die höhere Einheit 60 ist entstanden aus der 6-heit, wenn jeder Finger den Wert 6 erhält; oder aus der 10-heit, wenn die Zehner wie die Einer von den 6-Zählern behandelt werden.

Wenn ich in meiner zweiten Abhandlung über Hilprecht nur 5 Zeilen schrieb, so erklärt sich das einfach: ich fand nichts, was auf die Entstehung des 60-Systems schließen ließ. An den Grund der Faktorenfassung glaube ich nicht, weil er zu abstrakt ist. Sodann ist doch auffallend, daß in den Hilprechtschen Tafeln unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 25, 30, 36, 40, 45, 50, 60 ... für sollende 10-Zähler grade 10, 15 fehlen; auch sieht man nicht, warum 16 fehlt. Hieraus einen Schluß zu ziehen auf die Entstehung des 60-Systems, ist unmöglich. Darin aber hat Löffler gegen Hoppe recht, daß ein Volk zu höheren Zahlen nicht durch Teilen, sondern durch Vervielfachen gelangt.

Digitized by Google

Auf meinen Hinweis, daß in mehreren Sprachen die Endungen der Zehner 20, 30, 40, 50, 60 gleichartig, von 70 ab anders lauten, geht kein Kritiker ein; diese Eigentümlichkeit wird aber verständlich, wenn man die Sprecher an den Fingern abzählen läßt, nur ist dann 10 die höhere Zahleinheit. Wie soll man glauben, daß ein von 10-Zählern ausgedachtes künstliches Zahlsystem-60 Einfluß auf die Sprache, Sitten, Sinnsprüche eines Volkes ausüben werde, wofür ich die Belege beigebracht habe! Besonders auffallend ist in ihnen die Gegenüberstellung von 6 und 60.

Freiburg (Baden).

Digitized by Google

Rezensionen.

Luigi Bianchi, Professor an der Universität zu Pisa. **Vorlesungen über Differentialgeometrie.** Autorisierte deutsche Übersetzung von Prof. Max Lukat, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Danzig. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. XVIII u. 721 S. 8. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 22,60, geb. ℳ 24,60.

Bianchis Differentialgeometrie erfreut sich eines wohlverdienten Erfolgs, da nunmehr auch die deutsche Ausgabe zum zweitenmal erscheint. Die wichtigsten Änderungen gegenüber der ersten Auflage sind die folgenden:

Die beiden letzten Kapitel über die Differentialgeometrie in höheren Räumen, die einen Zusatz zum italienischen Original bildeten, sind wieder weggelassen worden. Hieraus hat der Herr Verfasser die erwünschte Konsequenz gezogen, die Behandlung der Christoffelschen Differentialausdrücke im zweiten Kapitel auf den Fall binärer quadratischer Differentialformen einzuschränken. Vielleicht wären sie besser nun ganz weggeblieben. Man kann sehr wohl ohne diesen abschreckenden Rechnungsapparat auskommen. Bei dieser Gelegenheit hätten dann auch die unorganischen Gaußschen Zeichen D, D', D'' entfernt werden können, die schon vielfach getadelt worden sind. An Stelle der weggefallenen Kapitel sind mehrere andere getreten, die neue, großenteils von Bianchi selbst herrührende Untersuchungen enthalten.

In Kapitel XVIII handelt es sich um die Transformationstheorie der Flächen von konstanter positiver Krümmung und zugehörige Sätze von Guichard über Biegung von Rotationsflächen 2. Grades, insbesondere um den Nachweis, daß sich durch Integration einer Riccatischen Gleichung das bezeichnete Biegungsproblem zurückführen läßt auf die Lösung des Biegungsproblems für eine Kugel, also auf die Theorie der Flächen konstanter positiver Krümmung. Es kommen hierbei schöne geometrische Resultate zum Vorschein, z. B.: „Rollt ein Rotationsparaboloid auf einer beliebigen seiner Biegungsflächen, so beschreibt der Brennpunkt des Paraboloids eine Minimalfläche. Rollt ein verlängertes Rotationsellipsoid auf einer beliebigen seiner Biegungsflächen, so beschreibt jeder Brennpunkt eine Fläche von konstanter mittlerer Krümmung."

In den folgenden Kapiteln dehnt dann Herr Bianchi diese Theorie auf Flächen aus, die auf sogenannte allgemeine Flächen 2. Grades abwickelbar sind. Die zuvor schon betrachteten Bäcklundschen Transformationen der Flächen konstanter Krümmung werden jetzt nach Lie aufgefaßt als unendlichvieldeutige Transformationen von Flächenelementen — bei Bianchi zweckmäßig Facetten genannt. Eine solche Transformation ordnet jeder Facette nach einfachem Gesetz ∞^1 andere zu, und es kann sein, daß die ∞^3 Facetten, die den ∞^2 Facetten einer Fläche entsprechen, sich auf ∞^1 Flächen verteilen lassen. Es ist dann weiter möglich, daß diese Eigenschaft bei allen Biegungen

Digitized by Google

der gegebenen Fläche erhalten bleibt. Dies tritt ein bei den Flächen konstanter (im reellen Gebiete negativer) Krümmung und nur bei diesen.

Die Entdeckung des Herrn Bianchi, die in den neuen Kapiteln auseinandergesetzt wird, besteht nun darin, daß die hierauf und auf verwandten Sätzen beruhende Biegungstheorie der Flächen konstanter Krümmung — im Grunde die Theorie der Biegungsflächen einer Kugel — zu einer entsprechenden Theorie der Biegung sogenannter allgemeiner Flächen 2. Ordnung erweitert werden kann. An Stelle der Bäcklundschen Zuordnung von Facetten tritt dann eine andere, wobei die Sätze Ivorys über konfokale Flächen 2. Klasse zur Verwendung kommen. Es ist das ein unerwartetes Ergebnis, das zweifellos einen bedeutenden Fortschritt in der Theorie des Biegungsproblems bezeichnet, auch zu neuen Fragen Anlaß gibt, da, wie Herr Bianchi selbst andeutet, der eigentliche Grund dieser Erscheinungen noch nicht aufgedeckt ist. Vielleicht handelt es sich um einen besonderen Fall einer viel umfassenderen Gesetzmäßigkeit.

Außerdem finden sich, gegenüber der ersten Auflage, noch einige kleinere Zusätze, so über virtuelle Haupttangentenkurven (Scharen von Kurven auf einer Fläche, die nach deren Verbiegung Scharen von Haupttangentenkurven werden können).

Das Werk bewahrt in der neuen Gestalt die guten Eigenschaften, die es schon in der ersten Auflage ausgezeichnet haben. Eine konzise Darstellungsform hat es ermöglicht, einen unglaublichen Reichtum wertvollsten Stoffs auf oft sehr engem Raume zusammenzudrängen. Geometrisches Geschick verbindet sich hier mit analytischer Kraft und großer Darstellungskunst — Eigenschaften, deren Vereinigung leider selten ist. Ein Lehrbuch für Anfänger ist ein solches Werk natürlich nicht, und es erhebt wohl auch kaum einen Anspruch der Art. Daß aber ein mehr für Forscher als für Lernende bestimmtes Buch eine zweite Auflage und zwar nach der kurzen Frist von elf Jahren erleben konnte, kann als ein erfreuliches Zeichen der Zeit betrachtet werden.

Wo viel Licht ist, da darf wohl auch mancher Schatten sein. Man wird in solchem Falle kein übertriebenes Gewicht legen wollen auf Mängel, die in einem für Studierende bestimmten Buch oder bei Fehlen positiver Leistungen allerdings anders beurteilt werden müßten. Ganz leicht nehmen aber können wir solche Unvollkommenheiten auch hier nicht, zumal sie aus einem als *standard work* geltenden Buche sehr leicht ihren Weg in andere Schriften finden können, und aus der ersten Auflage tatsächlich schon in eigentliche Lehrbücher übergegangen sind.

Bei den verschiedensten Anlässen bekommt ein beglücktes Publikum immer wieder von neuem

> Zu schauen wie vor uns ein weiser Mann gedacht,
> Und wie *wir's* dann zuletzt so herrlich weit gebracht.

Besonders auch in Rezensionen offenbart sich das zufriedene Gemüt unseres Zeitalters. So ist schon mancher Autor um die ja freilich nicht immer willkommene Wohltat einer rechtzeitig geübten Kritik gebracht worden, die er, z. B. in neuen Auflagen seiner Schriften, zum Nutzen der Sache hätte verwerten können. Auch um das vorliegende Buch hat man eine fortschrittsfeindliche Legende gesponnen, derzufolge es zu den genannten Vorzügen auch

Digitized by Google

noch den haben soll, ein Musterbild von Klarheit und Strenge, überhaupt von Gründlichkeit zu sein.[1]) *Diese* Eigenschaften hat es nun eben nicht; vielmehr ist die knappe Vortragsweise zum Teil gerade durch Verzicht auf solche Qualitäten ermöglicht und dann ein wenig teuer erkauft worden.

Wir setzen der Kürze halber weiterhin voraus, daß der Leser das Buch zur Hand hat.

Sehen wir uns die Erklärung des Begriffs **Kurve** an (Seite 1). Ein wirklich aufmerksamer Leser wird hier zunächst die Bemerkung machen, daß nach dieser Definition ein Punkt eine Kurve ist. Das kleine Versehen ist leicht zu verbessern, *fügen wir also die nötige Einschränkung hinzu!* Sodann wird von den zur Erklärung der Kurve dienenden Funktionen

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

verlangt, daß sie samt ihren ersten zweiten und dritten Differentialquotienten endlich und stetig sind, „ausgenommen höchstens in einzelnen besonderen Punkten." Diese Definition ist doch offenbar viel zu weit, um die darauf gegründeten ferneren Erklärungen und Lehrsätze zu rechtfertigen. Was hat es für einen Sinn, von Tangente, Krümmung usw. in den zugelassenen Ausnahmspunkten zu reden, über die irgend etwas Näheres nicht festgesetzt ist? *Streichen wir also den hervorgehobenen Satz!* Jetzt kann es noch geschehen, daß der Ausdruck für die Torsion — der nicht explizite aufgestellt wird! — allenthalben in der Form 0 : 0 erscheint. Was ist die Torsion einer geraden Linie? Ja, die Geraden und die Kurven, die wenigstens teilweise gerade sind, sind bei dieser Gelegenheit (und bei einigen anderen) versehentlich nicht ausgeschlossen worden. *Schließen wir sie also aus!* Aber auch dann kann der Ausdruck für die Torsion noch an gewissen Stellen die Form 0 : 0 annehmen. *Hier wird also wohl eine neue Definition nötig:* Man wird versuchen, die Torsion an solchen Stellen durch einen Grenzübergang von anderen Stellen her zu erklären, wo sie wohldefiniert ist. Wir sehen keinen anderen Weg. *Setzen wir voraus, daß es einen bestimmten Grenzwert gibt!* (was nicht der Fall zu sein braucht.) *Ist dann endlich der Kurvenbegriff in Ordnung?* Wie steht es auch jetzt noch z. B. mit dem Satze (Bianchi S. 8), daß die Kurven von der Torsion Null eben sein müssen? Und werden nicht die eben ausgeschlossenen geraden Linien an anderen Stellen wieder einzubegreifen sein? Tatsächlich erscheinen sie auf S. 33 unter den Kurven konstanter Torsion. Also haben sie doch eine Torsion, und welche? (Vgl. auch S. 120, Satz von Enneper.)

Da ist also gleich unser erster Ausbesserungsversuch gescheitert — und noch sind wir nicht über den Anfang hinausgekommen. Wir müssen wieder von vorn beginnen, und dabei als Gewinn aus der eben angestellten Überlegung die betrübende Einsicht in Kauf nehmen, *daß es einen Kurvenbegriff, der zu allen Behauptungen unseres Autors paßte, gar nicht gibt,*

1) Wir kennen nur eine ernsthaft zu nehmende Rezension, aus der Feder eines amerikanischen Mathematikers, J. K. Whittemore (Bull. Am. Math. Soc. v. VII, 1901, pp. 431—442; vgl. ebenda VIII, 1901, p. 129). Aber auch in dieser liest man: *„The treatment is throughout clear and usually exhaustive . . . There is not a page that is dull . . . . If the book has any fault, it is that it is in many places too difficult for the beginner . . . . A good testimony to the excellence of the book is that Darboux finds in it nothing to criticise but its title."* (!) — Noch andere namhafte Mathematiker hätten als Eidesbelfer genannt werden können.

Digitized by Google

Ebenso unklar und schwankend wie der Kurvenbegriff sind andere Begriffe Bianchis. Betrachten wir noch den der **Fläche**. Von dem Fläche zu nennenden Gebilde werden auf S. 58 zwei Erklärungen gegeben, die nicht miteinander übereinstimmen und beide unbrauchbar sind.

Zuerst heißt es, daß eine Kurve (siehe oben), die sich „unter gleichzeitiger Gestaltsänderung" stetig im Raume bewegt, „eine Fläche erzeugt." Man fragt sich, was alles das zu bedeuten hat, und warum denn die bewegliche Kurve durchaus ihre „Gestalt" ändern muß. Die zweite Definition, bei der auf Gestaltsänderung der erzeugenden Kurve nicht weiter bestanden wird, würde auf eine der üblichen durch Formeln des Typus

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

hinauslaufen, wenn die Eigenschaften der Funktionen x, y, z sachgemäß angegeben worden wären. Nach Bianchis Wortlaut aber müßte (außer $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) z. B. auch das Formelsystem

$$x = u + v, \quad y = 0, \quad z = 0$$

eine Fläche darstellen, ja diese — in Wirklichkeit eine Gerade — müßte „krummlinige Koordinatensysteme" enthalten! Ob und wie der Flächenbegriff von der Wahl der Parameter u, v abhängt, wird ebenfalls nicht gehörig erörtert, und es wird öfter angenommen, daß eine „Fläche" auch durch irgend eine Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

„gegeben" werden darf (z. B. S. 59), während diese ja einen Widerspruch einschließen oder etwa einen Inbegriff von Punkten, Kurven und Flächen liefern kann. Und in der Tat werden auch solche zusammengesetzte Figuren von unserem Autor zuweilen durch das Wort *Fläche* bezeichnet. So nennt er den Ort der Brennpunkte eines Strahlensystems gelegentlich auch schlechtweg *Brennfläche* (S. 273), wiewohl es sich in der Regel um *zwei* verschiedene Örter handelt, *und diese nicht notwendig flächenhaft ausgedehnt sind.* Es fehlen auch die entsprechenden Kriterien, die zwar unschwer zu bilden sind, in einem systematischen Werke aber trotzdem zu finden sein müßten.

Die bezeichneten Übelstände finden sich auch schon, bevor noch ein Flächenbegriff erklärt ist, in einem kleinen Abschnitt über **Enveloppen** (§ 12). Was sollen wir zu dieser Enveloppentheorie sagen! Man braucht gar nicht aus dem Bereich der elementaren Funktionen hinauszutreten, um zu erkennen, daß da allerhand Erschleichungen gemacht werden, *daß nichts, was da steht, so wie es da steht, richtig ist.* Man bilde Beispiele wie

$$f(x, y, z, \alpha) = \alpha \,.\, x, \quad = x - \alpha, \quad = x - \alpha y, \quad = (x - \alpha^2)^2 + y^2 - 1,$$

$$f = y - \sqrt{1 - (x - \alpha^2)^2} \quad \{\, |x - \alpha^2| < 1 \,\},$$

die sämtlich die von Bianchi aufgestellten Kriterien erfüllen, und wende darauf seine Regeln an!

Andere Fehler höchst bedenklicher Art finden sich in der **Behandlung der imaginären Elemente.**

In den Definitionen der Grundbegriffe werden nur reelle Funktionen zugelassen, und diese sucht der Verfasser dann so allgemein wie irgend möglich

Digitized by Google

zu wählen; wie wir es am Beispiel der Kurven gesehen haben. Daß die Durchführung dieses *mit großen Schwierigkeiten verbundenen* Planes nicht gelungen ist, haben wir schon gezeigt. Zu allem Unglück stellt aber ungebeten auch noch das Imaginäre sich ein, und dann wird es in einer Weise behandelt, die an vergangene Zeiten erinnert. So erfahren wir auf S. 21 nebenbei, daß eine gewisse Figur nicht „reell" zu sein braucht. Richtig ist, daß sie nicht immer existiert, nicht reell aber kann nur heißen, sie ist imaginär. Ähnlich wird auf Seite 70 gesagt, daß auf „jeder Fläche" gewisse „imaginäre" „Kurven" „liegen". Wir müssen jedes Wort in Gänsefüßchen setzen; denn das alles hat *keinerlei Sinn*, wenn die betrachteten Flächen nicht analytisch sind. Und soweit man mit den gebrauchten Worten einen Sinn verbinden kann, ist dieser doch nicht erklärt. Können nicht manche Bestimmungen, wie die über die Vorzeichen gewisser Quadratwurzeln, überhaupt nicht auf das komplexe Gebiet übertragen werden? Wie sind dann also Voraussetzungen, Lehrsätze und Beweise zu modifizieren? Warum sind diese Bestimmungen, deren Nutzen durchaus nicht unzweifelhaft ist, überhaupt getroffen worden? Was heißt es, eine imaginäre Fläche — doch wohl Ort von ∞^4 komplexen Punkten — auf eine reelle Fläche — nach Definition Ort *nur* von reellen und dann von ∞^2 Punkten — abwickeln? Eine systematische Behandlung des Imaginären wird nirgends auch nur versucht, überall fehlen die nötigen Definitionen, Einschränkungen und Beweise. Die im komplexen Gebiete auftretenden neuen Erscheinungen werden natürlich erst recht nicht gewürdigt. Wer will bei der großen Ausdehnung dieser Lücken ohne weiteres entscheiden, ob nicht einige Anwendungen komplexer „Kurven" usw. unter allen Umständen illegitim bleiben müssen?

So schön die eingangs besprochene Theorie ist: Nötiger wäre gewesen eine ordnungsmäßige Darstellung der Grundlagen, auf denen sie nebst anderen speziellen Theorien der Differentialgeometrie (z. B. der bei unserem Autor nicht sehr befriedigend ausgefallenen Theorie der Minimalflächen) beruht.

Nach Ansicht des Referenten kommen auch die Begriffe *Gruppe* und *Invariante* nicht zu ihrem Rechte, wiewohl sie keineswegs ignoriert werden. Damit hängt es wohl zusammen, daß in dem Satze auf Seite 52 die Begriffe kontinuierliche und gemischte Gruppe zusammengeworfen werden, und ebenso *im Fundamentalsatz der Flächentheorie* (S. 91) die Begriffe Bewegung und Umlegung (oder Kongruenz und Symmetrie). Diese falsche Fassung eines der wichtigsten Sätze geht, wie es scheint, so ziemlich durch die ganze Literatur. Derselbe Fehler ist auch schon in viel größerem Maßstab aufgetreten und hat daher den Gegenstand einer ziemlich umfangreichen Kritik gebildet (Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 17, 1908, S. 125—142). Ist diese Herrn Bianchi wirklich unbekannt geblieben oder hat sie nur keinen Eindruck auf ihn gemacht? Die Unterscheidung von Bewegungen und Umlegungen, von eigentlichen und uneigentlichen orthogonalen Substitutionen, die bei Bianchi auf Seite 564 erfolgt, und dort durch überflüssige und ganz unpassende Worte (rechtsgedreht, linksgedreht!) ausgedrückt wird, hätte in den Anfang des Buches (S. 14, 95) gehört. Auch das vermögen wir nicht zu billigen, daß Bianchi der mit dem Gegensatz Kongruenz — Symmetrie zusammenhängenden Vossschen Unterscheidung von Isometrie und Biegungsgleichheit (der Herr Übersetzer sagt Verbiegbarkeit!) zweier Flächen

Digitized by Google

die fernere „Existenzberechtigung" absprechen will (S. 177). Aus einem interessanten Satze von E. E. Levi, auf den sich Bianchi beruft, und der übrigens längst nicht alle Möglichkeiten erschöpft, geht im Gegenteil hervor, daß der genannten Unterscheidung eine Realität entspricht, daß sie also ganz gewiß sachgemäß ist.

Überhaupt ist es schwer, sich dem Eindruck zu entziehen, daß unser Autor auf korrekten Ausdruck kaum sonderlichen Wert legen kann. Er würde sonst mit den Worten nicht auf die geschilderte Art umgegangen sein. Sicher weiß er, so gut wie sein Referent, wie es zum Beispiel um die sogenannten Brennflächen steht. (Vgl. S. 241, 242.) Und auch das kann ihm kaum entgangen sein, daß er sich bei Berichtigung eines Satzes seiner ersten Auflage wiederum einer Kritik aussetzt, die er mühelos hätte vermeiden können. Wir wenigstens halten es nicht für statthaft, einen Lehrsatz aufzustellen — und als evident zu bezeichnen! — und dann in einer Anmerkung eben diesen Satz teilweise wieder zurückzunehmen, wie es auf Seite 269 geschieht. Wie kann nur evident sein, was zugestandenermaßen nicht richtig ist? (Auf der hier bemerkbaren Flüchtigkeit beruht es wohl auch, daß der Leser an der genannten Stelle ein auch sachlich verzeichnetes Bild erhält. Der wirkliche Tatbestand ist sehr verschieden von dem, was Bianchi insbesondere durch den Gebrauch des Wortes Ausnahmefall zu verstehen gibt.)

Alles Gesagte läßt sich in zwei Worte zusammenfassen: *Πάντα ῥεῖ.* Es fehlt das Knochengerüste scharf umschriebener Begriffe. Man darf die Worte nicht wörtlich nehmen, wie es doch von einer mathematischen Untersuchung durchaus zu verlangen ist. Welches aber ihr Sinn sein mag, ist in vielen Fällen dunkel.

Zuzugeben ist, daß manche der (hier nicht besprochenen und mit einiger Vollständigkeit auch gar nicht aufzuzählenden) kleineren Mängel weiteren Schaden *bis jetzt* nicht angerichtet haben werden. Dort, wo sie stehen, können sie ausgebessert werden, und öfter auch leicht. Dazu ist natürlich nötig, daß der Leser sie bemerkt. *Unglücklicherweise tut das der Leser jedoch in der Regel nicht.* Haben doch ältere Kritiker solche Mängel ebensowenig gefunden, wie in der Zwischenzeit der Verfasser selbst. Und Sicherheit zu gewinnen dafür, daß im einzelnen Falle ein glücklich bemerktes Versehen weitere Folgen nicht gehabt haben wird, ist keineswegs leicht da, wo in einem kaum zu übersehenden Getriebe viele Räder ineinander greifen. Auf die schon in den Begriffen steckenden Unklarheiten ist zudem die ganze Argumentation überhaupt nicht anwendbar. Gründlich wird mit kleinen Mitteln den geschilderten Übelständen nicht abzuhelfen sein.

Bei alledem wollen wir durchaus nicht dem Gedanken Raum geben, daß aus dem Vorgetragenen ein ungünstiges Urteil über die Gesamtleistung des Verfassers abgeleitet werden könnte. Wir haben dem historischen Moment noch nicht Rechnung getragen, und wir haben einen Maßstab angelegt, der sich ziemlich weit von dem entfernt, was bei Beurteilung von Schriften über Geometrie (leider) üblich ist. Was wir zu tadeln fanden, hat Herr Bianchi wohl so ziemlich alles aus der Literatur übernommen, die er bearbeitet hat, und die gleichen Mängel sind bis auf die neueste Zeit kaum je beanstandet worden. Eine sehr umfangreiche Literatur zusammengetragen und gesichtet, komprimiert und geordnet, *in Wahrheit überhaupt erst der Benutzung zugäng-*

Digitized by Google

lich gemacht zu haben, das hat sicher eine gewaltige Arbeitsleistung erfordert, für die wir anderen Herrn Bianchi zu Dank verpflichtet sind. Es wäre nicht billig, alles von einem verlangen zu wollen.

Mit der Entwickelung, deren Ergebnis wir in dem Buche des Herrn Bianchi vor uns haben, werden wir uns abfinden müssen. Daß wir sie aber als einen Naturprozeß zu betrachten hätten, der auch für die Zukunft unserer Einwirkung entrückt ist, folgt wohl nicht. Es ist schwerlich eine Notwendigkeit, daß die Kritik fast alles mit Haut und Haaren hinunterschluckt, und daß namentlich eine auf sorgfältige Arbeit gerichtete Kritik zu den seltensten Ausnahmen gehört. Wenn die Überzeugung allgemein würde, daß es so nicht weitergehen kann, so würden gerechtfertigte Ausstellungen sich durchzusetzen vermögen, statt beinahe regelmäßig ignoriert oder gar noch zum Schaden des Kritikers ausgebeutet zu werden.

Soweit unsere geometrische Produktion überhaupt Anspruch auf ernsthafte Würdigung hat, ist sie vorwiegend Raubbau. Die Erfolge Steiners und anderer mehr oder minder naturwüchsiger Talente scheinen einer für Autoren und Referenten gleich bequemen Art der Urteilsbildung Vorschub geleistet zu haben, wonach es in der Geometrie nur auf „die Hauptsache" ankommen soll, *Präzision aber nicht Hauptsache ist.* Die Nachkommenden mögen zusehen, wie sie sich mit der ihnen zugeschobenen Aufgabe abfinden, der sie sich auf die Dauer nicht werden entziehen können, und deren Umfang und Schwierigkeit noch mit jedem Tage wächst; und sie werden sich sagen müssen, daß ihre Bemühung gerade dort am wenigsten auf Anerkennung zu rechnen haben wird, wo unter normalen Bedingungen sie solche zunächst würden suchen dürfen. Hier könnte eine nicht bloß Anfängern überlassene und sich ihrer Aufgabe bewußte Kritik eine Milderung schaffen, jedenfalls das weitere Anwachsen der indigesta moles geometrica einschränken und auf Herstellung von Präzision gerichtete Arbeiten ermutigen. Was im Falle der Analysis *consensu omnium* als unerträglich gilt, braucht auch in der Geometrie nicht geduldet zu werden. Mindestens sollten Lehrbücher, Monographien und Enzyklopädieartikel ordentlich rezensiert und so beurteilt werden, wie es das Interesse der Allgemeinheit verlangt. Die Kritik möge sich ein Herz fassen und dem Grundübel der modernen Eilfertigkeit zu Leibe gehen. Durch die Fiktion, daß „ein jeder" sein Bestes gibt, wird die Kritik gerade da lahmgelegt, wo sie am meisten nötig ist.

Mag man nun über den Zustand der Geometrie und über das, was zunächst not tut, denken wie man will, jedenfalls wird noch einiges Wasser ins Meer fließen, bis wir eine einwandsfreie Darstellung des ganzen von Bianchi bearbeiteten Stoffes haben werden. Bis dahin kann das besprochene Werk unschätzbare Dienste leisten, als unentbehrliches Hilfsmittel der Forschung, als unerschöpfliche Quelle der mannigfachsten Anregungen.

Wir schließen mit dem Wunsche: *Möge das wertvolle Buch in die rechten Hände kommen!* Nicht von Mathematikern, die mechanisch darauf loswirtschaften, um vielleicht beim ersten Zusammenstoß mit wirklicher Kritik sich in rasende Ajaxe zu verwandeln; sondern in die Hände solcher, die das Vorhandene mit Vorsicht zu gebrauchen wissen, so wie allein es mit Gewinn für die Wissenschaft gebraucht werden kann.

Digitized by Google

Die Übersetzung ist im Ganzen vortrefflich, recht mangelhaft jedoch, wiewohl nunmehr um drei Druckseiten erweitert, ist trotz gegenteiliger Behauptungen älterer Rezensenten das alphabetische Sachregister. Es findet sich darin zum Beispiel das Stichwort „Bemerkungen"(!), unter dem Stichwort „Flächen" aber sucht man vergebens die Flächen von konstanter Krümmung.

Bonn im Mai 1911. E. Study.

Alfredo Capelli. Istituzioni di analisi algebrica. Quarta edizione. XXVIII und 953 Seiten. Napoli 1909.

Die algebraische Analysis ist diejenige Disziplin der Mathematik, von der niemand recht weiß, was eigentlich darunter zu verstehen ist. Die einen meinen damit gewisse Teilgebiete der Analysis in elementarer Behandlungsweise, die anderen elementare Algebra. Aus historischen und sprachlichen Erwägungen verdient zweifellos die erste Auffassung den Vorzug (algebraisch heißt hier soviel wie „Infinitesimalrechnung vermeidend"). Das Capellische Werk sucht beiden Richtungen gerecht zu werden, wobei das Schwergewicht vielleicht etwas mehr auf der Seite der Algebra liegt.

Das Buch ist durchweg durch eine klare, streng logische und doch auch dem Anfänger zusagende Darstellung ausgezeichnet und kann daher, obwohl es leider durch eine ungebührlich große Zahl von Druckfehlern entstellt ist, auch deutschen Studenten aufs beste empfohlen werden. Besonders willkommen werden dabei die fast jedem Paragraphen folgenden Anmerkungen und Übungsaufgaben sein. Daß in diesen hin und wieder etwas vorausgesetzt wird, was erst in einem spätern Abschnitt oder garnicht in dem Buch vorkommt, schadet nichts, wirkt im Gegenteil anregend und zeigt den Zusammenhang des behandelten Stoffes mit andern Disziplinen.

Einige wenige Inkonsequenzen sind freilich auch zu beanstanden. Daß z. B. das auf Seite 390 eingeführte Zeichen „lim" bereits auf Seite 278 als etwas ganz Bekanntes angesehen wird, mag, weil es in einer Übungsaufgabe vorkommt, noch angehen; daß aber auf Seite 292 auch im Text dasselbe noch nicht definierte Zeichen benutzt wird, ist bedenklich. Bei der Zusammensetzung von zwei linearen Substitutionen S und T wird in Kapitel V mit ST bezeichnet, was späterhin durchweg TS heißt. Ähnliche Inkonsequenzen ließen sich noch mehrere anführen; doch ist der Schaden im allgemeinen gering und wird durch die gegenüberstehenden großen Vorzüge des Buches mehr als ausgeglichen.

Etwas allzu ausführlich ist wohl die Lehre von den ganzen Zahlen behandelt, insbesondere die doch jedem geläufigen Vorschriften, wie man zwei im dekadischen System geschriebene Zahlen addiert, subtrahiert etc. Die Einführung der ganzen Zahlen geschieht mittels des Begriffs der endlichen Menge auf Grund eines Satzes (Nr. 13), der darauf hinausläuft, daß eine endliche Menge keiner Untermenge äquivalent ist. Der Beweis, den Capelli für diesen Satz liefert, ist recht ansprechend; doch kann ich ihn insofern nicht als Beweis, sondern nur als Plausibelmachung anerkennen, als die Axiome, auf denen er beruht, nicht ausdrücklich formuliert sind. In der vom Verfasser gegebenen „Definition" der endlichen Menge, die bewußt den Begriff der Zeit zu Hilfe nimmt, sind sie nach meiner Meinung nicht enthalten.

In Kapitel III wird die Kombinatorik behandelt, sowie eine Einführung in die Theorie der Substitutionsgruppen gegeben, die bis zu dem für die Algebra

Digitized by Google

so wichtigen Satz führt, daß die alternierende Gruppe von mehr als vier Elementen einfach ist. Erst im folgenden Kapitel werden dann die negativen und gebrochenen Zahlen eingeführt. Daran schließen sich die Lehre der Determinanten und (sehr ausführlich) der linearen Gleichungen, sowie die Hauptsätze über rationale Funktionen. Besonders eingehend und elegant ist dabei in Kapitel VIII die Frage der gemeinsamen Teiler von zwei Polynomen erörtert (Sylvestersche Determinante; notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Teilers vom ϱten Grad).

In Kapitel IX werden sodann die irrationalen Zahlen eingeführt mittels einer Methode, die eine nicht unzweckmäßige Modifikation des Dedekindschen Schnittverfahrens darstellt. Daran anschließend sind in wünschenswerter Vollständigkeit die Rechenregeln für irrationale Zahlen auseinandergesetzt, sodann wird der Grenzbegriff erörtert, der die Grundlage für die im nächsten Kapitel behandelte Lehre von den unendlichen Reihen abgibt.

Nunmehr wechseln in bunter Folge algebraische und analytische Kapitel ab. So werden in Kapitel XI allgemeine Sätze über stetige Funktionen bewiesen, sodann der Differentialquotient eingeführt und der Taylorsche Satz hergeleitet (mit der allgemeinsten Form des Restgliedes). Kapitel XII ist den trigonometrischen Funktionen gewidmet, die durch die bekannten unendlichen Reihen definiert und nachträglich mit den aus der Geometrie bekannten Funktionen identifiziert werden. Dagegen behandeln die folgenden beiden Kapitel wieder algebraische Fragen, insbesondere den Sturmschen Satz, sowie verschiedene Näherungsmethoden für die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen. In Kapitel XV werden die komplexen Zahlen eingeführt; darauf entwickelt der Verfasser eine elementare Theorie der Potenzreihen, um schließlich im XVII. Kapitel sogar bis zur Theorie der elliptischen Funktionen vorzudringen (Thetareihen; Additionstheoreme).

Endlich sind die fünf letzten Kapitel wieder algebraischen Fragen gewidmet. Erst jetzt wird der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen und daran anknüpfend die Theorie der symmetrischen Funktionen entwickelt. Den Schlußstein bildet der Nachweis der Nichtlösbarkeit der allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grad mittels Wurzelzeichen. Der Verfasser gibt dafür den Abelschen Beweis; doch ist die Darstellung hier ausnahmsweise nicht sehr übersichtlich und zum Überfluß durch eine längere geometrische Digression über die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Winkels mitten auseinandergeschnitten. Auch hat sich auf Seite 876 ein Fehler eingeschlichen, indem der Fall $V_1 = 0$ nicht berücksichtigt ist. Etwas abseits steht das letzte Kapitel; es ist den quadratischen Formen gewidmet und bringt noch die Hauptsätze über Invarianten und Kovarianten.

Dies mag genügen, um von der außerordentlichen Reichhaltigkeit des Capellischen Buches eine Vorstellung zu geben. Wir besitzen in Deutschland kein Buch, das die gleiche Materie in solcher Vollständigkeit darbietet. Der erste Band von Weber und Wellsteins Enzyklopädie der Elementarmathematik ist, was die Auswahl des Stoffes anbelangt, noch am ersten mit ihm zu vergleichen. Doch geht das umfangreichere Capellische Buch in seinen Zielen vielfach weit über dieses hinaus und sei daher auch deutschen Studenten nochmals empfohlen.

Tübingen. Oskar Perron.

Digitized by Google

H. Zimmermann. Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 6. Aufl. Ausgabe B. Mit Anhang, enthaltend Quadrattafel. 204 und 20 Seiten. Berlin 1910, Wilhelm Ernst und Sohn. (Ausgabe A ohne Anhang ℳ 5,—) geb. ℳ 6,—.

Wer Produkte aus zwei oder mehr bestimmten Zahlen in größeren Mengen zu bilden hat, wird sich wohl sofort nach Mitteln umsehen, die dazu nötige Zeit zu verkürzen. Als solche Mittel sind vor allem Produktentafeln, Logarithmentafeln, Rechenschieber und Rechenmaschinen zu nennen. Die Rechenmaschinen sind wegen ihres hohen Preises nicht jedem zugänglich. Wo es auf große Genauigkeit nicht ankommt, wie z. B. in der Technik und bei den meisten physikalischen Messungen, ist der Rechenschieber wohl das bequemste Mittel und ist dort daher auch allgemein im Gebrauch. Seine Handhabung erfordert jedoch eine gewisse Übung. Die Logarithmentafeln sind, wo es sich nur um Multiplikationen handelt, zu umständlich. Hier sind Produktentafeln vorzuziehen, namentlich, wenn die Genauigkeit eine absolute sein soll, wie etwa bei den meisten Geldrechnungen. Unter den Produktentafeln zeichnet sich die Zimmermannsche, die 1889 in erster Auflage erschienen ist und jetzt in 6. Aufl. vorliegt, durch zweckmäßige Anordnung und durch Zuverlässigkeit aus. Sie enthält vor allem die Produkte aller ganzen Zahlen von 1 bis 100 mit den ganzen Zahlen 1 bis 999, dazu eine Faktorentafel für die ungeraden Zahlen von 1 bis 999 und einige wichtige Zahlenwerte. Eine Quadrattafel für 0,001 bis 10,009 ist als Anhang beigegeben (mit 4 Stellen hinter dem Komma).

Eine besondere Empfehlung der Zimmermannschen Rechentafel dürfte überflüssig sein.

Berlin. FRITZ EMDE.

Hâton de la Goupillière. Étude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques. 107 S. 4. Paris 1910, Gauthier-Villars.

Die vorliegende interessante Schrift gliedert sich in 3 Teile mit den bezüglichen Überschriften „Roulettes à base rectiligne", „Étude dynamique des roulettes", „Roulettes à base curviligne". Wir müssen den Titel und diese Überschriften zunächst erläutern, da ersterer nicht ganz der gewöhnlichen Übung entspricht und letztere etwas unkonsequent und unvollständig sind. Damit werden wir zugleich den Inhalt der Arbeit angeben.

Man versteht bei uns und auch in Frankreich — man sehe nur die *Leçons de cinématique* von G. Kœnigs (Paris 1897) — unter »Kinematik« den Teil der Dynamik, wo von Kräften abgesehen wird (etwa seit Ampère, 1834). In der Kinematik spielt aber noch die Zeit und damit Geschwindigkeit und Beschleunigung eine Rolle. Die Kinematik kann man rein geometrisch, wie Burmester in seinem *Lehrbuch der Kinematik* (Leipzig 1888), oder analytisch, wie Kœnigs behandeln. Von dieser Disziplin spaltete sich in noch jüngerer Zeit ein Zweig ab, der eigentlich der Geometrie angehört und wirklich in Frankreich *Géométrie cinématique* (A. Mannheim, Paris 1894), in Deutschland *Geometrie der Bewegung* (A. Schoenflies, Leipzig 1886) genannt wird. In dieser kinematischen Geometrie ist auch die Zeit ausgeschaltet. Unser Verfasser meint nun im Titel unter dem Worte »géométrique« die kinematisch-geometrische Behandlung, aber in der analytischen Form. Er gebraucht Polarkoordinaten, rechtwinklige und natürliche Koordinaten. Unter dem Worte »dynamique«

Digitized by Google

versteht er sowohl die kinematische als die eigentlich dynamische Behandlung. Der zweite kurze Teil befaßt sich aber auch nur mit Rollkurven auf geradliniger Basis. Der dritte Teil ist der umfangreichste; es handelt sich in ihm aber wieder fast nur um kinematische Geometrie in analytischer Form, unter Benutzung verschiedener Koordinatenarten, wovon die sphärischen Koordinaten nur einen kurzen Paragraphen einnehmen. Diesem folgt noch ein Paragraph über die »dynamische« Theorie solcher sphärischer Rollkurven, deren Basiskurve ein größter Kreis ist.

Wir haben oben schon die Schrift als »interessant« bezeichnet. Die Ausnutzung der verschiedenen Koordinatensysteme ist in der Tat sehr lehrreich. In den allermeisten nicht schon bekannten Fällen wird freilich das Resultat sehr kompliziert, oder es wird gar nur bewiesen, daß die Lösung auf eine Gleichung dritten oder vierten Grades führt. Immerhin ist es schade, daß wirklich nur eine »Studie« vorliegt. Das kommt schon darin zum Ausdruck, daß die Literatur nur unvollständig, deutsche Literatur garnicht berücksichtigt wird. Als natürliche Koordinaten benutzt der Verfasser ausschließlich den Bogen s und den Kontingenzwinkel ω, wie der übrigens auch nicht zitierte Abbé Aoust in seiner noch viel zu wenig ausgenutzten *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873). Aber Cesàro, der diese Koordinaten wie kein zweiter beherrschte und dessen Buch der Verfasser kennt (deutsch u. d. Titel *Natürliche Geometrie*, Leipzig 1901), hat nicht ohne Grund statt ω für gewöhnlich den Krümmungsradius ϱ benutzt. Das hätte auch der vorliegenden Schrift manchen Nutzen gebracht. Trotzdem sie also eigentlich nur eine selbständig erschienene Abhandlung ist, wird in Zukunft doch niemand an ihr vorüber gehen können, der sich mit Kurven und ihrer Erzeugung beschäftigt.

Pirmasens. H. Wieleitner.

G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von F. Schütte. 2. Aufl. II. Bd.: *Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven.* Mit 80 Figuren auf 6 Tafeln. VIII u. 384 S. gr. 8. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geb. ℳ 14,—.

Den I. Band der neuen Auflage habe ich im 17. Bande dieses Archivs (1910/11, S. 224/5) besprochen. Der jetzt vorliegende zweite und letzte Teil enthält weniger Ergänzungen im Text als der erste. Nur ein großer Exkurs bei der logarithmischen Linie fällt auf. Sonst ist alles mehr in Notizen und Anmerkungen gedrängt, was seit 1902 an neuem Stoff dazukam. Mit der Bezeichnung »inhaltsreiche Abhandlung« werden Arbeiten erledigt, deren Resultate in dem Werke nach den Intentionen der ersten Auflage in extenso wiedergegeben sein sollten. Auch findet man, daß wirklich wertvolle Abhandlungen, wie die von Santangelo (Rend. Circ. mat. Palermo XXIX), die schon anfangs 1910 erschien, nicht besprochen wurden. Man versteht ja wohl, daß der Verfasser, besonders wenn er gerade mit anderen Arbeiten beschäftigt ist, sich schwer ganz wieder auf den Standpunkt stellt, den er der ersten Auflage gegenüber einnahm. Ein paar Bogen mehr oder weniger hätten doch gewiß bei einem solchen Fundamentalwerke nichts ausgemacht. Einstweilen ist es auch noch nicht schlimm, aber bis in 10 Jahren, wo hoffentlich eine dritte Auflage nötig sein wird, würde der angedeutete Übelstand schon mehr hervortreten.

Digitized by Google

Für Benutzer des Buches erlaube ich mir, wie zum I. Band, hier auch zum zweiten, einige Ergänzungen für die „Berichtigungen und Zusätze" zu geben. Zu S. 37: auch Simon zeichnet in seiner „Analytischen Geometrie" (S. 360) nur eine halbe Archimedische Spirale. S. 39, Z. 8 v. u. u. S. 51, Z. 4 »Polarsubnormale« statt »Subnormale«; S. 40, Z. 11 v. u. ist A' mit A'' zu vertauschen; S. 40, Fußnote[1]) *Geom. indivisibilium*; S. 41, Z. 18 (5) statt (4); S. 50, Z. 3/4 v. u. gilt nur für Fermatsche Spiralen; S. 85, Z. 7 (Mitte) »4« statt »1 + «; die Identität der fettgedruckten Sätze S. 102/3 u. S. 107/8 ist nicht angedeutet; S. 90, Nr. 204 ist nicht deutlich (Clairaut sagt es aber doch, daß es sich nur um Trochoiden handelt (wie auch S. 273 unten); S. 125[1]) 1886 statt 1880; S. 127, Z. 14 $\frac{1}{2a}$ statt $\frac{a}{2}$; S. 148, Z. 4 im Nenner unter dem Integral c^2 statt ϱ^2, Z. 9 v. u. besser: „eine zweite Evolvente des Kreises"; S. 209, Z. 1 v. u. $k\pi\alpha$ statt $2k\pi\alpha$, Z. 2 v. u. $2a\pi$ statt 2π; S. 252, Z. 12 (10) statt (3); S. 307, Z. 13 n mit n' zu vertauschen, in den Nennern beidemale + statt − zu setzen; S. 367, Z. 17 1905 statt 1903.

Zu diesen Kleinigkeiten sei das Bedauern gefügt, daß der historische Rückblick im Index nicht mit berücksichtigt wurde. Für die dritte Auflage könnte auch beachtet werden, daß die Zeitschrift »Mathesis« ohne Akzent, Cotes desgleichen und Coppernicus (im Index 111 statt III!) mit zwei p geschrieben werden sollte. Nun aber genug der Krittelei. Da das Werk als Ganzes zu loben überflüssig erscheint, sei wenigstens noch ein Vorzug der Neuauflage hervorgehoben, der nicht gering anzuschlagen ist. Im Sachregister ist durch Fettdruck die Stelle gekennzeichnet, wo die betreffende Kurve als Hauptobjekt behandelt wird. Das erspart dem Suchenden manchmal große Mühe.

Pirmasens. H. Wieleitner.

W. Jaeckel. Geometrische Untersuchungen über Kurven auf Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten. Progr. Gymn. Ohlau, Ostern 1909 (enthalten im Jahresbericht, 22 S. 4).

Der Verfasser behandelt die Kegelschnitte, ebenen und räumlichen Kubiken, sowie die räumlichen Quartiken beider Arten und die Systeme dieser Kurven auf der F_3' mit 4 einfachen Knoten mittels einer Zentralprojektion der Fläche von einem dieser Knotenpunkte aus. Insbesondere wird natürlich die Lage all dieser Kurven zu den Knotenpunkten der Fläche diskutiert. Die Schrift gibt immerhin Material zur Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.

Pirmasens. H. Wieleitner.

E. Pringsheim. Vorlesungen über die Physik der Sonne. Mit 235 Abbildungen und 6 Tafeln. VIII u. 435 S. gr. 8. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 16,—, geb. ℳ 18,—.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser bis zum Jahre 1905 an der Berliner Universität gehalten hat. Die äußere Einteilung in Einzelvorträge ist beibehalten, aber inhaltlich geht die Darstellung erheblich über das seinerzeit in den Vorlesungen Gebotene hinaus. Das Buch ist außerordentlich klar und anschaulich geschrieben und gibt vor allem eine für den Physiker sehr interessante Behandlung der Frage, welche physikalische

Digitized by Google

Deutungen für die modernen Spektralbeobachtungen der Sonnenphänomene, der Protuberanzen, Fackeln usw., speziell auch für die spektroheliographischen Aufnahmen von Deslandres und Hale, heranzuziehen sind. Dabei ist der experimentelle Befund und die theoretische Deutung stets klar auseinandergehalten, und überall treten die Probleme hervor, deren Lösung noch nicht zu geben ist. Die Abbildungen sind z. T. ganz vorzüglich, es sei hier nur auf die Aufnahmen der Corona und die Spektroheliogramme verwiesen, und im Text bietet oft die historische Form der Darstellung für den Physiker auch da Neues, wo bekannte Grundlagen, wie die Gesetze der spektralen Umkehr, der anomalen Dispersion, der kritischen Zustände usw. behandelt werden. Das Buch ist sehr zu empfehlen.

Berlin. R. Pohl.

E. Grimsehl. Didaktik und Methodik der Physik. (Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen v. Baumeister.) 115 S. München 1911, Beck. ℳ 3,—.

Der Verfasser sagt in der Vorrede, es sei die Didaktik (und damit doch wohl auch die Methodik) heute noch nicht abgeschlossen, und darum trage die Abhandlung einen stark subjektiven Charakter. Das ist richtig, aber das ist wirklich kein Fehler. Ich bezweifle, daß jemals eine Didaktik und Methodik ohne eine solche sehr persönliche Beziehung geschrieben werden kann. Aber es ist gut, wenn der Schreibende und Lesende sich stets vor Augen hält, daß es so ist, dann wird ein solches Buch von Segen sein. Es gibt ja gewiß einige wenige Grundsätze, welche allgemein von den Physikern zugestanden sind, aber was darüber hinausgeht, das hat alles eine sehr persönliche Note. Das ist auch der große Segen beim Physikunterricht, daß er nicht nach Schema F abzumachen ist, sondern daß Didaktik und Methodik nicht nur vom Lehrer, sondern auch von den Schülern abhängen. Es ist durchaus Grimsehl zuzustimmen, daß ein wirklicher Physiklehrer sowohl die Auswahl des Stoffes, wie die Methode der Behandlung der einzelnen Gebiete je nach den Anlagen und Neigungen der Klasse ändern muß. Das ist auch, ich möchte sagen, der Vorzug des Schulunterrichts gegenüber dem Universitätsunterricht, daß man den Weg aufsuchen kann, auf welchem man den jeweiligen Schülern am leichtesten verständlich wird.

Die Abhandlung zerfällt in drei Hauptteile: 1) Allgemeines, 2) Bedingungen für den Erfolg des Unterrichts, 3) Didaktik der einzelnen Unterrichtsgebiete. Im Anhang findet sich der Lehrplan der sogenannten Meraner Kommission und der Lehrplan der bayrischen Oberrealschulen. In dem allgemeinen Teile gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über Wesen, Inhalt und Ziel des physikalischen Unterrichts und diesen Gedankengängen wird man wohl allgemein zustimmen. Nur in der Unterscheidung von den übrigen Unterrichtsgebieten der Schule, speziell dem der Mathematik bin ich anderer Ansicht. Die Mathematik hat durchaus nicht nur die deduktive Methode der Forschung, sie ist in ihrem elementaren Teil wesentlich induktiv. Man kann sogar nachweisen, so weit die Mathematik vorstellbar ist, sind die meisten Entdeckungen und Fortschritte induktiv gemacht, und es ist sehr bezeichnend, daß der Mann, welcher als der Vater der deduktiven Mathematik bezeichnet werden darf, Euklid, wohl eine große Reihe neuer Beweise erfunden, aber keine neuen Gebiete erschlossen

Digitized by Google

hat. Das taten induktiv arbeitende Männer wie Archimedes. Darum gehe ich in der Forderung, die Mathematik in dem von Grimsehl gemeinten deduktiven Sinne nicht zur Hauptsache zu machen, noch weiter und verlange, daß die Formeln, welche man gebraucht, um ein Gesetz kurz und präzise auszudrücken, ebenfalls induktiv gefunden und nicht aus Hypothesen deduktiv geschlossen werden. In bezug auf den geforderten konzentrischen Unterricht in zwei Stufen, hätte bemerkt werden müssen, daß diese an sich zu billigende Einteilung nur durchführbar ist an Oberrealschulen und vielleicht an Realgymnasien, aber nicht an den Gymnasien, die in Obertertia mit einer Stunde Physik beginnen und in Untersekunda nur 1 Semester Physik haben. Ich habe mich viele Jahre abgequält, einen über die ganze Physik sich erstreckenden propädeutischen Unterricht in diesen wenigen Stunden zu geben, habe aber die Unmöglichkeit eingesehen, dies mit der selbstverständlichen Fundamentalforderung, nur aus dem Experiment zu lernen, zu vereinen; dann wird aus keinem Gebiet etwas Ordentliches gelernt. So lange also die Zeit so kärglich zugemessen ist, halte ich es für besser, sich auf einzelne Gebiete zu beschränken. Es ist auch anzuerkennen, daß Grimsehl jetzt die graphische Darstellung der Beobachtung und damit die Einführung in den Funktionsbegriff für den Physikunterricht in der Unterstufe schon in Anspruch nimmt, während er früher diese Einführung lediglich der Mathematik zuweisen wollte.

In bezug auf die Ausbildung der Lehrer scheint mir der Verfasser ein zu großes Gewicht auf die „Handfertigkeit" zu legen. Gewiß auch ich repariere fast alle Apparate selbst und habe manchen Apparat ganz selbständig konstruiert. Man kann damit sehr viel Geld sparen und selbst bei dürftigem Etat auf diese Weise mit der modernen Wissenschaft fortschreiten. Allein ich meine, es kann ein Physiklehrer das alles nicht verstehen und doch ein ausgezeichneter Physiklehrer sein, und andererseits läßt der logische Zusammenhang und die Richtigkeit des Unterrichts bei sehr geschickten Experimentatoren oft sehr viel zu wünschen übrig. Die größte Hauptsache ist und bleibt die wissenschaftliche Arbeit des Lehrers, die darf nicht mit dem Examen zum Abschluß kommen, sondern muß damit den Anfang nehmen; denn auf der Universität arbeitet der Student doch mehr oder weniger abhängig. Die Arbeit darf auch nicht etwa nur im Lesen einer pädagogischen Zeitschrift, wie der Poskeschen, oder im Nachkonstruieren von Apparaten für den Unterricht bestehen, sondern man muß sich ein Gebiet selbständiger Forschung auswählen und darin mit der Wissenschaft fortschreiten durch eigene Arbeit. Weil die pädagogische „Ausbildung" so sehr in den Vordergrund gerückt wird, erlebt man es täglich, daß die in den Seminaren zu guten Hoffnungen berechtigenden Kandidaten nach wenigen Jahren einen Eindruck wie ausgeleierte Maschinen machen. Ein dauernd brauchbarer Lehrer kann nur durch strengwissenschaftliche Arbeit erhalten werden.

Mit Freude konstatiere ich, daß auch Grimsehl die Einrichtung eines Schulmuseums im Poskeschen Sinne ablehnt, aber über den Segen der Ferienkurse kann man meiner Meinung nach verschiedener Ansicht sein. Nutzen können sie nur haben, wenn sie eine Vorführung der neuesten Fortschritte auf experimentellem Gebiet bringen; alles andere studiert man besser für sich. Eine ebenfalls strittige Frage ist das Lehrbuch. Für einen wirklich guten Unterricht, der dem entspricht, was auch Grimsehl fordert, ist das ausgeführte Lehrbuch nicht zu gebrauchen. Die Schüler sollen aus den methodischen Experimenten lernen, die sind aber in jedem Semester andere, denn der tüchtige Lehrer hat,

Digitized by Google

wie Gr. richtig hervorhebt, kaum die Möglichkeit seinen Unterricht jemals zu wiederholen. Ich halte daher für richtig bei der Repetition der nächsten Stunde kurz beschreiben zu lassen: was haben wir in der vorigen Stunde gesehen? Dann: was haben wir daraus geschlossen? Welches Gesetz haben wir also abgeleitet? Ein ausgearbeitetes Lehrbuch steht da in fast allen Fällen hindernd im Wege. Andererseits ist die präzise Fassung des Gesetzes dringend notwendig. So, meine ich, sollte man zweierlei tun, für die Benutzung im Unterricht sollte man ein kurzes nur die Resultate bietendes Heft drucken lassen, eventuell mit Aufgaben versehen, daneben aber sollte man den Schülern empfehlen, sich irgend ein größeres ausgearbeitetes Physiklehrbuch schenken zu lassen, in welchem sie lesen nicht etwa von Stunde zu Stunde, sondern gelegentlich, und am Schlusse eines Abschnittes die ganze Darstellung im Zusammenhang. Wenn Grimsehl meint, man lese ja im Sprachunterricht auch nicht ein Drama im Skelett, so beachtet er nicht, daß das Drama Objekt des Unterrichtes ist, in der Physik ist das Objekt des Unterrichts aber das Experiment. Daß Grimsehl hierfür die richtige Stellung im Unterricht verlangt, soll ausdrücklich gesagt werden, ich stimme dem vollständig zu auch mit Rücksicht auf die fertigen Apparate. Auch die didaktischen Bemerkungen haben meinen vollen Beifall. Bei dem Abschnitt über das Trägheitsmoment möchte ich jedoch bemerken, daß die Schwierigkeit für den Unterricht wohl nicht in der Ableitung des Ausdrucks $m.r^2$ liegt, sondern in der Anwendung dieses Ausdruckes auf konkrete Körper, d. h. in der Integration. Das ist also ein inhaltsreiches Buch, und wer es ernstlich durcharbeitet, hat sicher viel Nutzen davon. Allgemeine Rezepte gibt es nicht, um ein guter Lehrer zu werden; darum kann man nur dadurch lernen, daß man in die Methoden erfolgreicher Lehrer einen Einblick gewinnt. Das bietet Grimsehl hier, und darum sei das Buch allen jungen Lehrern empfohlen.

Niendorf. E. Hoppe.

R. Noack. Aufgaben für physikalische Schülerübungen. II. Aufl. 181 S. Berlin 1911, Springer. 3 *M*.

Der Verfasser ist einer der ersten Vorkämpfer auf dem Gebiet der Schülerübungen und hat eine langjährige Erfahrung auf diesem Gebiet. Daß er diese 2te Auflage seiner Übungen im wesentlichen unverändert gelassen hat, ist ein Beweis dafür, daß seine Methode sich für alle die Schulen bewährt hat, wo nur in den oberen Klassen experimentelle Übungen möglich sind. Das Arbeiten in gleicher Front hat gewiß seine großen Vorzüge, aber nur dann, wenn eine hinreichende Anzahl von Stunden vorhanden sind; sonst kommt man zu keinem irgendwie abschließenden Resultat. Noacks Buch wird besonders da gebraucht werden, wo Einzelübungen ausgeführt werden. Hierfür bietet es eine große Fülle brauchbarer und nützlicher Aufgaben. Nicht alle sind in gleicher Weise gut, diese wird man ruhig fortlassen können und hat an den übrigbleibenden doch reichlich Stoff. Zu den weniger guten möchte ich alle die rechnen, welche besondere Konstruktionen von Apparaten voraussetzen, z. B. Nr. 20, 41, 97, 122, auch einige andere, welche zu wenig genaue Meßresultate geben, oder bei welchen erhebliche Fehlerquellen durch die Unvollkommenheit der Kontrolle erwartet werden müssen; zu ersteren rechne ich Nr. 35, zu letzteren Nr. 57. Am fruchtbarsten sind die Versuche, welche mit einfachsten Mitteln durch vernünftige Zusammenstellung vorhandener Apparate von den Schülern selbständig ausgeführt

Digitized by Google

werden können. Ich halte es nicht für gut, für diese Übungen andere Apparate zu verwenden als die, welche im Unterricht auch gebraucht werden. Im übrigen bietet die Noacksche Arbeit eine Fülle von Anregungen zu Abänderungen der Versuche und kann daher auch solchen Lehrern, die schon ein System von Experimenten für ihre Übungen zusammengestellt haben, warm empfohlen werden.

Niendorf. E. Hoppe.

W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik. Mit 213 Figuren. XXIV u. 964 Seiten. gr. 8. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geb. ℳ 32,—.

Dieses Buch, geschrieben von Meisterhand, kann nicht nur für denjenigen, der sich mit Untersuchungen an Kristallen beschäftigt, sondern auch im allgemeinen für jeden Physiker das höchste Interesse beanspruchen. Die dort allgemeinen entwickelten Gesichtspunkte sind nicht nur für die Kristallphysik, sondern für die gesamte theoretische Physik von Bedeutung. Die Fülle des Materials erlaubt es nicht, in einem Referat eine eingehende Schilderung des Buches zu geben, und es seien deshalb in Kürze der Inhalt und die wesentlichsten Gesichtspunkte angedeutet.

Das Buch behandelt die gesamte Kristallphysik mit Ausschluß der Kristalloptik. Nach der Einleitung, in welcher der Verfasser seine Stellungnahme zu dem behandelnden Gegenstand klarlegt und einen historischen Überblick bringt, folgen (Kapitel I) die Symmetrieeigenschaften der Kristalle. Die klare und einfache Darstellung dieses an und für sich sehr trockenen Gebietes wird sicher dazu beitragen, dasselbe auch weiteren Kreisen verständlich zu machen und so die Zahl der Interessenten für die Kristallphysik zu vergrößern, die gerade infolge der Notwendigkeit, sich durch die Symmetrieeigenschaften durcharbeiten zu müssen, meistens von dem Studium der kristallphysikalischen Erscheinungen abgeschreckt werden.

Im zweiten Kapitel werden die physikalischen Funktionen behandelt und zwar skalare Vektoren und Tensoren verschiedener Art. Diese Trennung ist für das Studium der Kristallphysik von grundlegender Bedeutung. Gerade diese Trennung und Anwendung der in diesem Kapitel entwickelten Gesichtspunkte bildet eine der Eigenarten des Buches. Denn, wie der Verfasser am Schluß des dritten Kapitels bemerkt, sollen in dem Buche die Erscheinungen nicht, wie es meistens üblich, in thermische, mechanische usw. eingeteilt werden, sondern die physikalischen Vorgänge sind aufzufassen als *Wechselwirkungen zwischen gerichteten Größen verschiedener Ordnung.* Diesem Prinzip zufolge werden, nachdem im Kapitel III einige allgemeine physikalische Hilfssätze abgeleitet sind und zwar in einer der Kristallphysik entsprechenden Allgemeinheit, die kristallphysikalischen Erscheinungen in den nächsten Kapiteln nach den dabei in Frage kommenden gerichteten Größen eingeteilt.

Demnach werden behandelt: im Kapitel IV, Wechselbeziehungen zwischen einem Skalar und einem Vektor (Pyroelektrizität und Pyromagnetismus), im Kapitel V, Wechselbeziehungen zwischen einem Skalar und einem Tensortripel (Thermische Dilatation und tensorielle Pyroelektrizität), im Kapitel VI, Wechselbeziehungen zwischen zwei Vektoren (Elektrizitäts- und Wärmeleitung. Elektrische und magnetische Influenz. Thermoelektrizität), im Kapitel VII, Wechselbeziehungen zwischen zwei Tensortripeln (Elastizität und innere Reibung) und endlich im Kapitel VIII, Wechselbeziehungen zwischen einem Vektor und

Digitized by Google

einem Tensortripel (Piezoelektrizität, Piezomagnetismus und ihre Reziproken). Im Anhang I (Erscheinungen der Festigkeit) werden Erscheinungen behandelt, deren Gesetze mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften bis jetzt nicht aufgestellt werden konnten, und zwar: Spaltbarkeit, Zerreißungsfestigkeit, Härte und Gleitungen. Der Anhang II bringt in Kürze einige Betrachtungen über die Beziehungen zwischen den Kristallen und quasiisotropen Körpern, wobei unter „quasiisotrop" ein Aggregat von Kristallbrocken zu verstehen ist. Am Schluß befindet sich eine Tafel der allgemeinen Symmetrieformeln der 32 Kristallgruppen und eine Tafel der speziellen Symmetrieformeln für zentrisch-symmetrische Vorgänge. Sehr erwünscht wäre noch, bei der nächsten Auflage, zwecks leichterer Orientierung ein Namen- und Sachregister.

Berlin. W. v. Ignatowsky.

Otto Berg. Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik. 50 Seiten. Göttingen 1910. Vandenhoeck und Ruprecht. ℳ 1,60.

In leicht verständlicher Weise entwickelt der Verfasser an Hand der Maxwellschen und der Lorentzschen Theorien und des Michelsonschen Versuches den Gedankengang, welcher zu dem Relativitätsprinzip geführt hat. Es werden dann die Einsteinschen Transformationsgleichungen auf Grund der Annahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum abgeleitet. Dadurch gewinnt, wie Verfasser betont, die Lichtgeschwindigkeit eine prinzipielle Bedeutung. Referent möchte hierzu bemerken, daß man, ohne auf irgend eine spezielle Erscheinung Bezug zu nehmen, allein auf Grund des Relativitätsprinzips, obige Transformationsgleichungen ableiten kann, die mit einer universellen Konstanz behaftet sein müssen. Erst bei der zahlenmäßigen Bestimmung dieser Konstante, die der Dimension nach eine Geschwindigkeit sein muß, ersehen wir, daß sie numerisch gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Hieraus erst folgt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (vgl. W. v. Ignatowsky „Das Relativitätsprinzip" dieses Archiv Bd. 17, S. 1—24, und „Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip", Physik. Zeitschrift 11, 1910 Seite 972).

Berlin. W. v. Ignatowsky.

Paul Gerber. Gravitation und Elektrizität. Beilage zu dem Programm der städt. Oberrealschule i. E. in Stargard in Pr. 1910.

Der Verfasser versucht aus den elektrischen Daten die Gravitationskonstante zu berechnen. Die Spekulationen, auf Grund welcher der Verfasser zu seinem Resultat gelangt, beruhen auf einer eigenartigen Anwendung des Vektorpotentials, oder, wie es der Verfasser nennt, Tonus.

Berlin. W. v. Ignatowsky.

G. Combebiac. Les Actions à Distance. Scientia Nr. 30. Paris 1910. Gauthier-Villars.

Dieses kleine Buch enthält in Kürze die hydrodynamischen Betrachtungen von V. Bjerknes und A. Korn, deren Ziel es ist, die elektrischen Erscheinungen und die Gravitation zu erklären.

Berlin W. v. Ignatowsky.

Digitized by Google

Robert Weber. Beispiele und Übungen aus Elektrizität und Magnetismus. Mit 74 Fig. VII u. 330 S. 8. Leipzig 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 4,80, geb. ℳ 5,25.

Das vorliegende Buch ist eine Sammlung von Rechnungsbeispielen aus den verschiedensten Gebieten der Elektrizitätslehre und als solche nur zu begrüßen, da sich auf diese Weise für den jungen Elektrotechniker Gelegenheit bietet, sich mit den Grundbegriffen des Maßsystems vertraut zu machen. Die Beispiele sind sehr einfach gewählt und fast nur zahlenmäßig durchgerechnet, so daß es auch für den Anfänger leicht ist, dem Stoffe zu folgen. Das Buch enthält fünf Abschnitte: der erste behandelt „Mechanik und Wärme"; hierin wird gezeigt, wie man die Kraft-, Arbeit- und Wärmeeinheiten umzurechnen hat. Der zweite Abschnitt bringt Aufgaben über „Statische Elektrizität", Potential, Kapazität usw. Über diese beiden Abschnitte läßt sich nur sagen, daß sie durchaus dem Zwecke des Buches entsprechen; die Aufgaben geben in knapper und klarer Weise eine Anleitung, wie man die Grundgesetze anzuwenden hat. Nur in wenigen Fällen könnte vielleicht die eine oder andere Aufgabe bei einer späteren Auflage fortfallen, um Wiederholungen zu vermeiden.

Der dritte ist der Hauptabschnitt; er umfaßt 238 Seiten und behandelt die „Dynamische Elektrizität". Etwa die erste Hälfte hiervon enthält Aufgaben über die E. M. K., die Stromstärke, den Widerstand und deren Messung, und auch hier läßt sich ungefähr dasselbe sagen wie vorher. In der zweiten Hälfte sind Beispiele über Magnetismus und die praktische Elektrotechnik gegeben, und dieser Teil macht den Eindruck, als wenn er gar nicht von demselben Verfasser herrühre; denn die Aufgaben sind häufig sonderbar gewählt und führen zu widersinnigen Resultaten. Was soll man z. B. darunter verstehen, wenn in Nr. 491 ausgerechnet wird, daß der scheinbare Widerstand einer 15 Amp. Bogenlampe 7,75 Ohm beträgt? Das nächste Beispiel ist eine Dynamo von 150 Volt und 0,5 Amp., die 90 Ohm inneren Widerstand hat; das ist ja der reine Ofen. Aufgabe Nr. 511 ist sehr unklar abgefaßt; auf S. 148 ist das Wort „Sicherheitsstücke" als Überschrift gewählt worden, sonst sagt man eigentlich meist „Sicherungen" dafür. Die Zahlenwerte sind häufig übertrieben genau, auf 5 bis 6 Stellen, ausgerechnet, als Beispiele dafür seien die folgenden Aufgaben erwähnt: Nr. 489: 839,02 Volt; Nr. 527: 0,15887 Amp.; Nr. 795: 205,92 Amp.; 113,73 Volt; Nr. 796: 0,99555 Ohm. Die Ausdrucksweise läßt ferner manchmal sehr zu wünschen übrig, z. B. Nr. 485: „Eine Swanlampe .... muß durch einen Strom gespeist werden, der beim Eintritt in die Lampe noch 104 Volt Spannung hat", oder Nr. 801: „Der Strom hat 260 Volt Spannung, oder Nr. 627: „Wenn man einen Eisenkern magnetisieren und nachher wieder nicht mehr magnetisch haben will, muß man eine gewisse Menge Arbeit leisten, um die Eisenmoleküle zu richten und nachher nicht mehr zu richten." Die Abschnitte über Magnete und magnetische Induktion enthalten eine besonders große Menge von Beispielen, die eigentümliche Resultate liefern. Beispielsweise werden für die Induktion unglaubliche Werte ausgerechnet. Nr. 608: $\mathfrak{B} = 180900$ Gauß; Nr. 610: $\mathfrak{B} = 142900$ Gauß; Nr. 613: $\mathfrak{B} = 57675$ Gauß. Ferner wird in dieser letztgenannten Aufgabe eine M. M. K. von 121100 Einheiten ausgerechnet, während die gesamte Amp.-Windungszahl der Maschine nach der Aufgabe etwa 18500 beträgt! Von solchen Beispielen sind noch viele vorhanden, doch würde es hier zu weit führen, sie alle zu erwähnen. Was der Verfasser mit derartigen Beispielen bezweckt, ist nicht recht ersichtlich;

Digitized by Google

sollte die Widersinnigkeit solcher Werte gezeigt werden, so hätte das erwähnt werden müssen, sonst werden Anfänger nur irregeführt.

Der vierte Abschnitt bespricht kurz „die Einheiten des absoluten Maßsystems", und der fünfte gibt Tafeln, von denen die ersten sechs eine Zusammenstellung der in der Elektrizitätslehre vorkommenden Größen nebst ihren Dimensionen und der Maßbezeichnung enthalten; der Rest der Tafeln gibt noch Materialkonstanten.

Es mögen noch einige Worte über die Maßbezeichnung hinzugefügt werden. Der Verfasser sagt selbst im Vorwort zur vorliegenden Auflage, daß er die Schreibweise von F. Kohlrausch, Prakt. Physik, übernommen habe; ob aber gerade die Bezeichnung von Volt, Amp. und Ohm durch V, A und O mit einem Zickzackpfeil ein nachahmenswertes Beispiel ist, darüber läßt sich streiten. Dann ist die Bezeichnung Kal-kg oder Kal-gr wohl nicht allein ungebräuchlich, sondern auch vom sprachlichen Standpunkte nicht zutreffend. Ferner ist es wohl zweckmäßiger, in den Fällen, wo Formeln für die Wärmewirkung des elektrischen Stromes gebraucht werden, nicht immer die Zahl 0,24 herumzuschleppen (siehe die Aufgaben Nr. 510 bis 529), sondern die Konstanten gleich auf das elektrische Maßsystem umzurechnen.

Um noch kurz das Ganze zusammenzufassen, kann man wohl sagen, daß das Buch einem praktischen Bedürfnisse entspricht, was ja auch schon der Umstand beweist, daß das Buch in fünfter Auflage erschienen ist, doch bedarf die zweite Hälfte (etwa vom XVII. Abschnitt der Abteilung C an) bei einer Neuauflage entschieden einer eingehenden Umarbeitung, während die erste Hälfte, abgesehen von kleinen Druckfehlern, sehr günstig dagegen absticht. Der Druck ist, wie wohl bei allen Teubnerschen Büchern, gut und sorgfältig.

Charlottenburg. E. Jasse.

A. A. Michelson. Lichtwellen und ihre Anwendungen. Übersetzt und durch Zusätze erweitert von Max Iklé. Mit 108 Abbildungen im Text und 3 farbigen Tafeln. Leipzig 1911, Joh. Ambr. Barth. Geh. ℳ 7,60, geb. ℳ 8,60.

Acht Vorträge, die der Verfasser im Frühjahre 1899 im Lowell Institute über das obengenannte Thema hielt, bilden den Inhalt dieses Buches, das uns in angenehmer Weise an die ähnlichen Schriften eines Tyndall erinnert. Es unterscheidet sich von diesen nur dadurch, daß der Autor zur Erläuterung der Anwendungen der Lichtinterferenzen bei hohen Gangunterschieden fast ausschließlich solche Beispiele heranzieht, die seinen eigenen Arbeiten entnommen sind. Im allgemeinen hat ein solches Verfahren natürlich seine großen Bedenken, denn ein Buch, nach solchen Grundsätzen geschrieben, kann zur einseitigen Auffassung einer Materie erziehen. Bedenkt man jedoch, in wie hervorragender Weise der Name Michelsons mit dem Ausbau der Methoden zur Erzeugung und Beobachtung der Lichtinterferenzen bei hohen Gangunterschieden verknüpft ist (erwähnt sei nur die Auswertung des Meters in Lichtwellenlängen!), so wird man zugeben, daß die Gefahr in diesem Falle nicht allzu groß ist, denn das Thema kann nicht von allzu vielen Seiten aus betrachtet werden. Die Vorträge sind allerdings vor jetzt zwölf Jahren gehalten worden, und wenn die in ihnen ausgesprochenen Tatsachen auch keineswegs veraltet oder überholt sind, so fehlt in ihnen doch das in dem letzten Dezennium

Digitized by Google

auf diesem Gebiete Geleistete, und dem glaubte der Übersetzer dadurch abhelfen zu sollen, daß er einerseits in einem Anhange die in diesem Zeitraum nicht nur von Michelson, sondern auch von anderen gemachten Entdeckungen allerdings nur kurz bespricht, anderseits der deutschen Ausgabe ein Verzeichnis der einschlägigen Literatur von 1880 bis 1910 anhängt.

Der Stoff ist folgendermaßen gegliedert. In der einleitenden, ersten Vorlesung wird das Wesen der Wellenbewegung und der Interferenz von Wellenzügen an Wellenmaschinen und anderen Modellen gezeigt und erläutert. In der zweiten wirft der Autor die Frage auf, ob es nicht zweckmäßig sei, unsere Längen- und Winkelmessungen unter Verwendung der äußerst geringen Größe der Lichtwellen als Einheit auszuführen und dadurch bei diesen Messungen eine bisher unerreichte Genauigkeit zu erzielen. Er begründet die Bejahung der Frage damit, daß die Verfeinerung der Meßmethode uns gestatten wird, Abweichungen von den jetzt im allgemeinen bekannten Grundgesetzen und Tatsachen der Physik aufzufinden, die nun zwar weniger zum Umsturz dieser Gesetze führen werden, als vielmehr zur Entdeckung anderer, deren Wirkung scheinbare Ausnahmen von den bisher bekannten bedingt. Hierfür haben wir ja in der Entdeckung der Abweichung der Luft von den Gesetzen der idealen Gase ein Beispiel, das in diesem Falle den Weg wies zu ihrer Verflüssigung. Die folgenden Vorlesungen behandeln nun die Anwendung der Interferenzmethoden zur Messung von Entfernungen und Winkeln (Vorlesung 3) und in der Spektroskopie (Vorlesung 4). Die fünfte Vorlesung enthält eine genaue, meisterhafte Darstellung der Auswertung des Normalmeters in Wellenlängen, während der Analyse der Wirkung des Magnetismus auf die Lichtwellen die sechste Vorlesung gewidmet ist. Die Anwendung der Interferenzmethoden in der Astronomie, von der die siebente Vorlesung handelt, ist bisher nur gering; sie hat allerdings zu einem sehr schönen Resultat geführt (Bestimmung des Durchmessers der Jupitertrabanten durch Michelson). In der letzten Vorlesung beschreibt der Verfasser u. a. die Versuche, welche er unternommen hat, um nicht nur die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, sondern auch die Geschwindigkeit der Erde durch den Äther zu messen. Dieser Versuch hat ja, wenn er auch ein entscheidendes Resultat nicht lieferte, insofern besonderes Interesse, als er überhaupt erst zur Konstruktion des Interferometers führte.

Das Buch berührt, abgesehen von seinem wertvollen Inhalt, auch durch die frische, lebendige Art des Vortrags sehr sympathisch. Der Übersetzer wird sich nicht vergeblich bemüht haben, durch Übertragung in die deutsche Sprache diesem Vortragszyklus einen noch größeren Leserkreis zu gewinnen, als die Originalausgabe schon gehabt hat.

Berlin. B. Seegert.

Alexander Gleichen. Die Grundgesetze der naturgetreuen photographischen Abbildung. 8. 52 S., 17 Fig. Halle a. S. 1910, Wilhelm Knapp. Geh. ℳ 2,40.

Für jeden, der das Photographieren nicht gedankenlos betreibt, sondern sich den Einfluß der Entstehungsweise der Bilder auf ihre Wirkung als solche zu erklären sucht, wird die vorliegende Abhandlung viel Interessantes bieten. Der Verfasser leitet mathematisch her, welche Größe die Brennweite und die

Digitized by Google

Öffnung eines photographischen Objektivs haben müssen, damit das dadurch erzeugte Bild auf den Beschauer einen naturgetreuen Eindruck macht, d. h. auf der Netzhaut des Auges genau dasselbe Bild erzeugt wie das aufgenommene Objekt selbst im direkten Sehen. Damit diese Bedingung der Naturtreue erfüllt ist, muß nicht nur die fixierte Ebene bei der Betrachtung des Bildes und des Objektes in allen Teilen in derselben Größe erscheinen, sondern die vor und hinter der fixierten Ebene liegenden, also unscharf abgebildeten Gegenstände müssen in der Photographie so dargestellt sein, daß die Anordnung der unscharfen Punkte die richtige Perspektive liefert und die Größen ihrer Zerstreuungskreise so beschaffen sind, daß sie auf der Netzhaut des Auges dieselben Flächen einnehmen wie bei der direkten Betrachtung des Objektes, wenn das Auge die beim Photographieren scharf eingestellte Ebene fixiert. Der Verfasser leitet durch genaue Rechnungen her, daß diese naturgetreue Abbildung erzielt wird, wenn das photographische Objektiv folgende beiden Bedingungen erfüllt:

1. Seine Eintrittspupille muß gleich der Pupille des menschlichen Auges sein.

2. Der reziproke Wert der Brennweite des Objektivs muß gleich sein dem reziproken Wert des Abstandes des Objektes vom Auge, vermehrt um den m-fachen Betrag des reziproken Wertes des Abstandes des Bildes vom Auge.

Hier bezeichnet m den Wert der Vergrößerung, mit der eventuell die Photographie betrachtet wird. Da die Pupille des menschlichen Auges im Maximum einen Durchmesser von ca. 8 mm annimmt, so folgt aus dem ersten Gesetz, daß nur die kleinsten photographischen Apparate, die sogenannten Westentaschenkameras so lichtstarke Objektive besitzen, daß mit ihnen naturgetreue Momentaufnahmen gemacht werden können. Bei diesen Objetiven beträgt die Brennweite ca. 75 mm, das Öffnungsverhältnis ist also $\frac{8}{75} = \text{ca.}\,\frac{1}{9}$, so daß also auch in diesem Fall nur unter günstigen Umständen Momentaufnahmen möglich sind. Noch etwas günstiger stellen sich kinematographische Aufnahmen wegen der Vergrößerung bei der Projektion, wie der Verfasser selbst angibt. Bei allen größeren Apparaten müßte man, wenn eine naturgetreue Abbildung erreicht werden soll, das Objektiv soweit abblenden, daß nicht nur Momentaufnahmen ausgeschlossen sind, sondern sogar meistens recht lange Zeitaufnahmen erforderlich sein werden.

Diese Folgerung ist für die Photographen sehr betrübend. Jedoch halte ich dieses die Öffnung des Objektivs beschränkende Gesetz nicht für so sehr wichtig. Das menschliche Auge liefert wie alle optischen Instrumente nur unvollkommene Bilder, daher nimmt es den Unterschied zwischen scharfen und unscharfen Bildern bis zu einem gewissen Grade gar nicht oder wenig wahr. Da nun die meisten Photographien so aufgenommen werden, daß auffallende Unschärfen in der Tiefe nicht vorkommen, so verstoßen sie praktisch nicht gegen dieses Gesetz der naturgetreuen Abbildung. Im ganzen scheint es mir fraglich, ob überhaupt eine ganz strenge naturgetreue Abbildung möglich ist. Bei der Betrachtung eines natürlichen Objektes, z. B. einer Landschaft, akkomodiert das Auge nicht starr auf eine Ebene, sondern fixiert in sehr kurzen Zeitintervallen nacheinander Punkte verschiedener Entfernung (sieht sie also alle scharf), ebenso wie es durch seine Beweglichkeit Punkte in verschiedenen Richtungen fixiert (sein Gesichtsfeld vergrößert). Wenn der Verfasser es nun für falsch erklärt, zu verlangen, daß nur das kleine Gesichtsfeld des ruhig ge-

Digitized by Google

haltenen Auges in der naturgetreuen Photographie scharf erscheine, weil die Rollbewegung sehr schnell vor sich geht (S. 48), so braucht nach meiner Ansicht auch die Beschränkung des Auges in der Tiefenschärfe nicht so weit getrieben zu werden. Eine erheblich größere Bedeutung dürfte dagegen das zweite Gesetz haben, da die Bestimmung der richtigen Brennweite maßgebend für den perspektivischen Eindruck des Bildes ist.

Bei der Behandlung des Teleobjektivs benutzt der Verfasser eine Vereinfachung, die mir nicht zulässig erscheint. Er bezeichnet allgemein als Öffnungsverhältnis den Quotienten der Öffnung (Eintrittspupille) durch die Brennweite. Dieses Öffnungsverhältnis ist nur gültig für die Aufnahme von Gegenständen, die im Verhältnis zu den Dimensionen des Objektivs unendlich weit entfernt sind. Bei der Aufnahme näherer Objekte ist als bildseitiges bzw. objektseitiges Öffnungsverhältnis der Quotient der Austritts- bezw. Eintrittspupille durch den Bild- bezw. Objektabstand zu bezeichnen. Bei der Aufnahme naher Objekte durch ein Teleobjektiv spielt dieser Unterschied eine erhebliche Rolle, weil der Abstand der Pupillen von den Hauptpunkten eine beträchtliche Größe annimmt. Bei Berücksichtigung dieses Unterschiedes wird man finden, daß Teleobjektive für die naturgetreue photographische Aufnahme in bezug auf Lichtstärke keine günstigeren Resultate geben als andere Objektive.

Der Verfasser hat sich auf jeden Fall ein Verdienst damit erworben, daß er der Frage der naturgetreuen photographischen Abbildung im ganz allgemeinen Sinne näher getreten ist, und einen großen Beitrag zu ihrer Klärung geliefert.

Wilmersdorf. Chr. v. Hofe.

H. Cranz. Linsensysteme und dioptrische Instrumente in elementarer Darstellung. Programm des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart 1908—09. 4. 76 Seiten.

Der Verfasser hat mit vielem Verständnis eine große Menge Material auf einen kleinen Raum konzentriert und den in Betracht kommenden Lehrern zur Verfügung gestellt. Mit dieser Arbeit ist wohl tatsächlich einem Mangel abgeholfen; denn das Studium der die optischen Instrumente speziell behandelnden Literatur ist nicht einfach, um so weniger, als fast jeder Verfasser seine besondere Bezeichnungsweise benutzt. Aus diesem Grunde möchte ich ein leises Bedauern darüber aussprechen, daß in der vorliegenden Abhandlung nicht eine der bereits vorhandenen Bezeichnungsweisen benutzt ist. Vom mathematischen Standpunkt betrachtet, wäre es entschieden vorzuziehen gewesen, die Vorzeichen der Radien und Schnittweiten konsequent im Sinne der Lichtbewegung positiv, im umgekehrten Sinne negativ zu rechnen. Diejenigen Schüler, die sich eventuell später auf der Universität eingehender mit der Optik beschäftigen, werden sich doch diese Rechnungsweise aneignen müssen. Aus diesem Grunde wäre es auch vielleicht gut gewesen, auf den Unterschied zwischen Strahlenbündel und -büschel dadurch vorzubereiten, daß hier für das räumliche Gebilde ausschließlich der Ausdruck Strahlenbündel gebraucht würde.

Recht interessant ist die ausführliche Behandlung der Linsen endlicher Dicke. Ungewöhnlich ist hierbei sowie später bei der Behandlung der aus Einzellinsen zusammengesetzten Systeme die Ausdrucksweise, daß eine in Luft befindliche Linse „links zerstreuend“ bzw. „rechts sammelnd“ ist, wenn der Brennpunkt innerhalb bzw. außerhalb des Glases liegt. Ich würde eine Linse

Digitized by Google

nur dann zerstreuend nennen, wenn die Brennweite negativ ist, und sammelnd, wenn die Brennweite positiv ist. Eine auf beiden Seiten von demselben Medium begrenzte Linse hat auf beiden Seiten dasselbe Vorzeichen vor der Brennweite und ist daher auf beiden Seiten entweder sammelnd oder zerstreuend. —

Die mathematischen Rechnungen sind trotz der elementaren Behandlung, die durch den Zweck der Arbeit bedingt war, elegant. Sehr erfreulich finde ich es, daß auch eine Konstruktion für das Auffinden eines Bild*punktes* zu einem Objekt*punkt* angegeben ist, die man meines Wissens sonst in Lehrbüchern selten findet.

Der Vollständigkeit halber wäre es erwünscht gewesen, neben dem Huygensschen und Ramsdenschen auch das Kellnersche Okular zu erwähnen, da es neuerdings sehr viel (z. B. fast ausschließlich in den Prismenfeldstechern) benutzt wird. Bei dieser Gelegenheit möchte ich einen auf S. 64 ausgesprochenen Irrtum richtig stellen: das Umkehrprismensystem von Porro kann nicht aus einem Stück hergestellt werden, es wird auch in Feldstechern nicht verkittet, sondern in zwei getrennten Stücken verwendet. Die §§ 28 und 40 könnten meines Erachtens gut in einen zusammengezogen werden, da, wie der Verfasser sehr richtig angibt, beide Arten von Teleobjektiven doch nur weiter auseinander gezogene Fernrohre sind.

Wenn die vorliegende äußerst lehrreiche Arbeit von den Lehrern an Gymnasien und Realschulen für ihren Unterricht benutzt wird, so kann sie erheblich dazu beitragen, das Verständnis und Interesse für optische Instrumente, die in den letzten Jahrzehnten zu unerwarteter Wichtigkeit gelangt sind, in sehr wünschenswerter Weise zu steigern.

Friedenau. Chr. v. Hofe.

Friedrich Kohlrausch. Gesammelte Abhandlungen. Herausgegeben von Wilhelm Stallwachs, Adolf Heydweiller, Karl Strecker, Otto Wiener. I. Band: Elastizität, Wärme, Optik, absolute elektrische Messungen und Verschiedenes. Leipzig 1910, Johann Ambrosius Barth.

Zum 70. Geburtstag von Friedrich Kohlrausch, den er selbst nicht mehr erleben durfte, ist der erste Band seiner gesammelten Abhandlungen erschienen. Die Resultate von Kohlrauschs Forschungen sind Gemeingut der wissenschaftlichen Welt. Und doch steht man von neuem staunend vor der Fülle dessen, was er der Physik gegeben hat, wenn man jetzt sein Lebenswerk zusammengefaßt sieht, das sonst durch die Jahrgänge 1863—1910 der Zeitschriften verstreut war. Der vorliegende Band umfaßt 11 Arbeiten aus dem Gebiet der Elastizität und Kapillarität, 17 aus der Wärme, der Thermoelektrizität und der Mechanik der Gase, 11 aus der Optik, 56 aus dem Gebiet der elektrischen und magnetischen absoluten Maßbestimmungen und Meßmethoden und 18 weitere Publikationen, im ganzen 113 Arbeiten, von denen der größere Teil von grundlegender Bedeutung ist.

Ein Eingehen auf den Inhalt der Arbeiten ist hier unmöglich und überflüssig. Ein empfehlendes Wort braucht dem Werke nur insofern mitgegeben zu werden, als der schwierigen Arbeit der Herausgeber alle Anerkennung gezollt wird. Sie haben es sich nicht genügen lassen, die Abhandlungen aus den vorhandenen Veröffentlichungen abzudrucken. Unter Benutzung der Hinterlassenschaft Kohlrauschs sind die Korrekturen angebracht, die Kohlrausch selbst

Digitized by Google

in die veröffentlichten Arbeiten eingetragen hat. Ein sachliches, ein zeitliches und ein alphabetisches Register ermöglichen eine bequeme Übersicht. Die ursprünglichen Seitenzahlen sind beigefügt.

So ist das Werk zugleich eine wertvolle Bereicherung der physikalischen Literatur und ein schöner Akt der Pietät gegen den großen Lehrer und Forscher.[1])

Berlin. WILH. H. WESTPHAL.

L. Königsberger. Über Helmholtz's Bruchstück eines Entwurfes betitelt „Naturforscher-Rede". Aus den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Jahrgang 1910. 14. Abhandlung. 8 S. Heidelberg 1910, C. Winter.

„Helmholtz". Eine Zeitschrift für die exakten Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Dr. Th. v. Simson. Bd. I. Nr. 2. S. 49 bis S. 88. Neustadt an der Haardt 1910, Helmholtz-Verlag. Der Preis des Bd. von 12 Heften von je 3—4 Bogen ℳ 16,—.

Helmholtz wollte bekanntlich 1894 auf der Naturforscherversammlung in Wien *über dauernde Bewegungsformen und scheinbare Substanzen* einen Vortrag halten. Herr L. Koenigsberger hatte 1903 eben erst gefundene Bruchstücke hierzu in seiner Helmholtz-Biographie veröffentlicht und diese lediglich als „in engem Zusammenhange mit jenem Thema stehend" bezeichnet. Nun haben aber diese kurzen Ausführungen von Helmholtz sowohl von mathematischer als auch von philosophischer Seite nicht die Beachtung gefunden, die ihnen nach des Verfassers Meinung gebührt, ja sie haben sogar zu positiven Mißverständnissen Veranlassung gegeben. Zu diesen Fragen ergreift der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung nochmals das Wort.

Dann liegt noch Nr. 2 von Bd. I der neubegründeten Zeitschrift „Helmholtz" vor uns, die sich den exakten Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen widmen will. Jedes Einzelheft (im ganzen Jahr 12) soll gegen 3 bis 4 Bogen umfassen und stets mehrere Artikel enthalten, außerdem Bücherbesprechungen. Der Inhalt des vorliegenden Heftes entspricht den ebengenannten Tendenzen. Besonders interessiert hat den Referenten der Artikel von Bryan über die Stabilität von Aeroplanen, der einen kurzen Überblick über das bisher in dieser Frage Geleistete bringt.

Gr.-Lichterfelde. P. B. FISCHER.

O. Prochnow. Vogelflug und Flugmaschinen. Darstellung und Kritik der Erfindung des Kraftflugs durch Natur und Technik. Mit 36 Abbildungen. 8°. 101 S. Leipzig 1910, Theod. Thomas. Geb. ℳ 1,80.

Das vorliegende Buch behandelt äußerst sachgemäß und dabei in leicht faßlicher Weise den Vogel- und Menschenflug. Bei der großen Beliebtheit dieses Themas kann die Schrift vor allem unserer heranwachsenden Jugend

---

1) In einigen Wochen wird auch der zweite und letzte Band erscheinen: Elektrolyte, Elektrolytische Leitung, Leitvermögen und Polarisation, Physik der Lösungen. Er wird auch eine Biographie Kohlrauschs aus der Feder des Herrn Heydweiller bringen. Red.

Digitized by Google

warm empfohlen werden, ebenso zur Anschaffung für Schülerbibliotheken. Aber auch mancher Lehrer dürfte hierin Wissenswertes finden. Dem Referenten hat besonders die Darstellung des Gleit- und Segelfluges der Vögel gefallen.

Gr.-Lichterfelde. P. B. Fischer.

C. Schoy. Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben. Mit 3 Figuren im Text und 8 Tafeln. VIII u. 40 S. Gr. 8. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1,60.

B. Hoffmann. Zur Gestaltung des Unterrichts in der mathematischen Himmelskunde. Programmabhandlung des Kgl. Gymnasiums zu Bromberg. Bromberg 1907, R. Krahl.

„In jedem aufgeweckten jungen Menschengemüt schlummert ein Stück astronomischer Begeisterung".[1]) Daher ist jede Schrift mit Freuden zu begrüßen, die sich die Aufgabe stellt, diesen Wissensdrang unserer Schüler aufzugreifen und mit allen zu Gebote stehenden Mitteln (Unterricht in der Mathematik, Physik, Geographie, Linearzeichnen!) zu fördern.

Schoy bringt in seiner Arbeit rein konstruktive Lösungen von sphärisch-trigonometrischen Aufgaben. Teils sind es von alters her bekannte Lösungen berühmter Aufgaben, jedoch der unübersichtlichen Darstellung der Alten entkleidet, teils wirklich neue Lösungen mit Hilfe der Zentralperspektive. Im ersten Abschnitt finden wir Aufgaben wie Bestimmung der Dauer des Aufgangs von Sonne und Mond, der Dauer der Dämmerung und des Datums, der kürzesten Dämmerung, der Breite des Beobachtungsortes etc., im zweiten Abschnitt wird die Zeichnung der Mittagslinie, die Ermittelung der Stundenlinien der Sonnenuhr, die Bestimmung der Polhöhe etc. vorgenommen. Am Schluß gibt der Verfasser, wohl zum ersten Mal, eine rein geometrische Lösung der berühmten Douwesschen Aufgabe, aus Sonnendeklination und zwei Sonnenhöhen zu gegebenen Zeiten die Breite zu bestimmen. Der Verfasser hat durch seine Arbeit auf ein neues Gebiet hingewiesen, auf dem in der Schule astronomische Fragen behandelt werden können, auf das Linearzeichnen. Der Lehrer muß sich dabei freilich bewußt werden, daß es sich bei einem rein geometrischen Verfahren weniger um große Präzision handeln kann, als vielmehr darum, dem Schüler einen tieferen Einblick in die Natur der Aufgaben zu verschaffen. Von diesem Standpunkt aus muß man das vorliegende Büchlein beurteilen. Daß eine gleichzeitige rechnerische Behandlung derselben Aufgaben, vielleicht in der Stereometrie, das Verständnis für diese Dinge natürlich noch mehr fördern wird, ist selbstverständlich. Besonders anregend sind die kurzen, übersichtlichen historischen Bemerkungen in der Einleitung, dann die überall auftretenden Literaturangaben und schließlich die Anmerkungen und Zusätze von S. 33 bis S. 40. Die 30 Figuren sind ganz vorzüglich ausgeführt, sodaß ein näheres Studium dieser kurzen, inhaltsreichen Schrift recht warm empfohlen werden muß.

In der zweiten Schrift, einer Programmabhandlung, teilt uns ein tüchtiger Schulmann seine mannigfachen Erfahrungen mit, die er im Laufe vieler Jahre

---

1) Vergl. Schwarzschild, Astronomische Beobachtungen ..., in den neuen Beiträgen zur Frage des mathem. Unterrichts an den höh. Schulen, herausgeg. von Klein und Riecke, Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Digitized by Google

bezüglich des Unterrichtes in der mathematischen Himmelskunde gesammelt hat. Als Lehrer an einem humanistischen Gymnasium schwebt dem Verfasser ein erstrebenswertes Ziel vor Augen, nämlich den mathematischen Unterricht in dem Gebiete der Himmelskunde ausklingen zu lassen, in ihr noch einmal die auf allen Gebieten gewonnenen Kräfte einzusetzen und dem der Reifeprüfung nahestehenden Primaner zu zeigen, wie er sein Wissen und Können zur Erlangung sicherer Urteile auf dem naturwissenschaftlichen Erkenntnisfelde verwenden kann. Daß dieser idealen Forderung natürlich vieles hinderlich im Wege steht, wissen wir alle, aber das darf uns nicht abhalten, dieses Ziel als erstrebenswert anzusehen. Alle, die dieser Meinung sind, werden in der vorliegenden Arbeit viele Anregungen finden und von ihr einen dauernden Nutzen haben. Von den Aufgaben, mit deren praktischer Durchführung der Verfasser sich in seiner Schrift befaßt, seien folgende erwähnt: Winkelmessungen in der Feldmeßkunde und Astronomie, insbesondere solche von Gestirnshöhen, Festlegung des Meridians, Zeitbestimmungen der verschiedensten Art, Breiten- und Längenbestimmungen, Verwendung des photographischen Apparates, Feststellung der Schiefe der Ekliptik und der Erdbahnellipse etc.

Gr.-Lichterfelde. P. B. Fischer.

Heinrich Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in fünfter Auflage. Bd. I. XVII u. 527 S. Braunschweig 1911, F. Vieweg & Sohn. Geh. ℳ 12,—, in Halbfranz ℳ 13,60.

Seit dem Erscheinen der vierten Auflage, welche in Bd. 3 dieser Zeitschrift besprochen wurde, sind nunmehr 10 Jahre verflossen. Wir begrüßen mit Freude die Neuauflage dieses Werkes, welches wohl bis jetzt fast als einziges zu betrachten ist, das dem theoretischen Physiker als Grundlage zu seinen Studien und als Leitfaden bei seinen Untersuchungen diente. Der theoretische Physiker darf sich nicht mit allgemeinen mathematischen Betrachtungen begnügen, sondern muß bei der Lösung seiner Probleme trachten, zu zahlenmäßigen Resultaten zu gelangen. Diese rein praktische Anwendung der Mathematik erfordert ein ziemliches Eindringen und Verständnis der mathematischen Disziplinen, und in dieser Hinsicht bietet das Buch von H. Weber ein vortreffliches Hilfsmittel. Als natürliche Ergänzung hierzu, um aus den gewonnenen Formeln Resultate in Zahlen zu erhalten, sind die Funktionentafeln von E. Jahnke und F. Emde (Verlag von B. G. Teubner, Leipzig) zu betrachten. Was nun speziell die Neuauflage anbetrifft, so hat sich ihr Umfang um 20 Seiten vergrößert, und es sind manche Ergänzungen hinzugekommen. Unter anderem sei die erweiterte Behandlung der für die theoretische Physik so wichtigen Besselschen Funktionen erwähnt. Hierzu möchte sich der Referent die Bemerkung erlauben, daß es vielleicht angebracht wäre, noch die elementarsten Reihen nach Besselschen Funktionen verschiedener Ordnungen zu behandeln und auch die Bedeutung der Hankelschen Funktionen mehr hervortreten zu lassen. Zur besseren Orientierung in dem Buche wäre ein Sachregister sehr erwünscht.

Berlin. W. v. Ignatowsky.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

367. Eine Ebene u trifft die Kanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ in den Punkten L_2, L_3, L_4; es seien L_2', L_3', L_4' die zu diesen Punkten in bezug auf die Kanten A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 harmonisch zugeordnete Punkte. Eine zweite Ebene v schneidet die Ebene $L_2'L_3'L_4'$ in der Geraden b_1, und die Ebene A_2b_1 schneidet die Ebene $A_2A_3A_4$ in der Geraden c_1. Ähnlicherweise leitet man aus u und v drei andere Geraden c_2, c_3, c_4 ab, welche in den anderen Seitenebenen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ liegen.

Man beweise, daß die vier Geraden c_1, c_2, c_3, c_4 einen hyperboloidischen Wurf bilden und suche die Gleichung der Regelfläche $(c_1c_2c_3c_4)$, wenn

$$u_x \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$
$$v_x \equiv v_1x_1 + v_2x_2 + u_3x_3 + v_4x_4 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen u, v in bezug auf das Koordinatentetraeder $A_1A_2A_3A_4$ sind.

Lüttich. J. Neuberg.

368. Man bezeichnet mit O den Mittelpunkt, mit Ox eine Asymptote und mit M einen beliebigen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel. Der Punkt M projiziert sich in N auf die Halbierende des Winkels xOM.

Man suche den Inhalt eines von der Geraden ON beschriebenen Sektors.

Lüttich. J. Neuberg.

369. Es seien A, A' die Endpunkte einer Hauptachse, O der Mittelpunkt und M ein beliebiger Punkt einer Ellipse ε. Man projiziert M in P auf die Gerade AA' und P in N auf die Gerade AM.

Man suche den Inhalt der von dem Punkte N beschriebenen Kurve.

Lüttich. J. Neuberg.

370. In einer Ebene ε liegen drei Geraden a, b, c und ein Punkt P. $\varkappa$ sei eine Kugel, die ε in P berührt, und S sei der Schnittpunkt der drei von a, b, c an $\varkappa$ gelegten Tangentialebenen. Welche Fläche beschreibt S, wenn P die Punkte der Ebene ε erschöpft?

Schöneberg. Willy Weber.

Digitized by Google

371. Gibt es in zwei kollinearen Räumen Σ und Σ' eine Gerade g von durchweg sich selbst entsprechenden Punkten, so gibt es auch eine zweite Gerade h als Achse eines Büschels von durchweg sich selbst entsprechenden Ebenen. Wie verändert die Gerade h ihre Lage, wenn unter Festhaltung der kollinearen Beziehung zwischen Σ und Σ' der Raum Σ' um g gedreht wird?

Schöneberg. Willy Weber.

B. Lösungen.

Zu **280** (Bd. XV, S. 260) (O. Schenker). — Eine allgemeine Eigenschaft des ebenen Dreiecks.

Zieht man aus den Schnittpunkten S_1, S_2 und S_3 irgend einer Geraden (s) mit den Seiten bzw. BC, CA und AB eines ebenen Dreiecks ABC die Kreise durch die Berührungspunkte bzw. B_1, B_2 und B_3 des dem Höhenfußpunktdreieck $(H_1H_2H_3)$ eingeschriebenenen Kreises, so gehen dieselben durch die gleichen 2 Punkte (O_1 und O_2) hindurch, gehören also derselben Kreisschar an.

Zweiter Beweis: Der in Band 17, S. 251 gegebene Beweis veranlaßt mich, den von mir kurz nach Erscheinen der Aufgabe aufgestellten rein geometrischen Beweis noch nachträglich mitzuteilen.

Der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC ist bekanntlich der Mittelpunkt für den Inkreis (k) des Höhenfußpunktdreiecks $H_1H_2H_3$; (k) ist zugleich der Umkreis des Dreiecks $B_1B_2B_3$. Betrachten wir ABC als Polardreieck eines zirkularen Polarfeldes mit dem Mittelpunkt H, so treffen sich die Polaren der 3 Punkte S_i der Geraden (s), das sind die von A, B, C bzw. auf S_1H, S_2H, S_3H gefällten Lote, in einem Punkte S, dem Pol von (s). Da nun $\triangle B_1B_2B_3$ perspektiv ähnlich zu ABC ist, so treffen sich auch die von B_1, B_2, B_3 bzw. auf S_1H, S_2H, S_3H gefällten Lote in einem Punkte P. Diese 3 letzteren Lote aber sind nichts anderes als die 3 Sehnen B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3', wenn B_i' den zweiten Schnittpunkt des Kreises um S_i (Radius: S_iB_i) mit dem Kreise (k) bezeichnet. Sonach ist der Kreis (k) vermöge des Strahlbüschels P involutorisch auf sich selbst bezogen durch die 3 Kreise, deren Zentren die Punkte S_i sind. Da diese 3 Zentren auf einer Geraden liegen, so müssen die 3 Kreise einem und demselben Büschel zugehören.

Schöneberg. Willy Weber.

Zu **328** (Bd. XVII, S. 247) (J. Neuberg). — Man bezeichne mit B_1, B_2, B_3 die Projektionen der Ecken eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ auf eine beliebige Gerade p; die aus diesen Punkten auf die entsprechenden Dreiecksseiten gefällten Lote treffen sich in einem Punkte P, dem Lotpunkte der Geraden p (Archiv I, 179 und 390). Man fälle noch aus P auf p das Lot PQ; dann hat man die Relationen

$$QP = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\frac{A_2B_2 - A_3B_3}{QB_1} + \frac{A_3B_3 - A_1B_1}{QB_2} + \frac{A_1B_1 - A_2B_2}{QB_3} = 0;$$

α, β, γ bedeuten die Winkel der Geraden p mit den Dreiecksseiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 und R den Radius des Kreises $A_1A_2A_3$.

Digitized by Google

1. **Beweis:** Verschiebt man die Gerade p parallel mit sich selbst, so bleiben die Figur $B_1B_2B_3PQ$ und die Differenzen $A_2B_2 - A_3B_3$, $A_3B_3 - A_1B_1$, $A_1B_1 - A_2B_2$ ungeändert; man darf also, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, voraussetzen, daß alle Dreiecksseiten nicht selbst, sondern nur in ihren Verlängerungen von der Geraden p getroffen werden, und zwar A_2A_3 in A_1', A_3A_1 in A_2', A_1A_2 in A_3'. Außerdem läßt sich die Bezeichnung des Dreiecks jederzeit so wählen, daß $\sphericalangle A_2'A_1'A_3$ ein spitzer Winkel ist, daß A_2 zwischen A_1' und A_3 liegt und daß A_1 sowohl zwischen A_2' und A_3 als auch zwischen A_3' und A_2 liegt. Dies vorausgesetzt, ist

$$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle(p, A_2A_3) = \sphericalangle A_2'A_1'A_3,$$
$$\sphericalangle\beta = \sphericalangle(p, A_3A_1) = \sphericalangle(\alpha + A_3) = \sphericalangle A_3'A_2'A_1,$$
$$\sphericalangle\gamma = \sphericalangle(p, A_1A_2) = \sphericalangle(\alpha + A_3 + A_1) = \sphericalangle(\alpha + 180^0 - A_2)$$
$$= \sphericalangle(180^0 - A_1'A_3'A_2').$$

Es ist nun im Dreieck PB_1B_2 $\sphericalangle B_1PB_2 = \sphericalangle A_3$, $\sphericalangle PB_2B_1 = 90^0 - \beta$ und $B_1B_2 = A_1A_2\cos\gamma$, daher nach dem Sinussatz

$$PB_1 = \frac{A_1A_2}{\sin A_3}\cos\beta\cos\gamma = 2R\cos\beta\cos\gamma.$$

Ferner ist im rechtwinkligen Dreieck PQB_1

$\sphericalangle QPB_1 = \alpha$; also $QP = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; $QB_1 = 2R\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

In gleicher Weise findet man

$$QB_2 = 2R\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad QB_3 = 2R\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

Weiter ist

$$A_2B_2 - A_3B_3 = -A_2A_3\sin\alpha = -2R\sin A_1\sin\alpha,$$
$$A_3B_3 - A_1B_1 = 2R\sin A_2\sin\beta,$$
$$A_1B_1 - A_2B_2 = -2R\sin A_3\sin\gamma;$$

mithin

$$\frac{A_2B_2 - A_3B_3}{QB_1} + \frac{A_3B_3 - A_1B_1}{QB_2} + \frac{A_1B_1 - A_2B_2}{QB_3}$$
$$= \frac{-\sin A_1\cos\alpha + \sin A_2\cos\beta - \sin A_3\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Setzt man hierin

$$\sin A_1 = \sin(A_2 + A_3), \quad \cos\beta = \cos(\alpha + A_3), \quad \cos\gamma = -\cos(A_2 - \alpha),$$

so wird der Zähler gleich Null, was zu beweisen war.

Prenzlau. W. Stegemann.

2. **Beweis:** Die Gerade p sei die x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Punkte $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$. Dann sind $B_1 = (x_1, 0)$, $B_2 = (x_2, 0)$, $B_3 = (x_3, 0)$. Die Gleichung des aus B_1 auf die Dreieckseite A_2A_3 gefällten Lotes ist $y = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$ oder

$$y(y_2 - y_3) + (x - x_1)(x_2 - x_3) = 0. \tag{1}$$

Digitized by Google

Gleicherweise sind die Gleichungen der anderen beiden Geraden

$$y(y_3 - y_1) + (x - x_2)(x_3 - x_1) = 0 \tag{2}$$

und

$$y(y_1 - y_2) + (x - x_3)(x_1 - x_2) = 0. \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen geht durch Addition hervor, daß die drei Geraden sich in einem Punkte $P = (x, y)$ treffen.

Durch Division und dann durch Addition gewinnt man aus (1), (2), (3):

$$\frac{y_2 - y_3}{x_1 - x} + \frac{y_3 - y_1}{x_2 - x} + \frac{y_1 - y_2}{x_3 - x} = \frac{1}{y}(x_2 - x_3 + x_3 - x_1 + x_1 - x_2) = 0,$$

was die zweite Relation ist.

Aus den Gleichungen (2) nnd (3) ergibt sich durch Elimination

$$y = \frac{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y_3)}. \tag{4}$$

Bedeuten a_1, a_2, a_3 die Längen der entsprechenden Dreieckseiten, und α_1 den Winkel A_1, dann sind

$$x_3 - x_2 = a_1 \cos\alpha,\ x_1 - x_3 = a_2 \cos\beta,\ x_2 - x_1 = a_3 \cos\gamma$$
$$y_1 - y_3 = a_2 \sin\beta,\ y_2 - y_1 = a_3 \sin\gamma;$$

der absolute Betrag des Nenners in (4) ist

$$|a_2 a_3 \sin(\gamma - \beta)| = |a_2 a_3 \sin\alpha_1|.$$

Wegen $\frac{a_1}{\sin\alpha_1} = 2R$ folgt daher:

$$|y| = |2R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma|,$$

was die erste Relation ist.

Csikszereda (Ungarn). J. v. Sz. Nagy.

Zu **330** (Bd. XVII, S. 247) (G. Kober). — Die zweite Gerade $L_1'L_2'$, auf welcher die Endlote einer Tangente eines beliebigen Kegelschnittes die vom Berührungspunkte P auf die Achsen gefällten Lote schneiden, ist dasjenige Lot des Fahrstrahles OP, welches die Kurvennormale PN im Bildpunkte des Krümmungsmittelpunktes schneidet, in dieser Eigenschaft nach Steiner (Crelles Journal Bd. 30), doch auch infolge der hier angegebenen Konstruktion die Polare von P in dem Polarsysteme des Direktorkreises.

1. Lösung: Mit Hilfe der in den Aufgaben 316 und 331 gebrauchten Bezeichnungen ergibt sich leicht die Flächengleichheit der rechtwinkligen Dreiecke L_1PL_2, $L_1'PL_2'$ und Q_1PQ_2, wobei die beiden letzteren auch kongruent sind. Aus dem gleichschenkligen Trapez $Q_1Q_2L_1'L_2'$, dessen Symmetrielinie die Tangente T_1T_2 in $P(x_1, y_1)$ ist, erhellt sofort, daß der Schnittpunkt R' der Normale PN mit $L_1'L_2'$ der Bildpunkt des Krümmungsmittelpunktes R ist. Die Gerade $L_1'L_2'$ hat, wenn der Kegelschnitt $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ zu grunde gelegt wird, die Gleichung $x_1x + y_1y = a^2 + b^2$; es geht daraus hervor, daß $L_1'L_2'$ senkrecht zum Fahrstrahl OP und Polare von P in dem Polarsysteme des Direktorkreises ist.

Digitized by Google

Zusatz: Fällt man von P das Lot PS auf Q_1Q_2, so ist, wie es bei allen Kurven der Fall ist, die Normale PN die Halbierungslinie des Winkels OPS, und bei den Laméschen Kurven $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ ist $OP \cdot (OP + PS) = \frac{a^m}{x_1^{m-2}} + \frac{b^m}{y_1^{m-2}}$.

Urach (Württemberg). ALFRED SCHMID.

2. Lösung: Von den in der Aufgabe 316 zur Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes $(PN,\ Q_1Q_2)$ benutzten Punkten $Q_1(+t_1, -n_2)$ und $Q_2(-t_2, -n_2)$ sind die Schnittpunkte $(T_1L_1, PL_2) = L_1'$ und $(T_2L_2, PL_1) = L_2'$ die Spiegelpunkte $L_1'(+t_1, +n_1)$ und $L_2'(-t_2, +n_2)$; ihre Verbindungslinie $L_1'L_2'$ hat also die Gleichung:

$$(n_1 - n_2)t - (t_1 + t_2)n + (t_1n_2 + t_2n_1) = 0.$$

Von dieser Linie wird die Kegelschnittnormale $t = 0$ im Spiegelbilde $\left(0, +\frac{t_1n_2 + t_2n_1}{t_1 + t_2}\right)$ des Krümmungsmittelpunktes $\left(0, -\frac{t_1n_2 + t_2n_1}{t_1 + t_2}\right)$ geschnitten. Der Strahl PO des Punktes $P(0, 0)$, auf dem die alten Achsen $\frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} + 1 = 0$ und $-\frac{t}{t_1} + \frac{n}{n_1} + 1 = 0$ sich schneiden, hat, weil $n_1n_2 = t_1t_2$ ist, die Gleichung:

$$(t_1 + t_2)t + (n_1 - n_2)n = 0;$$

von ihm ist also $L_1'L'$ das Lot. Durch die Substitutionen

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} = \frac{x_1^2}{a^2},\quad \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2},\quad \frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} + 1 = \frac{x}{x_1},$$

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{y_1^2}{b^2},\quad \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2},\quad -\frac{t}{t_1} + \frac{n}{n_1} + 1 = \frac{y}{y_1}$$

wird die Gleichung:

$$t_2n_2\left(\frac{t}{t_2} + \frac{n}{n_2} + 1\right) + t_1n_1\left(-\frac{t}{t_1} + \frac{n}{n_1} + 1\right) = (t_1 + t_2)(n_1 + n_2)$$

in eine auf die alten Achsen $xy = 0$ bezogene Gleichung:

$$x_1x + y_1y = a^2 + b^2$$

verwandelt. In dieser Form ist $L_1'L_2'$ die Polare des Punktes $P(x_1, y_1)$ in dem Polarsysteme des Direktorkreises

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Holzminden. G. KOBER.

Zu **331** (Bd. XVII, S. 248) (G. Kober). — Derjenige Durchmesser eines Kegelschnitts, der die Normale eines seiner Punkte P im Krümmungsmittelpunkte schneidet, enthält den Punkt L_i, in welchem das auf der Tangente PT_i in ihrer Spur T_i errichtete Lot das vom Berührungspunkte P auf die Achse OT_i gefällte Lot schneidet. Die Konstruktion ist allgemein; sie gilt für jeden Kegelschnitt ohne jede Modifikation.

Digitized by Google

3. Beweis: Ist $\frac{dy}{dx} = y'$ der Richtungskoeffizient der Tangente PT_i im Punkte $P(x,y)$ des auf die Achsen bezogenen Kegelschnittes, so sind die Koordinaten der Punkte L_i

$$(1) \qquad x_1 = x, \quad y_1 = -\frac{y}{y'^2}; \quad x_2 = -xy'^2, \quad y_2 = y,$$

wobei $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ ist. Soll der Durchmesser den Krümmungsmittelpunkt (ξ, η) und den Punkt L_i enthalten, so muß die Beziehung

$$(2) \qquad \xi : \eta = x_i : y_i$$

bestehen. Setzt man die Werte von (1) in (2) ein, so kommt mit

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

die Differentialgleichung $\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$, welcher die regulären Mittelpunktskegelschnitte $c_1x^2 + c_2y^2 + c_3 = 0$ Genüge leisten.

Aus der Beziehung $\eta = y_1$ folgt ohne weiteres die Differentialgleichung der Parabel $y^2 = c_1x + c_2$.

Zusatz. — Die hier gegebene Eigenschaft des Krümmungsmittelpunktes läßt sich auch auf die Laméschen Kurven in derselben Weise übertragen, wie dies in meiner Lösung zu Aufgabe 316, Zusatz geschehen ist.

Sind N_1 und N_2 die Schnittpunkte der Normale in P mit den Achsen, so schneiden bei allen Kurven die Geraden N_1L_2 und N_2L_1 die Tangente auf der Verbindungslinie der Projektionen des Berührungspunktes und außerdem geht durch diesen Schnittpunkt bei den Kegelschnitten der in Aufgabe 294 (G. Kober) erwähnte Durchmesser hindurch.

Urach (Württemberg). ALFRED SCHMID.

Zu **334** (Bd. XVII, S. 428) (Ph. Weinmeister). — Lösung: Ein homogener Körper schwimmt stabil, wenn das statische Moment der verdrängten Wassermasse in Beziehung auf die durch den Körperschwerpunkt gehende Horizontalebene kleiner ist, als das kleinste Trägheitsmoment der Schnittfläche, bezogen auf eine Horizontalachse durch ihren Schwerpunkt. (Duhamel, Analytische Mechanik IV, 3).

a) $$0{,}744 > s > 0{,}256.$$

Teilt man die Achse in fünf gleiche Teile, so muß die Wasserfläche durch den mittleren Teil gehen.

b) Es sei h der Abstand beider Seitenflächen und $h\lambda$ der Tiefgang, dann ist die Größe der Schnittfigur $= \frac{3}{8}h^2\sqrt{3}\,(1 + 2\lambda - 2\lambda^2)$, also das Volumen der verdrängten Wassermasse $= \frac{1}{8}h^3\sqrt{3}\lambda(3 + 3\lambda - 2\lambda^2) = \frac{1}{2}h^3\sqrt{3}\cdot s$, mithin

$$s = \tfrac{1}{4}\lambda(3 + 3\lambda - 2\lambda^2).$$

Das statische Moment dieses Volums für die Horizontalebene durch den Oktaederschwerpunkt $= \frac{3}{16}h^4\sqrt{3}\cdot\lambda(1-\lambda)(1+\lambda-\lambda^2)$.

Andrerseits ist das Trägheitsmoment der Schnittfigur für jede Horizontalachse durch ihren Schwerpunkt $= \frac{3}{128}h^4\sqrt{3}(1 + 4\lambda - 6\lambda^2 + 4\lambda^3 - 2\lambda^4)$.

Digitized by Google

Demnach ist die Bedingung der Stabilität:

$$8\lambda(1-\lambda)(1+\lambda-\lambda^2) < 1 + 4\lambda - 6\lambda^2 + 4\lambda^3 - 2\lambda^4$$

$$(2\lambda-1)^4 - 3{,}6(2\lambda-1)^2 + 1 < 0$$

$$\left[(2\lambda-1)^2 - \tfrac{1}{5}(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2\right]\cdot\left[(2\lambda-1)^2 - \tfrac{1}{5}(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2\right] < 0.$$

Wegen $0 < \lambda < 1$ ist der erste Faktor stets negativ, also muß sein:

$$|2\lambda-1| > (\sqrt{7}-\sqrt{2}) : \sqrt{5};$$

für $\lambda < \frac{1}{2}$ gilt $\lambda < (\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}) : (2\sqrt{5}) = 0{,}22462$,

für $\lambda > \frac{1}{2}$ gilt $\lambda > (\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{2}) : (2\sqrt{5}) = 0{,}77538$.

Demnach gilt für das spezifische Gewicht

$$|s - \tfrac{1}{2}| > (16\sqrt{7} - 11\sqrt{2}) : (40\sqrt{5}) = 0{,}29936, \text{ also}$$

$$s < 0{,}20064 \approx \tfrac{1}{5} \text{ oder } s > 0{,}79936 \approx \tfrac{4}{5}.$$

Tharandt. PH. WEINMEISTER.[1])

Zu **340** (Bd. XVII, S. 362) (E. N. Barisien). — Le lieu des points à égale distance d'une ellipse et d'un de ses foyers est une quartique unicursale dont on demande l'aire. Que devient cette aire si le rapport des deux axes est $\sqrt{3}$? Cas où l'ellipse devient une parabole.

Diese Aufgabe ist, von dem letzten Satz abgesehen, mit der ebenfalls von Herrn Barisien in dieser Zeitschrift gestellten Aufgabe **266**, 1°) (Bd. XV, 96) gleichbedeutend, die von mir im 16. Bande (S. 360—362) gelöst worden ist.[2]) Für die Parabel ist der in Rede stehende Ort schon in dem Aufsatze von E. Freund, Über eine Kurve dritter Ordnung (Lotos, Neue Serie, XIV, Prag 1864) betrachtet worden. Man findet Tschirnhausens Kubik auch Trisektrix von Catalan genannt, deren Gleichung auf den Scheitel der Parabel als Ursprung bezogen lautet:

$$y^2 = \frac{(4x-p)(5p-2x)^2}{108p}.$$

Die Fläche der Schleife dieser Kurve hat bekanntlich den Wert $\frac{9}{10}p^2\sqrt{3}$. In dem Aufsatze „Sur les Théorèmes de M. Retali" (Mathesis, 1910, p. 121) habe ich bemerkt, daß diese Kubik auch der Ort der Punkte ist, von denen man an die Parabel die drei Normalen so ziehen kann, daß eine von ihnen den von den beiden anderen gebildeten Winkel halbiert.

Berlin. WERNER GAEDECKE.

Eine Lösung ist von Herrn C. Hoffmann eingegangen.

---

1) Der inzwischen verstorbene Verfasser hat eine Korrektur der Lösung nicht mehr lesen können. Red.

2) Die dort gemachten Zusätze 1° und 5° sind folgendermaßen zu berichtigen:
1° La courbe lieu du milieu de Q de MF est l'ellipse dont les axes ont pour longueurs a et b.
5°. Le lieu de V est une sextique dont l'aire comprise entre les branches de courbe asymptotes l'une à l'autre, est finie et égale à $\frac{3\pi bc^2}{2a}$.

Digitized by Google

Zu **345** (Bd. XVII, S. 363) (St. Jolles). — Berühren die Flächen eines F^2-Büschels im Punkte M eine Ebene μ, so bilden alle nicht mit μ inzidenten auf den Flächen des Büschels gelegenen Strahlen, welche eine beliebige Gerade d von M schneiden, eine kubische Regelschar mit der Doppelpunktsgeraden d.

Beweis. Die Berührungsebenen der Flächen in den Punkten der Geraden d gehen durch eine Gerade e, denn die Tangenten in den Punkten der Geraden d zu den Kegelschnitten des Büschels, in welchen eine beliebige durch d gelegte Ebene den F^2-Büschel trifft, bilden bekanntlich einen Strahlenbüschel.

So wie jede Gerade, so trifft auch e den F^2-Büschel in einer mit der Punktreihe auf d projektiven Punktinvolution, und die Strahlenpaare der Flächen des Büschels, welche d und e schneiden, verbinden homologe Punkte jener Reihen; ihr Erzeugnis ist daher eine kubische Regelschar mit der Doppelpunktsgeraden d und der einfachen Leitgeraden e.

Kolozsvár. L. Klug.

2. Kleinere Notizen.

Zur indischen Trigonometrie.

(v. Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigon. S. 37.)

Bhâskara gibt in seinem Siddhânta den Sinus von 1^0 auf $60'$ an, wenn der Radius zu $3438'$ als $180 : \pi$ gesetzt wird, wie im Sûrya-S. Dieser Wert ist absolut selbstverständlich, denn da die Inder schon den Sinus von $3^0\,45'$ gleich dem Bogen, gleich $225'$ fanden, so galt diese Gleichheit für kleinere Bogen erst recht, und es ist $\sin 3^0 = 225 - 45$ und $\sin 1^0 = 60'$. Die „völlig rätselhafte“ Formel der Lîlâvatî, auf die Bhâskara hinweist und die von R. Wolf und M. Cantor angegeben ist, gibt (vgl. v. Braunmühl) $61'\,05$ und ist bei dem großen Talent der Inder für Zahleninduktion viel wahrscheinlicher aus den Werten der Sinus durch Probieren gefunden worden als umgekehrt.

Straßburg i. E. Max Simon.

Zu Ḫwarizmi's ḥisâb al ǵabr wal muqâbala.

Auch in der dritten Auflage des ersten Bandes seiner Vorlesungen faßt M. Cantor sein Urteil über die grundlegende Algebra des Ḫwarizmi (Algorithmus) dahin zusammen, „daß als indisch vornehmlich die Rechenkunst, als griechisch dagegen, wenn auch nicht unter Ausschluß jeglicher aus Indien stammender Veränderung, die Algebra sowie die Geometrie, mit andern Worten die eigentliche wissenschaftliche Mathematik sich erweist“.

Prüfen wir seine Beweise. Ein Hauptgewicht legt er auf die Methode von Hultsch, aus der Reihenfolge der Buchstaben einer Figur die Herkunft der Figur und des zu ihr gehörigen Satzes zu erkennen und damit auf die Figur S. 54 (of) des arabischen Textes der Rosenschen Ausgabe. Sie dient zum Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes, während sie doch nur für den Spezialfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks paßt. Was zunächst das Prinzip von Hultsch betrifft, so ist dasselbe insofern von zweifelhaftem Werte als, vgl. Th. Nöldeke Beiträge zur sem. Sprachwissenschaft, die Reihen-

Digitized by Google

folge der Buchstaben und der Namen des griechischen Alphabets und der älteren semitischen aus der *gemeinsamen* Quelle der Phönizischen stammen.

Was das Fehlen des W und J in den Figuren betrifft, so erklärt sich dies bei den Griechen umgekehrt aus dem Semitischen, Waw und Jā sind sehr früh zu Vokalen geworden. Sie fehlen nicht nur bei M. ibn Mûsâ, sondern durchgängig. Außerdem würde an sich betrachtet die griechische Reihenfolge der Buchstaben noch nichts beweisen, da die Araber geom. Figuren aus dem Euklid kennen gelernt haben. Aber man kann sich diese Diskussion sparen, denn in der Figur des arabischen Textes ist die Reihenfolge, abgesehen vom fehlenden W, *genau* die Altarabische. Das Zeichen ʿ hat Rosen fälschlich mit R, Cantor richtig mit ζ wiedergegeben, der diakritische Punkt fehlt allerdings, aber das ist beim z, dem weichen s, äußerst häufig. In Gemeinschaft mit Prof. Landauer habe ich den größten Schatz unserer Bibliothek, das älteste Manuskript des Almagest darauf hin angesehen, dort fehlt der Punkt überm ʿ wohl zweimal sooft als er gesetzt ist. Rosen hingegen hat Recht, wenn er das ḥ mit H und nicht wie Cantor mit ε wiedergibt, das griechische η hat ursprünglich, vgl. Nöldeke l. c., ἦτα geheißen und entspricht dem semitischen H. Außerdem ist die Unterscheidung des Spezialfalls des Lehrsatzes vom allgemeinen gar nicht euklidisch, wohl aber findet sie sich in allen Sulva-Sutra's.

Und nun die beiden geom. Lösungen der Gleichung $x^2 + 10x = 39$; sie sind so durch und durch indisch, — ich verweise auf Hoffmann Bd. 33, S. 183, 1902, auf einen Vortrag im Straßb. Colloquium 2. Febr. 1903 und auf Gesch. der Mathem. im Altertum, 1909, — daß ich grade in ihnen einen vollgültigen Beweis indischer Herkunft erblicke.

Die Araber selbst haben ihre Arithmetik und Algebra stets als indischer Herkunft bezeichnet, sie haben sich, wenigstens für die Zeit der Blüte der islamischen Literatur als durchaus zuverlässig erwiesen, ja als die Einzigen, die bis zum 19. Jahrh. den Begriff geistiges Eigentum gekannt haben, daß ich keinen Grund sehe, ihre Angaben zu bezweifeln.

Straßburg i. E. Max Simon.

---

3. Sprechsaal.

Eine *Rheinisch-Westfälische Vereinigung zur Pflege der exakten Wissenschaften* ist in Essen gegründet worden. Die Vereinigung entspringt einer Anregung von Dipl.-Ing. Reisner-Essen und hat die gemeinsame Pflege der exakten Wissenszweige in ihrer reinen wie angewandten Form zum Ziele, also der Mathematik, Physik, Mechanik, Geophysik, Meteorologie, Geographie und auch der mathematischen Statistik. Dem Vorstand gehören an: Direktor Dr. phil. Heckhoff-Altenessen, Dipl.-Ing. Reisner-Essen, Dr.-Ing. Schmitz-Essen, Oberlehrer Dr. phil. Lütgemeyer-Essen.

Digitized by Google

Berichtigungen zu den Funktionentafeln von Jahnke-Emde.[1])

S. 138, Tafel XVI, muß es heißen:

$$\sqrt{2}\, J_1(3{,}1\sqrt{i}) = +\,2{,}5364 - i\,0{,}8918$$
$$\sqrt{2}\, J_1(3{,}3\sqrt{i}) = +\,2{,}6798 - i\,1{,}3556$$

Nowotscherkusk. A. Dinnik.

Vermeintliche Beweise des Fermatschen Satzes.

108. Stefan Holba, Fermats letzter Satz als Minimumaufgabe. Budapest 1911. 29 Seiten.

Unsere Kritik Nr. **35** (dieses Archiv (3) **15**, 370) seines Manuskriptes gefällt Stefan Holba scheinbar nicht. Aber statt sie verstehen zu lernen, hat er für das „Archiv" und für den Unterzeichneten nur einige unflätige Worte, gegen die der „ehrerbietige Dank" seltsam absticht, der Herrn Bürgermeister Dr. Stefan Bárczy für die „hochherzige Zuwendung der Kosten" der Drucklegung der vorliegenden Arbeit zu teil wird! Die uns widerfahrene Behandlung wird uns nicht von der Fortsetzung unserer Bemühungen zurückhalten, die mathematische Literatur weiterhin von dem Unrat zu reinigen, der durch preislüsterne Unberufene ihr aufgezwungen wird. Also zur Sache selbst! Wenn's auch Überwindung kostet.

S. 9, d. h. eine halbe Seite nach Beginn der eigentlichen Lösung heißt es: Weil $z - x$ keinen Faktor mit $z^{2r-u}x^u$ gemeinsam haben kann, muß es auch gegen $\Theta = \sum_{u=0}^{2r} z^{2r-u}x^u$ prim sein! Man kann aber leicht zeigen, daß, wenn $z - x$ durch $(2r+1)$ teilbar ist, auch Θ es sein muß. Sei z. B. $z = 4$, $x = 1$, so wird im Falle $r = 1$ oder $2r + 1 = 3$, $z^2 + zx + x^2 = 21 = 3 \cdot 7$, d. h. durch $z - x = 3$ teilbar, trotzdem die 3 weder in z^2 noch in zx, noch in x^2 steckt.

Vielleicht merkt jetzt Herr Holba selbst, daß da etwas nicht stimmt. Im weiteren Verlauf arbeitet H. mit ähnlichen Methoden, und es gelingt ihm, einen neuen Rekord traurigster Leistungsunfähigkeit aufzustellen.

109. Alexander Ochitowitsch, „Beweis etc.". Autorisierte Übersetzung aus dem Russischen. Kazan 1910. 50 Seiten.

Verfasser entwickelt die Abelschen Formen der Wurzeln richtig, nennt x_1 die lineare Größe $y + z$ und x_2 die Größe $\frac{y^n + z^n}{y + z}$ und kommt mittels sehr folgerichtiger Ableitungen zu drei Funktionen $f(x_1, x_2)$ etc., die ganzzahlige Werte ergeben und anderseits sich durch drei Ausdrücke der Form darstellen lassen:

$$\frac{t}{\frac{x^n + y^n - (x+y)^n}{z_1^{n-1}} \cdot \frac{x^n + z^n - (x+z)^n}{y_1^n}}$$

---

1) Vgl. auch dieses Archiv (3) **15**, 372; **16**, 285; **17**, 286.

Digitized by Google

Hier folgt, daß t ein Vielfaches des (ganzahligen) Nenners ist. Wären die Brüche im Nenner nun relativ prim, so könnte mit Recht gefordert werden, daß t ein Vielfaches des Produkts der drei entsprechenden Brüche ist. Die Voraussetzung trifft aber hier nicht zu, weshalb die S. 39 entwickelte Formel (21) für t falsch ist, daher auch die Folgerung, die (24) gezogen ist, nämlich, daß z. B. $x_1 = y + z = 1$ sein müßte, die vereint mit den entsprechenden Formeln $y_1 = 1$, $z_1 = 1$ zu Widersprüchen führen würde. Letztere fallen aber weg, sobald obiger Fehler vermieden wird. Der gleiche Fehler wiederholt sich bei Betrachtung der verschiedenen Sonderfälle.

110. Jos. Umfahrer (München), Manuskript 13 S. und Nachtrag 2 S. vom 13. und 20. Dez. 1910.

Schon früher ist eine Arbeit dieses Autors hier besprochen worden. In der jetzigen wird daraus, daß 2 Unbekannte ungerade, eine gerade sein müssen, richtig geschlossen, daß der Ansatz

$$(2d + u)^n - (2d - u)^n = 2^n z^n,$$

wo u ungerade, nicht bestehen kann. Das heißt doch: Es kann nicht die zweit- oder drittgrößte Zahl $2z$ gerade und zugleich die Summe der beiden anderen (alle als positiv genommen) das Doppelte einer ungeraden Zahl sein.

Für den Fall, daß $2d < u$ ist, ergibt sich noch ein ähnlicher Schluß. Dadurch werden also gewisse Fälle ausgeschlossen und andere bleiben übrig.

Um diese zu erledigen, geht Verf. zur Gleichung

$$(2z)^{2n} = (2d + u)^{2n} + (2d - u)^{2n}$$

über. Auch hier lassen sich einige Fälle ausschließen.

Wenn aber nun die letztere Gleichung auf die Form

$$(4z^2)^n = [(2d + u)^2]^n + [(2d - u)^2]^n$$

gebracht wird und es wird aus der Unmöglichkeit dieser Gleichung allgemein gefolgert, daß nun auch die Fermatsche Gleichung falsch sein muß, so ist das unrichtig, da die obige Gleichung nur bestimmte, nämlich Quadratwerte enthält, die nicht allgemein *jede* Zahl ausdrücken können. Das hat Verf. auch gefühlt und sucht in den nächsten 2 Seiten aus der Schwierigkeit durch einige Gewaltmittel herauszukommen, welche sofort sich als gänzlich unberechtigt erkennen lassen.

S. 10 folgt dann ein *zweiter Beweis*. Dieser ist von vornherein dadurch verfehlt, daß $(2d + u)^n - (2d - u)^n = z_3^n$ als niemals lösbar vorausgesetzt wird und dazu die Gleichungen geschrieben werden

$$(u + 2d)^n - (u - 2d)^n = z_1^n,$$
$$(2d + u)^{2n} - (2d - u)^{2n} = z_2^{2n},$$

dann aber gefolgert wird

$$\frac{(2d + u)^{2n} - (2d - u)^{2n}}{(2d + u)^n + (2d - u)^n} = (2d + u)^n - (2d - u)^n,$$

oder $\frac{z_2^{2n}}{z_1^n} = z_3^n$ kann rational nicht existieren, weil z_3 nicht rational ist. Aber sieht Verf. denn nicht, daß die $(2d \pm u)$ in den verschiedenen Gleichungen

Digitized by Google

garnicht dieselben Werte sein müssen? Die obige Division läßt sich garnicht mehr in der geschehenen Weise durchführen, wenn Verf. etwa im Nenner d_1 und u_1 statt d und u schreibt.

Verf. beweist im günstigsten Falle Selbstverständlichkeiten, nämlich: Wenn $x^n + y^n = z^n$ durch $x = 2d + u$ und $y = 2d - u$ lösbar ist, so ist $x^{2n} + y^{2n} = z_1^{2n}$ durch *diese* Werte *nicht* lösbar oder Ähnliches.

Berlin. ALBERT FLECK.

---

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

ARRHENIUS, S. Das Schicksal der Planeten. Leipzig 1911, Akad. Verl.-Ges. m. b. H. ℳ 1 50.

BARDEYS Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik für Metallindustrieschulen vorzugsweise für Maschinenbauschulen bearb. von S. Jakobi und A. Schlie. Zweite Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.60.

BARDEY-TIEMANN. Arithmetische Aufgaben. Erster Teil: Für höhere Mädchenschulen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.20.

—— —— Arithmetische Aufgaben II. Für Lyzeen und Studienanstalten. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.—.

BEHRENDSEN-GÖTTING. Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Unterstufe. Ausgabe A für Gymnasien und Ausgabe B für Realanstalten. Zweite Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Jede ℳ 2.80.

—— —— Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenbildungsanstalten. 1. Teil: Für höhere Mädchenschulen. 2. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

BRÜCHER, K. Anschauung in der Arithmetik. Bamberg 1911, Buchner. ℳ 1.60.

DAHMS, P. An der See. Leipzig 1911. B. G. Teubner. ℳ 3.—.

DARWIN, G. H. Ebbe und Flut. Zweite Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

DINGLER, H. Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. Leipzig 1911, Akad. Verlagsges. m. b. H. ℳ 5.—.

DUGAN, R. S. Photometric researches. The Algol System R. T. Persei. Contributions from the University observatory No. 1. Princeton, N. J. 1911.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome II, volume 2; fascicule 1: Analyse algébrique; exposé d'après l'article allemand de A. Pringsheim et G. Faber par J. Molk. — Fonctions analytiques; exposé d'après l'article allemand de W. F. Osgood par P. Boutroux et Jean Chazy. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.60.

ERLER, W. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. 7. Aufl. von M. Zacharias. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.50.

FINZEL, A. Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Inaug.-Diss. Straßburg 1911.

FROMMEL, W. Radioaktivität. Sammlung Göschen Nr. 317. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 0.80.

GEHRTS, A. Reflexion und Sekundärstrahlung lichtelektrisch ausgelöster Kathodenstrahlen. Inaug.-Diss. Berlin 1911.

Generalregister für Band 1—32 zur Z. f. d. math. u. naturwiss. Unterr. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 5.—.

GOERINGER, A. Der goldene Schnitt (göttliche Proportion) und seine Beziehung zum menschlichen Körper und anderen Dingen mit Zugrundelegung des goldenen Zirkels. 2. Aufl. von Ad. Hoelzel. München 1911, J. Lindauer.

Digitized by Google

Grober, M. K. Beiträge zur Theorie der Resonanzkurven. Halle a. S. 1909.

Harbordt, F., und Fischer, Max. Machs Grundriß der Physik. 1. Teil: Vorbereitender Lehrgang. Vierte Aufl. Leipzig 1910, G. Freytag. ℳ 2.—.

Hartmann, F. M. Elementary Mechanics for engineering students. New York 1911, J. Wiley & Sons.

Hermes, O. Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. Herausgeg. von P. Spieß und K. Graff. Berlin 1911, Winckelmann & S. ℳ 1.60.

Kowalewski, G. Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen. Fortsetzung der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, zugleich eine Einführung in die Funktionentheorie. Leipzig 1911, B. G. Teubner.
geh. ℳ 12.—, geb. ℳ 13.—.

Lanchester, F. W. Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen. Übers. von C. Runge. Zweiter Band: Aerodonetik. Leipzig 1911, B. G. Teubner.
geb. ℳ 12.—.

Lecat, M. Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions avec applications à l'algèbre, à la géométrie etc. Gand 1910, Ad. Hoste.

Le Heux, J. W. N. Lissajous'sche Stimmgabelkurven in stereoskopischer Darstellung. 18 Tafeln mit Text. Leipzig 1911, A. Barth. ℳ 6.—.

Lehmann, O. Die neue Welt der flüssigen Kristalle und deren Bedeutung für Physik, Chemie, Technik und Biologie. Leipzig 1911, Akadem. Verlagsges. m. b. H. ℳ 12.—.

Leibniz. Über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen. Übersetzt und herausgeg. von G. Kowalewski. Leipzig 1908, W. Engelmann.

Lietzmann, W. Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1910. Heft 9 der Schriften des DA. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 0.50.

Lorey, W. Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und einigen norddeutschen Staaten. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Meissner, O. Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1910. Berlin 1911.

Mie, G. Moleküle, Atome, Weltäther. Dritte Aufl. Aus Nat. u. Geisteswelt. Nr. 58. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Mohr, R. Die Bertrandschen Kurven in der Theorie der Normalensysteme. Inaug.-Diss. Straßburg 1911.

Montessus, R. de, et R. d'Adhémar. Calcul numérique. Première partie: opérations arithmétiques et algébriques. Deuxième partie: intégration. Paris 1911, Doin et fils. Fr. 5.—.

Morawetz, Joh. von. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einigen Hilfstafeln. Leipzig 1911, G. Freytag. ℳ 0.80.

Moritz, Robert E. Elements of plane trigonometry. New York 1911, J. Wiley.

Müller, Aloys. Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem. Nr. 39 der Wissenschaft. Braunschweig 1911, Vieweg & S. ℳ 4.—, geb. ℳ 4 80.

— H., und J. Plath. Sammlung von Aufgaben zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrerprüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. 2. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 4.—.

Münch, P. Lehrbuch der Physik. In zwei Teilen neu bearb. von H. Lüdtke. Erster Teil: Vorbereitender Lehrgang. 12. Aufl. Freiburg i. B. 1911, Herder. ℳ 2.—, geb. ℳ 2.50.

Nielsen, N. Théorie des fonctions métasphériques. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 12.—.

Petersen, W. Hochspannungstechnik. Stuttgart 1911, F. Enke. ℳ 11.—.

Digitized by Google

Reinstein, E. Untersuchungen über die Transversalschwingungen der gleichförmig gespannten elliptisch oder kreisförmig begrenzten Vollmembran und Kreisringmembran sowie von Vollkreis- und Kreisringmembranen mit nach speziellen Gesetzen variierter ungleichförmiger Spannung. Inaug.-Diss. Göttingen 1911.

Righi, A. Kometen und Elektronen. Leipzig 1911, Akad. Verl.-Ges. m. b. H. ℳ 2.40.

Rusch, F. Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.50.

Schmehl, Chr. Lehrbuch der ebenen Geometrie für höh. Lehranst. Gießen 1911, E. Roth. ℳ 2.50.

Schwab, K., und Müller, C. H. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Erster Teil. Leipzig 1910, G. Freytag. ℳ 2.50.

—— —— Zweiter Teil. Ausgabe B: Für die Oberstufe der Gymnasien. Leipzig 1911, G. Freytag.

—— Dritter Teil. Leipzig 1911, G. Freytag. ℳ 2.—.

Schwering, K. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. Zweiter Lehrgang. Dritte Aufl. Freiburg i. B. 1911, Herder. ℳ 1.40, geb. ℳ 1.90.

—— u. Krimphoff. Ebene Geometrie. 7. Aufl. Freiburg i. B. 1911, Herder. ℳ 1.80, geb. ℳ 2.30.

Smolik-Heller. Raumlehre und darstellende Geometrie. Bearb. von K. Hahndel. Vierte Aufl. Wien 1911, F. Tempsky. ℳ 3.60.

Suppantschitsch, R. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die VI. bis VIII. Kl. der Gymn. und Realgymn. Wien 1911, F. Tempsky. ℳ 4.50.

Wallenberg, G. Theorie der linearen Differenzengleichungen. Unter Mitwirkung von A. Guldberg. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—.

Zühlke, P. Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. Leipzig 1911, B. G. Teubner. geb. ℳ 2.60.

Berichtigung zu Band 17.

Auf S. 248 in der 4. Zeile der Aufgabe **333** ist zu lesen R_3 statt R.

Berichtigung zu Band 18, Heft 1.

S. 97, Aufg. **363** muß es heißen: Vierecks statt Vierseits.

S. 102, Zeile 5 v. u. muß es heißen: surfaces or their limits statt surfaces of their limits.

S. 103, in Gl. (III) $b\xi^m$ statt $b^m\xi$.

S. 104, Z. 15 v. o. $c - q\xi$ statt $c = q\xi$.

Digitized by Google

Further Remarks on the Chinese Mathematics in Cantor's Geschichte der Mathematik.

(Bd. I, Dritte Auflage, 1907).

By Yoshio Mikami at Ohara in Kazusa.

Some time ago I had an opportunity of saying something in the *Archiv der Mathematik und Physik*, Dritte Reihe, Bd. XV, p. 68—70, about the Chinese mathematics considered by Moritz Cantor in his *Geschichte der Mathematik*, Bd. I, Dritte Auflage. Here I propose to add some more remarks upon the same subject.

Cantor says (p. 689—690) that in old times the Japanese were accustomed to count numbers by groups of each 10^4 unit, and further he remarks (p. 690):

„Wir erkennen darin die griechischen Myriaden wieder, natürlich ohne aus dieser Ähnlichkeit eine Beeinflussung Japans von Griechenland oder gar Griechenlands von Japan folgern zu wollen."

According to T. Kimara's opinion, though not shared by other authorities, the Japanese seem to be a race akin to the Greco-Latins. If so, the Japanese word *yorozu* that corresponds to the Greek myriad may possibly have been of some interrelation with each other and may thus be of deep significance for us. But we are not certain that the Japanese had possessed the idea of counting numbers by myriads before the time of their contact with the Chinese civilization that was introduced to their country through the way of Korea. About this point I must confess I have no definite view at present but hope to carry on researches some day. The word *yorozu*, it is true, had existed in Japan from a very remote age; but it is to be ascertained whether it had always meant the same sense as myriad, which was the meaning of the word in subsequent ages. We know with certainty that the system of numeration upon the basis of myriad was the very one that prevailed in China from time immemorial. The Chinese thought was soon converged to Japan and the Japanese used to record numbers by the Chinese ideographs, as they did with anything else in general.

Digitized by Google

The question therefore lies altogether in determining the existence or nonexistence in a date previous to the influence of the Chinese civilization of the word *yorozu* that was used in the sense of the number myriad or ten-thousand.

The number ten-thousand is not called nowadays in Japan by the old word *yorozu* but by the word ***man***, which is the Japanese mode of reading of the Chinese ideograph *wan*. The readings of the same ideographs are generally different in China and Japan, because they have undergone various changes in China, and in Japan the ways transmitted in old times are still reserved.

How long, then, the word *wan* or its equivalent should have existed in China? This is a question that we cannot answer. We only know the word is so old as almost descending from the prehistoric ages. We do not, however, mean to make any searching after the historical origin of the word in this place. Suffice to affirm that the system upon myriad had longest prevailed in China.

Cantor says (p. 672):

„Es gibt allerdings Wörter und Zeichen, welche noch weit über 10000, ja über das multiplikativ herstellbare 10000 mal 10000 sich erheben — wir haben vorher in 10^{53} ein überzeugendes Beispiel davon kennen gelernt — aber eben jenes Beispiel mit seinem Ursprungszeugnisse an der Stirn läßt vermuten, was berichtet wird, daß die altchinesische Gewohnheit nicht über 10000 als höchste einfache Rangordnung sich erhob."

The number here mentioned, 10^{53}, which is called *hen-ho-cha* or "sands of the Ganges", was decidedly of de Hindoo conception brought by the Buddhists to China (p. 668—669). It is also undeniable that the Chinese thought was largely influenced by the Indian. But it does not seem that the old Chinese did not go so far as to count over the multiples of *wan* or 10000. They certainly possessed the word *i*, or *oku* in Japanese, which means *wan* times *wan* or $10000 \times 10000 = 10^8$, at a time that preceded the introduction of Buddism. For, in the fourth chapter of the *Arithmetic in Nine sections* or *Chiu-chang Suan shu* there is an example that reads as follows:

"Again, there is an area 39 *i* 7215 *wan* 625 paces (namely paces square). What will be the length of its side?"

The number is of course expressed in full words, which we here recorded in an abbreviated form for convenience's sake. By one notation it becomes 3972150625. From this example it is very clear that the word *i* was employed representing $10000 \times 10000 = 10^8$.

Digitized by Google

The Arithmetic in Nine Sections was a treatise that was compiled by Chang T'sang in the 2nd century B. C. and revised by Ching Ch'ou-ch'ang in the following century.

For still larger a number, 1644866437500, *the Arithmetic in Nine Sections* represents it in this way: 1 *wan* 6448 *i* 6643 *wan* 75 hundred. Here no new word is employed for 10^{12}, being designated as 10000 times *i*. The commentator Liu Hui, whose commentary on the *Nine Sections* appeared in 263 A. D.[1]), follows the same way of representing great numbers.

In the treatise of Sun-Tsu, who possibly lived in the 2nd or 3rd century A. D., and who is represented by Cantor (p. 685) as belonging to the 3rd century, there are given the names of great numbers. Thus runs his text:

"In designating great numbers,

wan times *wan* is called *i*;
wan-wan times *i* is called *chas*;
wan-wan times *chao* is called *king*;
wan-wan times *king* is called *kai*;
wan-wan times *kai* is called *tsu*;
wan-wan times *tsu* is called *jang*;
wan-wan times *jang* is called *kou*;
wan-wan times *kou* is called *chien*;
wan-wan times *chien* is called *chêng*;
wan-wan times *chêng* is called *tsai*.

In Hsü Yüeh's *Su-shu Chi-i* the names of these ten numbers are given as originating with Huan-Ti or the Yellow Emperor who flourished in the 27th century B. C. Hsü Yüeh belonged to the end of the Eastern Han Dynasty, namely to the first half of the 3rd century A. D. But as to the senses of the names there was a certain unsettledness in old times. In a passage in Sun-Tsu we read thus:

„... 6000 *wan* grains make one *hu*; ten *hu* contain 6 *i* grains; a hundred *hu* contain 6 *chas* grains; a thousand *hu* contain 6 *king* grains; a *wan hu* contain 6 *kai* grains; ten *wan hu* contain 6 *tsu* grains; a hundred *wan hu* contain 6 *jang* grains; a thousand *wan hu* 6 *kou* grains; a *wan wan hu* is an *i hu* and contain 6 *chien* grains; ten *i hu* contain 6 *chêng* grains; a hundred *i hu* contain 6 *tsai* grains."

In the two systems used by Sun-Tsu *i* represents the same number 10^8, but *chas* and further numbers are of different meanings, in the

1) This date is recorded in such old authoritated histories like The *Chin-shu* and The *Sui-shu*.

Digitized by Google

one proceeding by groups of each eight positions, while in the other by the successive positions. Even the word *i* is sometimes employed to indicate different numbers; in Chêng Hsüan's commentary on the ancient *Shih-ching* or *Sacred Book of Poetry*[1]), where there is a phrase containing these words: "three hundred *i* bundles of corn", the word *i* is interpreted as representing ten *wan* or 10^5, while in another commentary it is considered to be *wan* times *wan* or 10^8.

About the divergence of the senses conveyed by the names of great numbers Hsü Yüeh tries an explanation in his *Su-shu Chi-i*. According to him the ten names of great numbers were employed in three different ways, which are designated as the highest, the middle and the lowest ways. In the lowest way the designation proceeds from ten times to ten times. Thus ten *wan* or 10^5 is called *i*, ten *i* or 10^6 is called *chao*, ten *chao* or 10^7 is called *king*, and so on. In the middle way the same proceeds by every *wan-wan* times or 10^8 times; thus *wan* times *wan* or 10^8 is called *i*, *wan-wan* times *i* or 10^{16} is called *chao*, *wan-wan* times *chao* or 10^{24} is called *king*, and so on. In the highest class *wan* times *wan* or 10^8 is called *i*; *i* times *i* or 10^{16} is called *chao*; *chao* times *chao* or 10^{32} is called *king*, and so on.

Hsü Yüeh ascribes these three ways of counting to a usage handed down from the time of the Yellow Emperor, certainly owing to the usual love of old times so characteristic of the Chinese people. It is interesting to see that the second system met with in Sun-Tsu's work does not belong to any of these three ways.

Of small numbers Sun-Tsu says thus:

"... The breadth of the string vomitted by the silk-work is one *hu*; ten *hu* make one *mi*; ten *mi* make one *hao*; ten *hao* make on *eli*; ten *li* make one *fen*; ..."

The above is said of the decimal parts of length, and one *fen* is a tenth part of unit length. The origin of these names is waiting for further researches.

In Hsü Yüeh's *Su-shu Chi-i* a similar way of designating small numbers is explained, where however the names of these numbers are not given. The text runs thus:

"The smallest magnitude is one *a-nou*; seven *a-nou* make one dirt on copper; seven dirts on copper make one dirt on water; seven dirts on water make one dirt on hare's hair; seven dirts on hare's hair make one dirt on wool; seven dirts on wool make one dirt on cow's hair; ..."

1) Chên Luan's commentary on the *Su-shu Chi-i* of Hsü Yüeh.

Digitized by Google

This passage is indicated as taken from a Buddhistic sûtra. In this work various topics are borrowed from the Indian source.

The tremendous number, 10^{53}, "sands of the Ganges", which is mentioned by Cantor (pp. 668—669) is not found in the *Su-shu Chi-i*; the date of its introduction to China from India is not known to us at present.

The most popular of the various systems described by Sun-Tsu and Hsü Yüeh for the great numbers is not free from an ambiguity, whether proceeding by the groups of four positions as it is done in the contemporary Japan are of eight positions. But possibly the latter was the actual one, as we see from the designation used in the *Nine Sections*, which we have mentioned. Further, what is recorded in Chêng Tai-wei's *Suan-fa Tung-tsung* of 1593 seems to affirm this view. In the second book of this work numbers are designated as follows:

thousand *wan* $= 1000 \times 10000 = 10^7$,
i = *wan-wan* $= 10000 \times 10000 = 10^8$,
ten *i* $= 10^9$,
hundred *i* $= 10^{10}$,
thousand *i* $= 10^{11}$,
wan i $= 10000 \times 10^8 = 10^{12}$,
ten *wan i* $= 10^{13}$,
hundred *wan i* $= 10^{14}$,
thousand *wan i* $= 10^{15}$,
chao = *wan wan i* $= 10^4 \times 10^4 \times 10^8 = 10^{16}$,
king = *wan wan chao* $= 10^4 \times 10^4 \times 10^{16} = 10^{24}$,
kai = *wan wan king* $= 10^4 \times 10^4 \times 10^{24} = 11^{32}$,
tsu = *wan wan kai* $= 10^4 \times 10^4 \times 10^{32} = 10^{40}$;

and then follow the names *jang* (10^{18}), *jan* or Sun-Tsu and Hsü Yüeh's *kou* (10^{86}), *chien* (10^{64}), *chêng* (10^{72}), *tsai* (10^{80}), *chi* (10^{88}), *hêng-ho-sha* or "sands of the Ganges" (10^{96}), *jan-sêng-chih* (10^{104}), *nai-yu-t'a* (10^{112}), *pu-k'ê-szu-i* or "wonderful" (10^{120}), *wu-liang-su* or literally "a number not to be counted", namely infinity.

In the above list the numerals have been inserted for the sake of reference. It appears that *hêng-ho-sha* or "sands of the Ganges" represents in this list the number 10^{96} instead of 10^{53} as given by Cantor.

In the same place Chêng Tai-wei mentions that *i* is some-times taken as ten *wan* or $10 \times 10000 = 10^5$, but he rejects the meaning as erroneous.

The existence of some terms of Hindoo origin employed by the Chinese and other evidences may well indicate the influences received

Digitized by Google

from India upon the mathematics of China, a fact which no one can deny. But the extent to which such influences had extended remains never ascertained. This is a theme full of interest that must be cleared in the future.

Nevertheless there are some topics that may be told about the interrelation of the science in the two countries. One example in the *Nine Sections* is known to be contained also in the Indian Brahmagupta's work. Another example in the same book was again found in a Hindoo treatise. The proof concerning the Pythagorean theorem for a right triangle as given by Chang Chun-ch'ing during the Han Dynasty was certainly the same as done by Blâskara about 1150 A. D. (pp. 679—680 and p. 656). It is wellknown that Brahmagupta used the value of $\pi = \sqrt{10}$ (p. 647), but the same value also appeared with the Chinese mathematicians.[1]) So far as we know, Chang Hêng (78—139 A. D.) was the first person who used the value in China. Again it appeared in Ch'in Chin-shao's *Su-shu Ching-chang* of 1427, and further some scholars in the 18th century were found to use it. In Japan too the same value occurred to be applied and even nowadays it is being used in some parts of the country by the carpenters and timbermen.

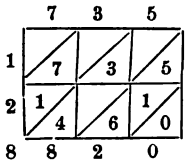
These are a few instances by which the mathematics of the Hindoos and of the Chinese resemble each other, and which may be increased still more by further studies. These may, at the first sight, seem to indicate the evidences of the Chinese having borrowed no little from the country from which Buddhism had been propagated. But at the same time we must be fully cautious not to draw any too hasty conclusions; for in the instances we have mentioned the Chinese are found to precede the Hindoos by a considerable space of time. It is not impossible to think, on the contrary, that the Indians may have received something of the science from the people to whom they had transmitted their civilization together with their religion.

The Chinese used two sorts of abaci, of which the *ch'ou* or *suan-ch'ou* (*sangi* in Japanese) were used from old times, while the *suan-pan*, or *soroban* in Japanese, appears to have arisen at a comparatively late date. But we find a kind of written arithmetic also employed in China. Of this sort of arithmetic Cantor says (p. 688) to find in Chêng Tai-wei's *Suan-fa Tung-tsung* of 1593 "Multiplikationen unter Anwendung von dreieckigen Feldern, also vielleicht so, wie wir sie bei den Indern

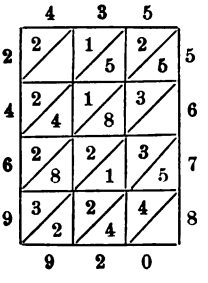
1) See Y. Mikami, The circle-squaring of the Chinese, Bibliotheca Mathematica. Dritte Folge, X. Bd., pp. 197—198.

Digitized by Google

in Übung fanden." The said Indian scheme of multiplication is given (p. 611) as follows:



The diagram represents the multiplication of 735 by 12, whereby the product is obtained to be 8820. The written arithmetic or *hsieh-suan* for the multiplication of 435×5678 is indicated in the *Suan-fa Tung-tsung* as follows:



Here the multiplicand and the multiplier are recorded at the top and at the right side, respectively, while the product is recorded round the left and under sides. See, with this slight difference, how similarly it is carried out as in the Indian scheme.

Chêng Tai-wei also gives cases of the division on writing, which seems, however, to be a modification of the *suan-pan* way of division. In it the specially constructed division-table is made use of as in the latter.

The *hsieh-suan* or the Chinese written arithmetic was most probably leaned from the Hindoos, for in the 8th century a Hindoo calendar was translated into Chinese, as it is stated in the *T'ang-shu* or *Records of the T'ang Dynasty*, and it is said, the arithmetic found in book was not effected by means of the calculating pieces but by writing. In subsequent ages the Arabians were employed by the Chinese courts in the work of calendar computation, when they were certainly possessed of the arithmetic of written sort. The symbol for cipher which was employed in Ch'in Chin-shao's *Su-shu Chin-chang* of 1247, being a small not-elongated circle, may or may not have been borrowed from an Indian source. In any case little is to be doubted of the foreign origin of the Chinese written arithmetic.

Cantor gives (p. 688) a problem in the *Suan-fa Tung-tsung* of 1593 concerning the determination of the height of a tree from the

Digitized by Google

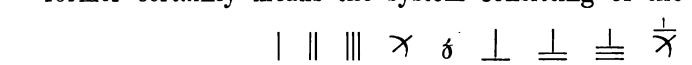
consideration of two similar right triangles and indicates its resemblance to the usage found in Rome. This sort of problems were easily solved in the old *Nine Sections*, and Liu Hui's *Hai-tao Suan-ching*, or literally *Sea-Island Arithmetical Classic*, of 263 A. D., considered much more complicated problems of measuring the heights and distances. These problems are treated by means of the doubled use of proportions.

Chêng's *Suan-fa Tung-tsung* contains an arithmetical triangle, which is also given in Chu Shih-chieh's work of 1303, and about the same Cantor makes a statement (p. 688) to the following effect:

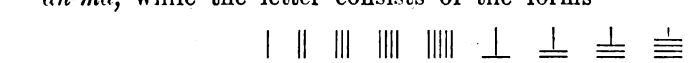
"Es heißt in demselben, jene Zahlenanordnung finde sich schon in einem älteren Werke des U schi, aber unser europäischer Gewährsmann (Ed. Biot) fügt ausdrücklich hinzu, dieser Name sei ein so gewöhnlicher, daß Folgerungen aus demselben nicht zu ziehen seien, und so wissen wir nicht einmal, ob dieser U schi früher oder später als Tschu schi kih gelebt hat."

The date of the mathematician U schi, here referred to by Cantor as unknown, is indicated by Chêng himself in his work. The words U schi means Master U or Master Wu, and his name was Wu Hsin-min. Wu's treatise entitled Chiu-chang Pi-lei Suan-fa, to which Chêng makes frequent references, is given at the end of the Suan-fa Tung-tsung to be a publication of 1450. Wu Hsin-min therefore lived one and half a century later than Chu Shih-chieh.

We have already spoken of the Chinese arithmetic in the writing mode. Cantor says (p. 672—674) of two kinds of numerals, Kaufmannsziffern and wissenschaftliche Ziffern, that have existed in China. The former certainly means the system consisting of the symbols



which are called the *an-ma* numerals in Chêng Tai-wei's Suan-fa Tung-tsung, though we are not informed of the meaning of the word *an-ma*, while the letter consists of the forms



These numerals may seem not without cause to have had a deep significance in connection with the written arithmetic. In the *hsieh-suan* given by Chêng one of the examples, the very one we have taken into reference, is indeed recorded by Cantor's so-called Kaufmannsziffern. And so far as our limited knowledge is concerned, this sort of numerals was first given in Ch'in Chiu-shas's *Su-shu Chiu-chang* of 1247. As to the other kind of numerals we don't know any older document than

Digitized by Google

this work of Ch'in in which they are recorded by symbols. But on account of all this we cannot persuade ourselves to conclude with Cantor (p. 673) about the origin of these numerals to say:

„Gewichtige Gründe sprechen dafür, daß hier erst spät von auswärts Eingeführtes, nicht ursprünglich Vorhandenes vorliegt."

Nor can we say:

„Noch weniger kann in China eine vollständige Stellungsarithmetik erfunden worden sein."

Of the two systems of numerals the *an-ma* system or Kaufmannsziffern have certainly arisen by reforming upon the wissenschaftliche Ziffern, for the latter are two cumbersome. And further when we consider the development of the calculating pieces or *ch'ou* from old times in China, for which Cantor pays no attention, it will be easily understood how the numerals have arisen that consist of the arrangements of short lines. Their forms are the very arrangements by which the small pieces were manipulated in effecting calculations. As to how long these pieces or *ch'ou* have been used we must confess we have no definite knowledge, but we know they were possibly of a considerably ancient origin. The first instance of any record about them is probably a passage met with in Pan Ku's *Han-shu* or *Records of the Han Dynasty*, but a certain anecdote told in the *So-chien* seems to indicate that the calculating pieces had been in use during the reign of the Chou Dynasty. Sun-Tsu's *Arithmetical Classic*, which we have mentioned in the above, gives an explanation about the arrangements of the *ch'ou* pieces, which differ in no slightest particular from the use of the numerals mentioned by Cantor. The latter were nothing but the symbolical representations that were laid down in writing for the arrangements of the bamboo pieces. In fact Ch'in makes use in his work of 1247 of the merchants' numerals or scientific numerals, but all that he has recorded there was intended for describing the way of calculation which has been effected upon a calculating board by means of the calculating pieces.

If we put too great an importance on the constitution of ideographs with which the Chinese language is composed of, the significance of the principle of position which the Chinese had applied in their calculations in old times, may escape our notice; but when we consider the use of the calculating pieces and when we take into account the contents of the *Arithmetic in Nine Sections* and other old mathematical treatises, we feel that we are impressed to believe in the existence of the arithmetic effected according to the principle of positions in China at a time that preceded the introduction of the Hindoo knowledge.

Digitized by Google

Thus persuaded, we are naturally little attracted to put much importance on the comparatively lateness of the appearance of the Chinese numerals to have any deep significance in the history of mathematics.

Concerning the accounts about the numerals we have accidentally mentioned the name of Ch'in Chiu-shao's work *Su-shu Chiu-chang*, which may be literally rendered *Nine Sections of Mathematical Methods* or *A Mathematical Treatise considered in Nine Sections*. Here the words *Nine Sections* are connected with the title and so it might appear that the treatise had some connection with the ancient *Nine Sections*, as Cantor conjectures (p. 682). But this is not the case. Ch'in's original title may have been not the same it now bears.

According to a document it seems it was simply *Su-hsiao*. Ch'in distributed, it is true, his considerations under nine different headings, but the sections have not the slightest relation to the old division of the subjects. Nor does Ch'in maintain any relationship with the old treatise. The *Su-shu Chiu-chang* was no commentary on the *Nine Sections*. On the contrary Chêng Tai-wei's work of 1593 was one for the greater parts of it.

The old *Chiu-chang Suan-shu* or *Arithmetic in Nine Sections* is given anonymous, but in Liu Hui's preface to his commentaries of 263 A. D., it is stated that, after the burning of books by the despotic Ch'in government, Chang T'sang and Ching Ch'ou-ch'ang who were renowned for their learnedness in mathematics searched after the remnants of old writings upon which they composed the treatise, that has descended to us, whereby they made alterations and additions, so that the subjects were rendered to differ from the old ones, freely making use of modern terms of their times. About the composition of the work we know nothing more than this statement of Liu Hui. As to the names of the nine sections and their contents, that are expected to be found among the older documents, the results of further studies are awaited.

Cantor gives (p. 683) six forms of the formula for the area of a circle in the *Nine Sections*, the first of which is represented by the product of half the diameter with the radius, and he maintains that this would be erroneous, the correct formula being meant by the product of half the circumference and the radius. Cantor is right in his conjecture, for the text of the *Nine Sections* is in agreement with what he supposes.

The solution of problems in the linear simultaneous equations were most probably effected by arranging them by means of red and black

Digitized by Google

calculating pieces, whereby the red ones represented the positive and the black ones the negative quantities.

The extraction of square and cube roots were also most probably carried out by means of the same makeshifts. The particulars of procedure are not different from what was done in subsequent ages in the approximate solution of higher numerical equations.

A problem in the 9th of the *Nine Sections* relates to the solution of a quadratic equation, certainly considered as a special case of the root-extracting of the second degree.

In the *Chi-ku Suan-ching* of Wang Chiao-t'ung, who lived in the first half of the 7th century, the cubic equations are employed in the solution of problems.

And many centuries later there followed the works of Ch'in Chiu-shao, Li Yeh, Chu Shih-chieh, and others, by whose hands the Chinese algebra of the celestial element saw the highest development. This sort of algebra is highly interesting because it is carried out by the arrangement of the calculating pieces.

But strange to say, the study of Chinese mathematics that thrived very prosperously during the 13th and 14th centuries went down during the reign of the Ming Dynasty in the 15th and 16th centuries, when the abacus algebra became hardly intelligible to them. It was then that the European algebra was introduced to China at the end of the 17th century and the comparison led the lost science of the old native algebra to be restored to light. There is no wonder for the fact that the Chinese had felt the vanity of national pride at finding the newly brought science to be possessed by their fore-fathers.[1]) The algebraical considerations that were learned by the Chinese at that time from the Europeans were of a sort of meagre nature, as it is evident from the contents of the Su-li Ching-yün and Ming Wen-ting's Li-suan Ch'üan-shu. The Chinese mathematician Ming wuh gan, mentioned by Cantor (p. 688), is certainly the same person as this Ming Wen-ting.

Ōhara in Kazusa, April 4, 1911.

1) See Cantor, p. 688.

Digitized by Google

Hyperbolische und pseudosphärische Geometrie des Raumes.

Von H. Beck in Charlottenburg.

In einer voraufgegangenen Mitteilung „Ein Gegenstück zur projektiven Geometrie" (diese Zeitschrift, Band **18**, S. 43—53) hat der Verfasser das Punktkontinuum des Raumes beschrieben, in dem die konformen Punkttransformationen überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind, und es konsequent dem projektiven gegenübergestellt. Die Punktkoordinaten in diesem „konformen" Kontinuum sind identisch mit *gewissen* von Darboux[1]) und F. Klein[2]) benutzten „pentasphärischen". Die aber von diesen Autoren hauptsächlich verwandten pentasphärischen Koordinaten leiden an dem Übelstand, daß reelle Punkte nicht durch reelle Koordinaten dargestellt werden, worauf Bôcher[3]) näher eingeht. Sie haben also eigentliche Existenzberechtigung nur, solange Realitätsverhältnisse nicht in Frage kommen. Das komplexe konforme Kontinuum wird aber an den zitierten Stellen nicht beschrieben, und auch anderswo haben wir nichts darüber zu finden vermocht. Der von uns benutzte Ausdruck „konforme Geometrie" ist dagegen bereits von Klein[4]) vorgeschlagen, wie wir inzwischen bemerkt haben.

Mit jener Mitteilung beabsichtigte der Verfasser eine kurze orientierende Unterlage zu schaffen (u. a.) für die Behandlung gewisser Gegenstände aus der Nicht-Euklidischen Geometrie, über die, wie Veröffentlichungen ganz neuen Datums zeigen, noch nicht überall völlige Klarheit herrscht, eine Feststellung, die schon Klein machen mußte[5]), der den fraglichen Gegenstand bei verschiedenen Gelegenheiten behandelt hat.[6]) Es handelt sich um den Unterschied zwischen sphärischer und elliptischer bzw. pseudosphärischer und hyperbolischer Geometrie. *Diese Disziplinen arbeiten in verschiedenen Kontinuis*, eine Tatsache, die bei Klein nicht oder nur undeutlich hervortritt. Daran liegt es wohl, daß der analytische Apparat in der Folgezeit nicht in erforderlicher Weise ausgebildet worden ist, soweit die sphärische und pseudosphärische Geometrie in Frage kommt. Für die Ebene hat der Verfasser das unter-

1) Sur une classe remarquable etc. Paris 1873. Note X.
2) Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. **5**. 1872. S. 268.
3) Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894. S. 17.
4) Höhere Geometrie I S. 387.
5) Nicht-Euklidische Geometrie I. 241. 292. (1892).
6) Etwa Math. Ann. **4** (1871), **6** (1872), **37** (1890).

Digitized by Google

nommen[1]); die gegenwärtige Note soll für den Raum die beiden Nicht-Euklidischen Geometrien mit *einteiligem* absoluten Gebilde behandeln.

1. Reelle *hyperbolische* [*pseudosphärische*] Geometrie des Raumes ist die Invariantentheorie einer gewissen Gruppe von reellen *projektiven* [*konformen*] Transformationen. Bei den Transformationen dieser Gruppe bleibt eine singularitätenfreie *Fläche 2. Ordnung*, die reelle Punkte, aber keine reellen Erzeugenden besitzt, [eine *einteilige Kugel*] in Ruhe. „Absolute *Fläche*" [„Absolute *Kugel*"]. Die absolute *Fläche* habe in homogenen *projektiven* Punktkoordinaten die Gleichung

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Punkte, für die die linke Seite dieser Gleichung positiv ist, heißen *zugänglich*, die übrigen Punkte des Raumes nennt man *unzugänglich*, abgesehen von den Punkten der Fläche selbst, die auch wohl als *unendlich fern* bezeichnet werden.

Die absolute *Kugel* lassen wir mit der absoluten Fläche zusammenfallen, so daß sie in *konformen* Punktkoordinaten (S. 44) die Gleichung erhält

$$x_{00} - x_0 = 0.$$

Die absoluten Gebilde haben den Zusammenhang der Gaußischen Ebene. Mit Hilfe einer komplexen Zahl $\lambda_1 : \lambda_2$ und ihres konjugiert-komplexen Wertes $\bar{\lambda}_1 : \bar{\lambda}_2$ können wir daher die unendlich fernen Punkte folgendermaßen darstellen:

Absolute Fläche: $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 : \lambda_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_1 : i(\lambda_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_1) : \lambda_1\bar{\lambda}_1 - \lambda_2\bar{\lambda}_2.$

Absolute Kugel: $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 : \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 : \lambda_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_1 : i(\lambda_1\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\bar{\lambda}_1) : \lambda_1\bar{\lambda}_1 - \lambda_2\bar{\lambda}_2.$

Diese binären Gebiete werden in allgemeinster Weise durch die Formeln transformiert:

(I) $\lambda_1' = (\alpha_0 + \alpha_3 i)\lambda_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 i)\lambda_2$
$\lambda_2' = -(\alpha_2 - \alpha_1 i)\lambda_1 + (\alpha_0 - \alpha_3 i)\lambda_2.$
„Bewegungen".

(II) $\lambda_1' = (\alpha_2 + \alpha_1 i)\bar{\lambda}_1 - (\alpha_0 + \alpha_3 i)\bar{\lambda}_2$
$\lambda_2' = (\alpha_0 - \alpha_3 i)\bar{\lambda}_1 + (\alpha_2 - \alpha_1 i)\bar{\lambda}_2.$
„Umlegungen".

Darin bedeuten die α komplexe Verhältnisgrößen, d. i., ist ϱ eine nicht verschwindende komplexe Zahl, so liefern die Systeme $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ und $\varrho\alpha_0 : \varrho\alpha_1 : \varrho\alpha_2 : \varrho\alpha_3$ jedesmal dieselbe Transformation. Den Faktor ϱ kann man stets auf zwei Arten so bestimmen, daß der Ausdruck

$$N(\alpha) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

1) Transact. of the Amer. Math. Society **11** (1910) 414—448.

Digitized by Google

von dem die Transformationsdeterminanten abhängen, und der also nicht verschwinden darf, gleich der positiven reellen Einheit wird. Diese Umformung stellen wir uns immer als bereits vollzogen vor. Dann stellen nur noch die Systeme $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ jedesmal dieselbe Transformation dar. Diese beiden Systeme sehen wir als nicht weiter verschieden an.

Durch die Gleichungen I werden in beiden Kontinuis die nachstehenden Transformationen induziert:

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} x_0' = c_{00}x_0 + c_{01}x_1 + c_{02}x_2 + c_{03}x_3 \\ x_1' = c_{10}x_0 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ x_2' = c_{20}x_0 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ x_3' = c_{30}x_0 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases} \quad \text{(Hyperbolische Bewegungen)}$$

$$\text{(Ib)} \qquad \begin{cases} x_{00}' = k_1 x_{00} + k_2 x_0 + c_{01}x_1 + c_{02}x_2 + c_{03}x_3 \\ x_0' = k_2 x_{00} + k_1 x_0 + c_{01}x_1 + c_{02}x_2 + c_{03}x_3 \\ x_1' = \tfrac{1}{2}c_{10}x_{00} + \tfrac{1}{2}c_{10}x_0 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ x_2' = \tfrac{1}{2}c_{20}x_{00} + \tfrac{1}{2}c_{20}x_0 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ x_3' = \tfrac{1}{2}c_{30}x_{00} + \tfrac{1}{2}c_{30}x_0 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases} \quad \text{(\textit{Eigentliche} pseudosphärische Bewegungen)}$$

Die analog aus II entstehenden Transformationsscharen bezeichnen wir kurz mit IIa (hyperbolische Umlegungen) und IIb (*eigentliche* pseudosphärische Umlegungen). Man erhält IIa [IIb] aus Ia [Ib], indem man die Vorzeichen in den letzten drei Vertikalreihen abändert.

Aus Ib [IIb] erhält man noch eine weitere Schar von Transformationen Ic [IIc], wenn man rechts die ersten beiden Horizontalreihen vertauscht. Die Transformationen Ic [IIc] nennen wir *uneigentliche* pseudosphärische Bewegungen [Umlegungen].

Führen wir noch für die aus zwei Scharen bestehende gemischte Gruppe (Ia, IIa) den Namen *hyperbolische Gruppe*, für die aus vier Scharen bestehende Gruppe (Ib, IIb, Ic, IIc) die Benennung *pseudosphärische Gruppe* ein, so gilt der Satz:

Die hyperbolische [pseudosphärische] Gruppe umfaßt alle reellen projektiven [konformen] Punkttransformationen, die die absolute Fläche [die absolute Kugel] in Ruhe lassen.

Wir haben jetzt zunächst die Transformationskoeffizienten als Funktionen der α anzugeben:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} c_{00} = \alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3 & c_{ii} = \alpha_0\bar{\alpha}_0 + \alpha_i\bar{\alpha}_i - \alpha_k\bar{\alpha}_k - \alpha_l\bar{\alpha}_l \\ c_{kl} = \alpha_k\bar{\alpha}_l + \alpha_l\bar{\alpha}_k + \alpha_0\bar{\alpha}_i + \alpha_i\bar{\alpha}_0 & c_{kl} = \alpha_k\bar{\alpha}_l + \alpha_l\bar{\alpha}_k - \alpha_0\bar{\alpha}_i - \alpha_i\bar{\alpha}_0 \\ c_{0i} = i(\alpha_i\bar{\alpha}_0 - \alpha_0\bar{\alpha}_i + \alpha_l\bar{\alpha}_k - \alpha_k\bar{\alpha}_l) & c_{i0} = i(\alpha_i\bar{\alpha}_0 - \alpha_0\bar{\alpha}_i + \alpha_k\bar{\alpha}_l - \alpha_l\bar{\alpha}_k). \end{cases}$$

Digitized by Google

Darin bedeuten die Indizes i, k, l eine der Folgen 2, 3, 1; 3, 1, 2; 1, 2, 3; der Faktor i rechts in den beiden letzten Gleichungen soll aber die imaginäre Einheit sein. Endlich ist

$$(3) \qquad 2k_1 = c_{00} + \sqrt{N(\alpha)N(\bar{\alpha})}, \qquad 2k_2 = c_{00} - \sqrt{N(\alpha)N(\bar{\alpha})},$$

wo das Symbol $\sqrt{\ }$ den positiven Wurzelwert bedeutet.

Aus den Gleichungen Ia [Ib] gehen die übrigen Transformationsscharen hervor durch Zusammensetzung mit gewissen involutorischen Transformationen.

Die Umlegungen entstehen aus den Bewegungen durch Zusammensetzung mit der voraufgehenden Spiegelung am Nullpunkt der Koordinaten; aus einer eigentlichen pseudosphärischen Transformation entsteht die zugehörige uneigentliche durch Zusammensetzung mit der Inversion an der absoluten Kugel, gleichgültig in welcher Reihenfolge. Es folgt: Die pseudosphärische Gruppe ist *meromorph* zur hyperbolischen Gruppe. Die Gruppe der pseudosphärischen Bewegungen ist *meromorph* zur Gruppe der hyperbolischen Bewegungen. Die Gruppe der *eigentlichen* pseudosphärischen Bewegungen ist *holomorph* zur Gruppe der hyperbolischen Bewegungen.

Statt der Parameter α, die ja komplex sind, kann man reelle Größen einführen ($\alpha = \mathfrak{c} + i\mathfrak{d}$):

$$(4) \quad \begin{cases} c_{00} = \mathfrak{c}_0^2 + \mathfrak{c}_1^2 + \mathfrak{c}_2^2 + \mathfrak{c}_3^2 + \mathfrak{d}_0^2 + \mathfrak{d}_1^2 + \mathfrak{d}_2^2 + \mathfrak{d}_3^2 \\ c_{ii} = \mathfrak{c}_0^2 + \mathfrak{c}_i^2 - \mathfrak{c}_k^2 - \mathfrak{c}_l^2 + \mathfrak{d}_0^2 + \mathfrak{d}_i^2 - \mathfrak{d}_k^2 - \mathfrak{d}_l^2 \\ c_{kl} = 2(\mathfrak{c}_k\mathfrak{c}_l + \mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_i + \mathfrak{d}_k\mathfrak{d}_l + \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_i) \\ c_{lk} = 2(\mathfrak{c}_k\mathfrak{c}_l - \mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_i + \mathfrak{d}_k\mathfrak{d}_l - \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_i) \\ c_{0i} = 2(\mathfrak{c}_i\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_i + \mathfrak{c}_l\mathfrak{d}_k - \mathfrak{c}_k\mathfrak{d}_l) \\ c_{i0} = 2(\mathfrak{c}_i\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_i + \mathfrak{c}_k\mathfrak{d}_l - \mathfrak{c}_l\mathfrak{d}_k) \\ k_1 = \mathfrak{c}_0^2 + \mathfrak{c}_1^2 + \mathfrak{c}_2^2 + \mathfrak{c}_3^2 \\ k_2 = \mathfrak{d}_0^2 + \mathfrak{d}_1^2 + \mathfrak{d}_2^2 + \mathfrak{d}_3^2, \end{cases}$$

wobei wegen der den α auferlegten Einschränkungen noch die Relationen gelten:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{c}_0\mathfrak{d}_0 + \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2 + \mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3 &= 0, \\ \mathfrak{c}_0^2 + \mathfrak{c}_1^2 + \mathfrak{c}_2^2 + \mathfrak{c}_3^2 - \mathfrak{d}_0^2 - \mathfrak{d}_1^2 - \mathfrak{d}_2^2 - \mathfrak{d}_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jedem den Gleichungen (5) genügenden System reeller Zahlen $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ (oder auch $-\mathfrak{c}_0, -\mathfrak{c}_1, \ldots, -\mathfrak{d}_2, -\mathfrak{d}_3$) entspricht je eine Transformation der sechs Scharen, und umgekehrt.

Aus den Gll. Ia und IIa folgt

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = (k_1 - k_2)^2(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Digitized by Google

Das Vorzeichen des Ausdrucks $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kann also durch eine Transformation der hyperbolischen Gruppe nicht zerstört werden. Das heißt: *Ein zugänglicher Punkt wird durch eine hyperbolische Bewegung oder Umlegung immer wieder in einen ebensolchen verwandelt.*

Anders verhält es sich bei den Transformationen der pseudosphärischen Gruppe. Die Transformationen Ib, Ic, IIb, IIc sind ja zunächst *Kugel*transformationen (S. 48). Aus der Gleichung

$$x'_{00}x'_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3 = (k_1 - k_2)^2(x_{00}x_0 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2),$$

die in allen vier Fällen gilt, folgt, daß sie Punktkugeln (S. 49) in ebensolche verwandeln. Damit erweisen sie sich als Transformationen der konformen Gruppe. Aus den weiteren Gleichungen

(Ib, IIb) $$x'_{00} - x'_0 = (k_1 - k_2)(x_{00} - x_0)$$

(Ic, IIc) $$x'_{00} - x'_0 = (k_2 - k_1)(x_{00} - x_0)$$

folgt, daß sie die absolute Kugel in Ruhe lassen. Das Vorzeichen der beiden Ausdrücke $x_0(x_{00} - x_0)$ und $x_{00}(x_{00} - x_0)$ wird durch Transformationen Ib, IIb nicht geändert, wohl aber durch Transformationen Ic, IIc. Anders ausgedrückt:

Bei den uneigentlichen Transformationen der pseudosphärischen Gruppe werden die beiden Seiten der absoluten Kugel vertauscht.

2. Die vier Gleichungssysteme Ib, Ic, IIb, IIc, die die pseudosphärische Gruppe darstellen, zeigen gewisse Unsymmetrien. Das ist auch nicht anders zu erwarten, da die konformen Koordinaten (S. 44) für Zwecke der *Euklidischen* Geometrie zurecht gemacht waren. Dort erweisen sie sich als brauchbar, weil übereinanderliegende Punkte der beiden Kontinua — soweit man von solchen reden kann — durch die beiden Ähnlichkeitsgruppen (S. 45) wieder in übereinanderliegende Punkte übergeführt wurden. Die Systeme $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ und $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ stellten, solange $x_0 \neq 0$, ein und denselben Punkt dar, das erste Mal als Bestandteil des konformen Kontinuum, das zweite Mal als zum projektiven Kontinuum gehörig: das ist der Sinn des Wortes „übereinanderliegende" Punkte.

Aus dieser Erkenntnis heraus kann man nun für unsere Nicht-Euklidischen Geometrien ein Problem stellen: *Ist es vermöge einer anderen Abbildung des konformen Kontinuum auf das projektive möglich, bei zusammengehörigen Transformationen der hyperbolischen und pseudosphärischen Gruppe übereinanderliegende Punkte stets wieder in ebensolche überzuführen?*

Digitized by Google

Unter zusammengehörigen Transformationen sind natürlich solche der Scharen Ia und Ib, Ic bzw. IIa und IIb, IIc zu verstehen, die zu denselben Wertesystemen der α, also auch der $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ gehören.

Daß unsere bisherigen Formeln dies Problem nicht lösen, ergibt sich schon aus der Tatsache, daß eine pseudosphärische Transformation eine Ebene in eine unebene Kugel verwandeln kann, was eine hyperbolische Transformation nie zu leisten imstande ist.

Wir schlagen zunächst einen Weg ein, der das Problem noch nicht löst, wohl aber bereits die Mittel zur Lösung liefert.

Wir bilden das konforme Kontinuum ein-eindeutig lückenlos auf sich selbst ab, indem wir neue konforme Koordinaten durch die Gleichungen einführen:

$$(6) \qquad \xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_{00} - x_0 : x_{00} + x_0 : 2x_1 : 2x_2 : 2x_3 .$$

Die Koordinaten ξ haben, um als *Punkt*koordinaten verwandt werden zu können, der Relation zu genügen:

$$(7) \qquad -\xi_{00}^2 + \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0 .$$

Die Gleichung der absoluten Kugel wird $\xi_{00} = 0$. Die eigentlichen pseudosphärischen Bewegungen können dann symmetrischer geschrieben werden:

$$(I\beta) \qquad \begin{cases} \xi'_{00} = (k_1 - k_2)\xi_{00} & * & * & * & * \\ \xi'_0 = & * & c_{00}\xi_0 + c_{01}\xi_1 + c_{02}\xi_2 + c_{03}\xi_3 \\ \xi'_1 = & * & c_{10}\xi_0 + c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + c_{13}\xi_3 \\ \xi'_2 = & * & c_{20}\xi_0 + c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + c_{23}\xi_3 \\ \xi'_3 = & * & c_{30}\xi_0 + c_{31}\xi_1 + c_{32}\xi_2 + c_{33}\xi_3 . \end{cases}$$

Die Schar IIβ (eigentliche pseudosphärische Umlegungen) erhält man wieder, wenn man in den letzten drei Vertikalreihen die Vorzeichen abändert. Die uneigentlichen Transformationen (Iγ, IIγ) gehen aus Iβ, IIβ hervor, wenn man die Größe $k_1 - k_2$ ersetzt durch $k_2 - k_1$. *Die Scharen* Ia, IIa *bleiben ungeändert.*

Läßt man in den Gleichungen Iβ, Iγ, IIβ, IIγ die erste Horizontalreihe fort, so entstehen nur *zwei* neue Formelreihen, *in denen* ξ_{00} *nicht mehr auftritt.* Wir nennen sie Iα und IIα. Sie sind mit Ia und IIa identisch, abgesehen davon, daß sie jetzt Transformationen des Punktes mit den *projektiven* Koordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ sind. Diesen Punkt konstruiert man folgendermaßen:

Von den beiden Punkten $\pm\,\xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ liegt, falls $\xi_{00} \neq 0$, stets einer im Innern der absoluten Kugel. Wir verbinden ihn mit dem Koordinatenanfangspunkt und halbieren die so gewonnene Strecke. Der

Digitized by Google

Halbierungspunkt hat die *projektiven* Koordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, wie man leicht auf Grund der Gleichungen bestätigt:

$$(6') \qquad \xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$
$$= -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : 2x_0x_1 : 2x_0x_2 : 2x_0x_3.$$

Dadurch, daß man den beiden Punkten $\pm\, \xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ des konformen Kontinuum den Punkt $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ des projektiven Kontinuum zuordnet, hat man eine ein-zweideutige Abbildung der beiden Kontinua vor sich. Sie ist vor kurzem mit etwas anderen Worten von Herrn J. Wellstein beschrieben.[1]) Sie löst aber unser Problem nicht; sie ist eben aus dem Gedankenkreise der Euklidischen Geometrie hervorgegangen, deren Spuren sich noch bemerkbar machen, insofern die konformen Koordinaten $x_{00} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, wie bereits erwähnt, auf die Euklidische Geometrie zugeschnitten sind. Die Brauchbarkeit dieser Abbildung zu bestimmten Zwecken wird nicht angezweifelt, wenn wir sie als unsachgemäß erklären, sobald es sich darum handelt, die beiden Nicht-Euklidische Geometrieen um ihrer selbst willen zu betrachten.

3. Wir erklären neue Punktkoordinaten im konformen Kontinuum, die mit den bisherigen in durchaus keinem innern Zusammenhang stehen. Das konforme Kontinuum hat den Zusammenhang einer singularitätenfreien M_3^2, die im R_4 verläuft (S. 53). In projektiven Koordinaten des R_4 soll diese Mannigfaltigkeit durch die Gleichung dargestellt werden:

$$(8) \qquad -\xi_{00}^2 + \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0,$$

die äußerlich mit (7) übereinstimmt. Diese befriedigen wir dadurch identisch, daß wir abweichend von (6') setzen:

$$(9) \qquad \xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} : x_0 : x_1 : x_2 : x_3.$$

Damit haben wir eine neue ein-zweideutige Abbildung des konformen Kontinuum auf das projektive. Jedem zugänglichen Punkt x entsprechen zwei Punkte ξ; unzugänglichen Punkten x sind keine (reellen) Punkte des konformen Kontinuum zugeordnet; endlich wird jeder unendlich ferne Punkt x auf einen einzigen Punkt ξ abgebildet.

Diese Zuordnung realisieren wir dadurch, daß wir das *zugängliche* Gebiet des projektiven Kontinuum mit zwei Blättern überdecken, die in den Punkten der absoluten Fläche zusammenhängen. Ein und derselbe Punkt werde dann durch die projektiven Koordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$

1) Zusammenhang zwischen zwei Euklidischen Bildern der Nicht-Euklidischen Geometrie. Arch. der Math. u. Phys. **17.** (1910). S. 195—199.

Digitized by Google

und, je nach dem Blatte, zu welchem wir ihn rechnen, durch die konformen Koordinaten $\xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ oder $-\xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ dargestellt. Als erstes Blatt bezeichnen wir etwa das, in dem $\xi_0 \xi_{00} > 0$ (die Koordinate ξ_0 kann für einen reellen Punkt des konformen Kontinuum nie verschwinden). Die absolute Kugel hat dann die Gleichung $\xi_{00} = 0$. Jetzt ist der Sinn des folgenden Satzes klar:

In der pseudosphärischen Geometrie des Raumes gibt es kein unzugängliches Gebiet.

Ferner ist einleuchtend, was unter übereinanderliegenden Punkten zu verstehen ist.

Die hyperbolische Gruppe wird jetzt durch die Systeme $I\alpha$, $II\alpha$, die pseudosphärische Gruppe durch $I\beta$, $II\beta$, $I\gamma$, $II\gamma$ geliefert, die nur anders interpretiert werden, als vorhin, und jetzt unser Problem lösen.

Die uneigentlichen pseudosphärischen Transformationen vertauschen die beiden Blätter. Die pseudosphärischen Kugeln sind durch Gleichungen der Form

$$-a_{00}\xi_{00} + a_0\xi_0 - a_1\xi_1 - a_2\xi_2 - a_3\xi_3 = 0$$

definiert, in denen nicht alle a gleichzeitig verschwinden dürfen. Wir zählen von den neun Klassen jedesmal einen Vertreter auf.

1. $-a_{00}^2 + a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$. Die Kugel besitzt keine reellen Punkte.
   a) $a_{00} \neq 0$. Nullteilige Kugeln. $\xi_{00} + 2\xi_0 = 0$.
   b) $a_{00} = 0$. Nullteilige Ebenen. $\xi_0 = 0$.
2. $-a_{00}^2 + a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$. Punktkugeln.
   a) $a_{00} \neq 0$. $\xi_{00} + \xi_0 = 0$. Doppelpunkt nicht unendlich fern
   b) $a_{00} = 0$. $\xi_0 + \xi_1 = 0$. Doppelpunkt auf der absoluten Kugel.
3. $-a_{00}^2 + a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 < 0$. Einteilige Kugeln.
   a) $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$. $2\xi_{00} + \xi_0 = 0$. Die Kugel liegt ganz in einem Blatte.
   b) $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$. $2\xi_{00} + \xi_0 + \xi_1 = 0$. Ein unendlich ferner Punkt. (Grenzkugel.)
   c) $a_0^2 - a_1^2 - a_1^2 - a_3^2 < 0$. Die Kugel dringt in beide Blätter ein. (Abstandsflächen.)
      α) $a_{00} \neq 0$. $\xi_{00} + \xi_3 = 0$. Diese Kugeln gestatten die absolute Spiegelung *nicht*.
      β) $a_{00} = 0$. $\xi_1 = 0$. Einteilige Ebenen. Sie gestatten die absolute Spiegelung.
4. $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. $\xi_{00} = 0$. Absolute Kugel.

Digitized by Google

Unter der absoluten Spiegelung ist verstanden die ausgezeichnete Transformation

$$\xi'_{00} : \xi'_0 : \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3 = -\xi_{00} : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3,$$

die übereinanderliegende Punkte beider Blätter vertauscht.

Die pseudosphärischen Ebenen sind jetzt wirklich ebene Gebilde, d. i. nicht bloß Scheinebenen oder Pseudoebenen. Sie haben aber den Zusammenhang der Riemannschen Kugel und dringen in beide Blätter ein. Zwei solche Ebenen brauchen sich nicht zu schneiden, im Gegensatz zu den hyperbolischen Ebenen. Es ist ferner möglich, daß sie nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben (parallele Ebenen). Die Schnittfigur zweier getrennter nicht paralleler Ebenen nennen wir eine pseudosphärische Gerade. Zwei solche Gerade können sich in *zwei* Punkten schneiden; haben sie nur einen Schnittpunkt, so sind sie parallel. Eine pseudosphärische Gerade dringt in beide Blätter ein.

4. Die *komplexen* Größen α, mittels derer wir unsere *reellen* Transformationen dargestellt hatten (Gl. 3), verdienen vor den reellen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (Gl. 4) den Vorzug, wenn es sich darum handelt, mehrere Transformationen unserer Gruppen zusammenzusetzen. Soll diese Tatsache auch in den Transformationsformeln zutage treten, so muß man einen Wechsel des Raumelements vornehmen.

Unter einem *Pfeil* soll die Figur zweier Punkte der absoluten Kugel verstanden werden, die in eine gewisse Reihenfolge gesetzt sind (Anfangspunkt-Endpunkt).[1]) Vertauscht man beide, so erhält man den *entgegengesetzten* Pfeil. Fallen Anfangspunkt und Endpunkt zusammen, so reden wir von einem Punktpfeil; alle übrigen Pfeile heißen *eigentlich*.

Einen eigentlichen Pfeil kann man sich, wenn man will, durch den einen Zug der pseudophärischen Geraden, die ihn aus der absoluten Kugel herausschneidet, anschaulicher machen; der Zug der Geraden im anderen Blatte repräsentiert dann den entgegengesetzten Pfeil.

Ein Pfeil ist durch zwei komplexe Zahlen $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\mu_1 : \mu_2$ gegeben, von denen die erste dem Anfangspunkt zugeordnet ist (vgl. S. 221). Die Gleichungen I, II erweitert man dann leicht zu einer zwölfgliedrigen Gruppe von Pfeiltransformationen, die aus acht getrennten Scharen besteht. Verlangt man aber, daß Punktpfeile immer wieder in ebensolche verwandelt werden, so müssen die Anfangspunkte ebenso transformiert werden, wie die Endpunkte; es bleibt eine sechsgliedrige Gruppe übrig, die noch aus vier getrennten Transformationsscharen besteht — die pseudosphärische Gruppe.

1) E. Study. Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie. Jahresber. d. D. Math. Vergg. Bd. **11**, 1902.

Digitized by Google

Aus den „Pfeilparametern" λ und μ bilden wir *Pfeilkoordinaten:*

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 : \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 : i(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) : \\ - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1,$$

die der Relation genügen:

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0.$$

Ein (reeller) Pfeil hat also vier homogene *komplexe* Koordinaten. Für Punktpfeile ist $X_0 = 0$.

Die Transformation

$$X_0' : X_1' : X_2' : X_3' = - X_0 : X_1 : X_2 : X_3$$

kehrt alle Pfeile um, d. i. verwandelt jeden Pfeil in den entgegengesetzten. Die Spiegelung am Nullpunkt der Koordinaten lautet

$$X_0' : X_1' : X_2' : X_3' = - \bar{X}_0 : \bar{X}_1 : \bar{X}_2 : \bar{X}_3.$$

Wir führen jetzt Quaternionen ein:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad \dot{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}_0 e_0 + \bar{\alpha}_1 e_1 + \bar{\alpha}_2 e_2 + \bar{\alpha}_3 e_3,$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3, \quad \dot{X} = X_0 e_0 + X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 \text{ usw.}$$

wo $e_0^2 = e_0$, $e_i^2 = - e_0$, $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_k e_l = - e_l e_k = e_i$.

$$(i,k,l = 2,3,1;\ 3,1,2;\ 1,2,3).$$

Dann erhalten wir aus I und II:

(Iβ) $\dot{X}' = \underline{\dot{\alpha}} \dot{X} \dot{\alpha}$. (II$\beta$) $\dot{X}' = \dot{\alpha} \underline{\dot{\bar{X}}} \dot{\alpha}$.

(Iγ) $\dot{X}' = \underline{\dot{\alpha}} \underline{\dot{X}} \dot{\alpha}$. (II$\gamma$) $\dot{X}' = \dot{\alpha} \underline{\dot{\bar{X}}} \dot{\bar{\alpha}}$.

Betrachten wir jetzt zwei entgegengesetzte Pfeile als identisch und nennen das neue Gebilde (nicht gerade Linie, sondern) *Strahl* (eigentlicher Strahl, Punktstrahl[1])), so bleiben *zwei* Quaternionengleichungen übrig. Wir haben nur der Quaternion $\dot{X}$ die neue Bedeutung beizulegen:

$$\dot{X} = * \ X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3.$$

Dann ergibt sich:

(Iα) $\dot{X}' = \underline{\dot{\alpha}} \dot{X} \dot{\alpha}$ (Bewegungen). (IIα) $\dot{X}' = \underline{\dot{\alpha}} \dot{\bar{X}} \dot{\alpha}$ (Umlegungen).

Damit sind unsere Gruppen auf die denkbar einfachsten Gestalten gebracht, aus denen man die Zusammensetzung der Transformationen in jedem Falle ohne weiteres ablesen kann.

Charlottenburg, 26. Mai 1911.

1) Vgl. die oben zitierte Study sche Arbeit, sowie des Verfassers Dissertation: Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume. 1905. Leipzig bei G. Fock, wo auch die Haupteigenschaften der Umlegungen näher untersucht sind.

Digitized by Google

Über Kabelprobleme und ähnliche Randwertaufgaben, die auf Reihenentwicklungen nach nicht orthogonalen Eigenfunktionen führen.

(Mitteilung aus dem Kaiserl. Telegraphen-Versuchsamt.[1])

Von KARL WILLY WAGNER in Berlin.

1. Die Art der vorliegenden Probleme. Für die Elektrotechnik hat die Untersuchung des Stromverlaufs in langgestreckten parallelen Leitern besonderes Interesse; sei es, daß diese Leiter oberirdisch als *Fernleitungen* oder unterirdisch oder auf dem Meeresgrunde als *Kabel* verlegt sind. Sie dienen, wie bekannt, zum Telegraphieren, zum Fernsprechen oder zur Fernübertragung elektrischer Arbeit.

Sieht man von einigen sehr rasch veränderlichen Vorgängen ab, so ergibt sich aus den Grundgesetzen der Elektrodynamik, daß jede derartige Leitung durch *vier Konstanten* gekennzeichnet ist:

den *Ohmschen Widerstand* R der Hin- und Rückleitung zusammen;
die *Kapazität* C zwischen Hin- und Rückleitung;
die *Induktivität* L der aus Hin- und Rückleitung gebildeten Schleife;
die *Ableitung* oder den *Leitwert der Isolation* A zwischen Hin- und Rückleitung.

Die Leitung habe die Länge l, und die Größen R, C, L, A sollen sich auf die Längeneinheit beziehen.

Ist im Abstande x von dem einen Ende der Leitung i der (im Sinne wachsender x fließende) Strom und v die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung, so gilt

$$(1) \qquad \begin{cases} Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ Av + C\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}. \end{cases}$$

Als *Grenz*bedingung hat man an den Enden $x = 0$ und $x = l$ Beziehungen zwischen i und v, in denen auch die ersten und höheren Ableitungen dieser Größen nach der Zeit vorkommen können. Diese Beziehungen hängen von den Apparaten an den Leitungsenden ab.

---

1) Vorgetragen in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 28. Juni 1911.

Digitized by Google

Das Problem, das wir betrachten wollen, besteht in der Ermittlung der Strom- und Spannungsverteilung für irgendeine Zeit $t > 0$, wenn für $t = 0$

$$v = f_1(x), \quad i = f_2(x) \tag{2}$$

gegeben ist; f_1 und f_2 sind *willkürliche Funktionen*. Dieses Problem ist nur für einige ganz einfache Grenzbedingungen gelöst worden.

Es ergibt sich aber aus der Betrachtung des Stromverlaufs auf einer unendlich langen Leitung[1]), daß

1. **auf langen Leitungen**

$$\left(\text{Kriterium: } \left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right] l > 10\right)$$

der Vorgang mit praktisch ausreichender Genauigkeit ebenso verläuft, als ob $L = 0$ und $A = 0$ wäre, so daß die Gleichungen (1) mit

$$Ri = J, \quad v = V, \quad x = X \text{ und } \frac{t}{RC} = T \tag{3}$$

übergehen in

$$J = -\frac{\partial V}{\partial X}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\partial J}{\partial X}, \tag{4}$$

die man durch den Ansatz

$$\begin{cases} V = \sum_\nu B_\nu e^{-\lambda_\nu T} \varphi_\nu(X), \\ J = -\sum_\nu B_\nu e^{-\lambda_\nu T} \varphi_\nu'(X) \end{cases} \tag{5}$$

lösen kann, wo die B und λ noch willkürliche Konstanten sind und

$$\varphi_\nu'' = -\lambda_\nu \varphi_\nu \tag{6}$$

ist. Nimmt man die Grenzbedingungen hinzu, so ergibt sich, daß nur eine allerdings unendliche Reihe von *diskreten Werten*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu, \ldots$$

zuzulassen ist, die als die *Eigenwerte* des Problems bekannt sind, und die nach (6) die *Eigenfunktionen* oder *Normalfunktionen*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu, \ldots$$

bestimmen.[2])

In diesem Falle darf man für $T = 0$ nur $V = f_1(X)$ vorschreiben. J ist dann nach (4) bereits bestimmt. Man erhält hiermit nach (5)

$$f_1(X) = B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2 + \cdots. \tag{7}$$

---

1) K. W. Wagner, Elektrot. Zeitschr. Bd. 31; 1910, S. 163, 192.

2) Lord Rayleigh, Theory of Sound, Vol. I, Nr. 92, S. 118; London 1894.

Digitized by Google

2. Ist die **Leitung kurz** $\left(\left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}-\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]l<1\right)$, so darf man in erster Näherung $R=0$ und $A=0$ setzen und erhält aus (1) mit

$$i\sqrt{\frac{L}{C}}=J,\quad v=V,\quad x=X \text{ und } \frac{t}{\sqrt{LC}}=T \tag{8}$$

die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial T}=-\frac{\partial V}{\partial X},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=-\frac{\partial J}{\partial X}. \tag{9}$$

Diesen Gleichungen genügt der Ansatz

$$\begin{cases} J=-\sum_{\nu} U'_{\nu}(T)\varphi_{\nu}(X), \\ V=\sum_{\nu} U_{\nu}(T)\varphi'_{\nu}(X), \end{cases} \tag{10}$$

worin

$$\begin{aligned} U_{\nu}(T) &= D_{\nu}\sin T\sqrt{\lambda_{\nu}}+B_{\nu}\cos T\sqrt{\lambda_{\nu}} \\ U'_{\nu}(T) &= D_{\nu}\sqrt{\lambda_{\nu}}\cos T\sqrt{\lambda_{\nu}}-B_{\nu}\sqrt{\lambda_{\nu}}\sin T\sqrt{\lambda_{\nu}} \end{aligned} \tag{11}$$

ist, D_{ν} und B_{ν} Konstanten sind und φ_{ν} wie früher aus der Differentialgleichung

$$-\lambda_{\nu}\varphi_{\nu}=\varphi''_{\nu} \tag{6}$$

zu bestimmen ist. Auch hier ergeben die Grenzbedingungen, daß nur eine Reihe von diskreten Werten

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_{\nu},\ \ldots$$

für λ zuzulassen ist.

Bemerkt sei noch, daß die durch (10) gegebene Lösung durch Hinzunahme eines Dämpfungsfaktors

$$e^{-T\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}+\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)}$$

soweit verbessert werden kann, daß sie hinsichtlich der *kurzen Leitungen* allen billigen Anforderungen an Genauigkeit für technische Zwecke genügt.[1])

Die Anfangsbedingung, Gleichung (2),

$$\left.\begin{cases} V=f_1(x)=F_1(X) \\ J=\sqrt{\frac{L}{C}}f_2(x)=F_2(X) \end{cases}\right\} \text{für } T=0 \tag{2a}$$

ergibt mit Gleichung (10) und (11)

$$\begin{cases} F_1(X)=B_1\varphi'_1+B_2\varphi'_2+\cdots \\ -F_2(X)=D_1\sqrt{\lambda_1}\varphi_1+D_2\sqrt{\lambda_2}\varphi_2+\cdots. \end{cases} \tag{12}$$

1) Belege hierfür habe ich in einer Arbeit angegeben, die demnächst in der Elektrot. Zeitschr. erscheinen wird. (Eingesandt Ende Dezember 1910.)

Digitized by Google

2. Verschiedene Arten von Grenzbedingungen. Die hier vorliegenden Probleme wollen wir als gelöst betrachten, sobald die Koeffizienten B in (7) bzw. B und D in (12) bestimmt sind. Mit den zum teil sehr schwierigen *Konvergenzfragen wollen wir uns hier nicht abgeben;* für die in der Technik in Frage kommenden Fälle liegen auch wohl kaum Bedenken vor, da die Funktionen f_1 bzw. F_1 und F_2 im allgemeinen — eine endliche Zahl von Punkten ausgenommen — als durchaus regulär vorausgesetzt werden dürfen. Wir können darum annehmen, daß außer in den erwähnten Punkten die Reihen (7) und (12) nicht nur gleichmäßig konvergieren, sondern daß sie auch gliedweise differenziert werden können, ohne ihre Geltung zu verlieren.

Der zur Koeffizientenbestimmung einzuschlagende Weg richtet sich nach der Art der *Grenzbedingungen.* Ganz allgemein ergibt sich aus (6)

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu)\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu \, dX = \left| \varphi_\mu \varphi'_\nu - \varphi_\nu \varphi'_\mu \right|_0^l, \tag{13}$$

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu)\int_0^l \varphi'_\mu \varphi'_\nu \, dX = \left| \lambda_\mu \varphi_\mu \varphi'_\nu - \lambda_\nu \varphi_\nu \varphi'_\mu \right|_0^l. \tag{14}$$

Die *einfachsten* Grenzbedingungen bestehen darin, daß an den Grenzen $X = 0$ und $X = l$ entweder φ oder φ' verschwindet. Dann werden die rechten Seiten von (13) und (14) Null, und daraus folgt, wenn λ_μ und λ_ν verschieden sind,

$$\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu \, dX = 0, \quad \int_0^l \varphi'_\mu \varphi'_\nu \, dX = 0. \tag{15}$$

Die Normalfunktionen sind demnach ebenso wie ihre Ableitungen *orthogonal.* Die Koeffizienten von (7) bzw. (12) sind hier nach Fourier sehr einfach zu bestimmen; z. B. wird für die Reihe (7)

$$B_\mu = \frac{\int_0^l f_1(X)\varphi_\mu \, dX}{\int_0^l \varphi_\mu^2 \, dX}. \tag{16}$$

Die Funktionen φ sind auch dann noch orthogonal, wenn an den Grenzen eine Beziehung von der Form

$$\varphi = a\varphi' \tag{17}$$

besteht, wo a eine Konstante ist. Die ersten Ableitungen φ' sind hier

Digitized by Google

jedoch nicht mehr orthogonal. Vielmehr folgt aus (14) unter der Voraussetzung, daß λ_μ und λ_ν verschieden sind,

$$\int_0^l \varphi'_\mu \varphi'_\nu \, dX = \left| a \varphi'_\mu \varphi'_\nu \right|_0^l. \tag{18}$$

Die Koeffizienten B in der Reihe (12) können also nicht mehr nach der Fourierschen Formel (16) berechnet werden; ein Verfahren zu ihrer Ermittlung hat Rayleigh[1]) angegeben.

Aus (12) folgt

$$\int_0^l F_1(X) \varphi'_\mu \, dX = \sum_\nu B_\nu \int_0^l \varphi'_\mu \varphi'_\nu \, dX$$

$$= \left| a \varphi'_\mu \sum_\nu B_\nu \varphi'_\nu - a \varphi'^2_\mu B_\mu \right|_0^l + B_\mu \int_0^l \varphi'^2_\mu \, dX,$$

woraus (wegen 12)

$$B_\mu = \frac{\int_0^l F_1(X) \varphi'_\mu \, dX - \left| a \varphi'_\mu F_1(X) \right|_0^l}{\int_0^l \varphi'^2_\mu \, dX - \left| a \varphi'^2_\mu \right|_0^l}. \tag{19}$$

Eine andere wichtige Klasse von Problemen, die gleichfalls nach Fourier und Rayleigh zu lösen sind, ist durch die Grenzbedingung

$$\varphi'_\nu = b \lambda_\nu \varphi_\nu \tag{20}$$

gekennzeichnet. Diese führt nach (13) für die Normalfunktionen selbst auf die der Gleichung (18) entsprechende Beziehung, während nach (14) die φ' orthogonal werden.

Mit den bisher betrachteten Grenzbedingungen ist jedoch die Zahl der für die Anwendungen wichtigen Fälle keineswegs erschöpft. Sind z. B. die Enden einer kurzen Leitung auf einen Kondensator (Kapazität $C_0 = \beta C l$) geschaltet, neben dem eine Drosselspule (Induktivität $L_0 = \frac{1}{\alpha} L l$) liegt, so gilt

$$\varphi = \left(\frac{\alpha}{\lambda l} - \beta l \right) \varphi'. \tag{21a}$$

Handelt es sich aber um eine lange Leitung, so würde diesen Apparaten eine Grenzbedingung

$$\varphi' = \left(\frac{\delta}{\lambda l^3} + \beta \lambda l \right) \varphi \tag{21b}$$

1) Rayleigh, Theory of Sound, Vol. I., Nr. 135, S. 200.

Digitized by Google

entsprechen; darin ist

$$\delta = l^3 R^2 C/L_0 .$$

Liegt die betrachtete Apparatkombination nicht unmittelbar, sondern unter Vorschaltung einer Kapazität $K = \zeta Cl$ am Ende einer kurzen Leitung, so tritt dort anstelle von (21a) die Bedingung

$$\left[-\frac{1}{\zeta l} + \frac{\lambda l}{\alpha}\left(1 + \frac{\beta}{\zeta}\right)\right]\varphi = \left(1 - \frac{\lambda l}{\alpha}\beta l\right)\varphi'. \tag{21c}$$

Mit $\zeta = \infty$ gelangen wir auf die Bedingung (21a) zurück.

3. Allgemeiner Fall. Wir nehmen nun allgemein an, daß die Kabelenden mit Stromkreisen verbunden sind, die durch beliebige Kombinationen von Kapazitäten und Induktivitäten (in endlicher Anzahl) dargestellt werden können.[1]) Im Fall des *langen* Kabels darf man auch Ohmsche Widerstände einführen; bei *kurzen* Leitungen entstehen jedoch hierdurch Schwierigkeiten, die besondere Betrachtungen erfordern, die außerhalb des Rahmens dieser Arbeit liegen; wir schließen sie darum aus. Für alle anderen Fälle ergeben sich Grenzbedingungen von der Form

$$\begin{cases} Q_0\varphi = P_0\varphi' & \text{für } X = 0, \\ Q_l\varphi = P_l\varphi' & \text{für } X = l, \end{cases} \tag{22}$$

wo die Q und P *ganze rationale Funktionen* von λ sind.[2])

Setzen wir den hieraus folgenden Wert von φ in (13) ein, so folgt

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu)\int_0^l \varphi_\nu\varphi_\mu\, dX = \frac{\varphi'_\mu\varphi'_\nu}{Q_\mu Q_\nu}(P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu)\Big|_0^l .$$

Fassen wir für den Augenblick λ_μ als Veränderliche und λ_ν als konstant auf, so sind die Ausdrücke

$$(P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu)_{X=0} \quad \text{und} \quad (P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu)_{X=l}$$

ganze rationale Funktionen von λ_μ, die für $\lambda_\mu = \lambda_\nu$ verschwinden; sie sind also gewiß durch $\lambda_\mu - \lambda_\nu$ teilbar. Bezeichnen wir das Ergebnis

1) Bei mechanischen Problemen, die wie der Fall der schwingenden Saite ebenfalls auf die Gl. (6) führen, wäre der Zwang auf die Enden durch Kombinationen von Spannfedern und trägen Massen zu veranschaulichen.

2) Die Potenzen von λ stammen aus den Beziehungen zwischen den physikalischen Größen (hier Strom und Spannung) und ihren Ableitungen nach der Zeit an den Grenzen $X = 0$ und l. Wenn in den Grenzbedingungen außer der ersten Ableitung φ' auch höhere Ableitungen der Eigenfunktionen vorkommen, so kann man diese mit Hilfe der aus (6) fließenden Beziehungen

$$\varphi^{(2n)} = (-\lambda)^n \cdot \varphi ; \qquad \varphi^{(2n+1)} = (-\lambda)^{2n} \cdot \varphi'$$

stets beseitigen und die Grenzbedingungen auf die Form (22) bringen.

Digitized by Google

der Division mit $S(\lambda_\mu, \lambda_\nu)$, so ist S eine in λ_μ und λ_ν symmetrische ganze rationale Funktion dieser Größen. Somit ergibt sich, wenn μ und ν verschieden sind:

$$\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu dX = \left| \frac{\varphi_\mu' \varphi_\nu'}{Q_\mu Q_\nu} S(\lambda_\mu \lambda_\nu) \right|_0^l. \tag{23}$$

Es sei

$$\begin{cases} \text{für } X = l & P_l = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n \\ \text{für } X = 0 & P_0 = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_m\lambda^m. \end{cases} \tag{24}$$

Führen wir außerdem noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} |G(\lambda_\mu, \lambda_\nu)|_{X=l} &= S_l P_0(\lambda_\mu) P_0(\lambda_\nu) \\ |G(\lambda_\mu, \lambda_\nu)|_{X=0} &= S_0 P_l(\lambda_\mu) P_l(\lambda_\nu) \end{aligned}$$

ein, wo also die G ebenfalls in λ_μ und λ_ν symmetrische ganze rationale Funktionen bedeuten, so folgt aus (23) mit Rücksicht auf (22)

$$P_l(\lambda_\mu) P_l(\lambda_\nu) P_0(\lambda_\mu) P_0(\lambda_\nu) \int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu dX = \left| \varphi_\mu \varphi_\nu G(\lambda_\mu, \lambda_\nu) \right|_0^l. \tag{25}$$

Wegen (24) kann man schreiben

$$P_l(\lambda_\mu) P_l(\lambda_\nu) P_0(\lambda_\mu) P_0(\lambda_\nu) = \sum_{p=0}^{p=m+n} \sum_{q=0}^{q=m+n} c_{pq} \lambda_\mu^p \lambda_\nu^q$$

mit $c_{pq} = c_{qp}$.

Ist ein G vom Grade r, so lautet diese Funktion, ausführlicher hingeschrieben,

$$G(\lambda_\mu, \lambda_\nu) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} \sum_{\beta=0}^{\beta=r} C_{\alpha\beta} \lambda_\mu^\alpha \lambda_\nu^\beta$$

mit $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

Führt man diese Bezeichnungen in (25) ein, so läßt sich diese Gleichung mit Rücksicht auf die aus der Differentialgleichung der Eigenfunktionen (6) fließende Beziehung

$$(-1)^n \varphi^{(2n)} = \lambda^n \varphi$$

auch schreiben

$$\begin{cases} \int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu dX = -\sum_{p=0}^{p=m+n} \sum_{q=0}^{q=m+n} k_{pq} \int_0^l \varphi_\mu^{(2p)} \varphi_\nu^{(2q)} dX \\ \qquad + \left| \sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} \sum_{\beta=0}^{\beta=r} K_{\alpha\beta} \varphi_\mu^{(2\alpha)} \varphi_\nu^{(2\beta)} \right|_0^l. \end{cases} \tag{26}$$

Hierin ist

$$k_{\substack{p=0 \\ q=0}} = 0; \quad k_{pq} = \frac{(-1)^{p+q} c_{pq}}{c_{\substack{p=0 \\ q=0}}}; \quad K_{\alpha\beta} = \frac{(-1)^{\alpha+\beta} C_{\alpha\beta}}{c_{\substack{p=0 \\ q=0}}}.$$

Digitized by Google

Soll die willkürliche Funktion $f(X)$ nach den Eigenfunktionen entwickelt werden

$$f(X) = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \cdots,$$

so folgt

$$\int_0^l f\varphi_\mu\, dX = \sum_\nu A_\nu \int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu\, dX.$$

Wir ersetzen hierin die Integrale auf der rechten Seite durch die Ausdrücke (26); diese sind jedoch nur für $\mu \leqq \nu$ gültig; wenn also nachträglich die Summation über alle ν erstreckt werden soll, so müssen die auf $\nu = \mu$ bezüglichen Glieder wieder abgezogen werden. So erhält man

$$\int_0^l f\varphi_\mu\, dX = A_\mu \int_0^l \varphi_\mu^2\, dX + \sum_\nu A_\nu \left\{ -\sum_{p=0}^{p=m+n} \sum_{q=0}^{q=m+n} \int_0^l k_{pq}\varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\nu^{(2q)}\, dX \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} \sum_{\beta=0}^{\beta=r} K_{\alpha\beta}\varphi_\mu^{(2\alpha)}\varphi_\nu^{(2\beta)} \right|_0^l \right\} + A_\mu \sum_{p=0}^{p=m+n} \sum_{q=0}^{q=m+n} \int_0^l k_{pq}\varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\mu^{(2q)}\, dX \tag{27}$$

$$- A_\mu \left| \sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} \sum_{\beta=0}^{\beta=r} K_{\alpha\beta}\varphi_\mu^{(2\alpha)}\varphi_\mu^{(2\beta)} \right|_0^l.$$

Ist die Funktion f nebst ihren Ableitungen bis zur Ordnung $2q$ regulär, so gilt

$$\sum_\nu A_\nu \int_0^l k_{pq}\varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\nu^{(2q)}\, dX = \int_0^l k_{pq}\varphi_\mu^{(2p)} f^{(2q)}\, dX. \tag{28}$$

Erleidet aber f selbst oder eine ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $2q-1$ innerhalb des Bereichs $0 \leqq X \leqq l$ einen endlichen Sprung, wie das in den Anwendungen öfter vorkommt, so würde die Berechnung des rechtsstehenden Integrals Schwierigkeiten machen. In diesem Fall bringt man die Integrale $\int_0^l \varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\nu^{(2q)}\, dX$ durch fortgesetzte Integration nach Teilen auf die Form

$$\left| \varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\nu^{(2q-1)} - \varphi_\mu^{(2p+1)}\varphi_\nu^{(2q-2)} + \cdots {}_0^l \pm \int_0^l \varphi_\mu^{[2(p+q)]}\varphi_\nu\, dX. \right.$$

Dann ergibt sich nach den über die Entwickelbarkeit von f gemachten Voraussetzungen

$$\sum_\nu A_\nu \int_0^l k_{pq}\varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\nu^{(2q)}\, dX \tag{29}$$

$$= k_{pq} \left\{ \left| \varphi_\mu^{(2p)} f^{(2q-1)} - \varphi_\mu^{(2p+1)} f^{(2q-2)} + \cdots {}_0^l \pm \int_0^l \varphi_\mu^{(2p+2q)} f\, dX \right\}.$$

Digitized by Google

Wenn die Funktion f innerhalb des Integrationsbereichs keine andern Unstetigkeiten als einzelne endliche Sprünge aufweist und ihre Ableitungen an den Grenzen 0 und l einen bestimmten Wert haben, so kann auch der Wert der rechten Seite der letzten Gleichung angegeben werden.

Wir wollen der Kürze wegen die weiteren Entwicklungen nur mit dem Ausdruck auf der rechten Seite von (28) durchführen, unter dem Vorbehalte, daß dafür der Ausdruck (29) zu setzen ist, wenn die besprochenen Unstetigkeiten vorliegen. Dann ergibt sich

$$(30)\quad A_\mu = \frac{\int_0^l f\varphi_\mu dX + \sum_{p=0}^{p=m+n}\sum_{q=0}^{q=m+n} k_{pq}\int_0^l \varphi_\mu^{(2p)} f^{(2q)} dX - \left|\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r}\sum_{\beta=0}^{\beta=r} K_{\alpha\beta}\varphi_\mu^{(2\alpha)} f^{(2\beta)}\right|_0^l}{\int_0^l \varphi_\mu^2 dX + \sum_{p=0}^{p=m+n}\sum_{q=0}^{q=m+n} k_{pq}\int_0^l \varphi_\mu^{(2p)}\varphi_\mu^{(2q)} dX - \left|\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r}\sum_{\beta=0}^{\beta=r} K_{\alpha\beta}\varphi_\mu^{(2\alpha)}\varphi_\mu^{(2\beta)}\right|_0^l}$$

Damit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, erledigt. Erwähnt sei, daß sich die Entwicklungen mit unwesentlichen Änderungen ebenso durchführen lassen, wenn als Differentialgleichung der Normalfunktionen anstelle von (6) die Gleichung

$$(31)\qquad h\frac{d}{dX}\left(g\frac{d\varphi}{dX}\right) = -\lambda\varphi$$

vorliegt, in der h und g in dem Bereich $0 \leqq X \leqq l$ stetige Funktionen von X bedeuten. Aus (31) ergeben sich als Grundlagen der weiteren Betrachtungen die Beziehungen

$$(31\,a)\qquad (\lambda_\mu - \lambda_\nu)\int_0^l \frac{1}{h}\varphi_\mu\varphi_\nu dX = \left|g(\varphi_\mu\varphi_\nu' - \varphi_\nu\varphi_\mu')\right|_0^l$$

und, in leicht verständlicher symbolischer Schreibweise,

$$(31\,b)\qquad \left[h\frac{d}{dX}\left(g\frac{d}{dX}\right)\right]^{(n)}\varphi = (-\lambda)^n\varphi.$$

Auf Grund dieser Gleichungen geschieht die Berechnung der Koeffizienten A_μ in diesem allgemeineren Falle mit Hilfe derselben Überlegungen, die zur Lösung des spezielleren Problems geführt haben.

Den Ausgangspunkt der wichtigsten Probleme der mathematischen Physik bildet die Gleichung

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0,$$

oder, bei der Untersuchung vektorieller Größen, die Gleichung

$$\text{grad div } \mathfrak{U} - \text{rot rot } \mathfrak{U} + \lambda\mathfrak{U} = 0.$$

Wendet man allgemeine orthogonale Koordinaten an, so ergeben diese Gleichungen für die gesuchten Größen, bzw. Vektorkomponenten,

Digitized by Google

Differentialgleichungen von der Form (31), wenn diese Größen nur von einer Koordinate abhängen, wenn es sich also um ein eindimensionales Problem handelt. Die vorgetragenen Überlegungen liefern somit die Lösung einer großen Zahl von Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Physik.

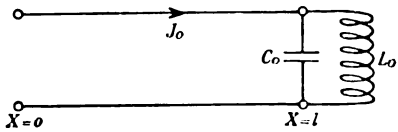


Fig. 1.

4. Ein Beispiel aus der Technik der elektrischen Arbeitsübertragung. Eine Leitung, die am Ende durch Apparate von der Kapazität C_0 und der Induktivität L_0 belastet ist, und die den überall gleichen Strom J_0 führt, werde plötzlich (zur Zeit $T = 0$) am Anfange $X = 0$ unterbrochen.

Hier wird die Grenzbedingung in $X = 0$

$$\varphi_\nu(0) = 0, \tag{32a}$$

in $X = l$

$$\varphi_\nu(l) = \varphi_\nu'(l)\left[\frac{\alpha}{l\lambda_\nu} - \beta l\right] \tag{32b}$$

mit

$$\alpha = \frac{Ll}{L_0} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{C_0}{Cl}. \tag{32c}$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir kurz

$$\gamma_\nu = l\sqrt{\lambda_\nu} \tag{32d}$$

schreiben, für die Eigenwerte die transzendente Gleichung[1])

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\alpha - \beta\gamma^2}{\gamma}. \tag{32e}$$

Über die Lage ihrer Wurzeln verschafft man sich durch eine Zeichnung schnellen Überblick. Man trägt über der Abszisse γ sowohl die Zweige der Funktion $\operatorname{tg}\gamma$ als auch die Hyperbel $\frac{\alpha - \beta\gamma^2}{\gamma}$ auf. Die Schnittpunkte der Hyperbel mit jenen Zweigen bestimmen die Wurzeln γ_ν von (32e); von ihnen braucht man aus Gründen der Symmetrie nur die positiven zu berücksichtigen. Man kann leicht zeigen, daß weder rein imaginäre, noch komplexe Wurzeln von (32e) vor-

1) Grenzbedingungen, die auf transzendente Gleichungen der Form $\operatorname{tg}\gamma = R(\gamma)$ führen (R eine rationale Funktion), sind in der Literatur wiederholt in speziellen Fällen in Betracht gezogen worden. Man hat sich aber stets mit der Berechnung der Eigenwerte λ_ν begnügt; auf die Koeffizientenberechnung zur Darstellung willkürlicher Anfangszustände ist dagegen nicht eingegangen worden; vgl. Abraham, Enzyklop. d. math. Wiss. V, 18, Nr. 8, S. 27.

Digitized by Google

kommen[1]), daß also die Zeichnung wirklich sämtliche Wurzeln ergibt. Die Zeichnung lehrt sofort, daß von $\nu = 2$ ab

$$\gamma_\nu = \frac{(2\nu - 3)\pi}{2} + \varepsilon_\nu \tag{33}$$

ist, wo ε_ν kleiner als 90^0 ist und mit wachsender Ordnungszahl ν beliebig klein wird.

Die Grenzbedingungen liefern außerdem die Beziehung (für $\mu \gtrless \nu$)

$$\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu dX = \left[-\frac{l}{\alpha} \varphi_\mu \varphi_\nu - (\varphi'_\mu \varphi_\nu + \varphi'_\nu \varphi_\mu) \frac{\beta l^2}{\alpha} - \frac{\beta^2 l^3}{\alpha} \varphi'_\mu \varphi'_\nu \right]_{X=l}.$$

Die hier darzustellende Funktion $f(X)$ ist gegeben durch

$$f(X) = 0 \text{ für } X = 0,$$
$$f(X) = J_0 \text{ für } 0 < X \gtrless l;$$

f erleidet also an der Grenze $X = 0$ einen Sprung.

Die weitere Rechnung ergibt schließlich den Strom

$$J = J_0 \{ W(X - T) + W(X + T) \} \tag{34a}$$

und die Spannung

$$V = J_0 \{ W(X - T) - W(X + T) \}. \tag{34b}$$

Darin ist

$$W(X) = \sum_\nu \frac{\sin \gamma_\nu \frac{X}{l}}{\gamma_\nu + \sin \gamma_\nu \cos \gamma_\nu + 2\beta \gamma_\nu \cos^2 \gamma_\nu}. \tag{34c}$$

Ist α klein und β groß gegen 1, das heißt, sind die Kapazität und die Induktivität der angeschlossenen Apparate beträchtlich im Vergleich zu den entsprechenden Größen der Leitung, so ist angenähert

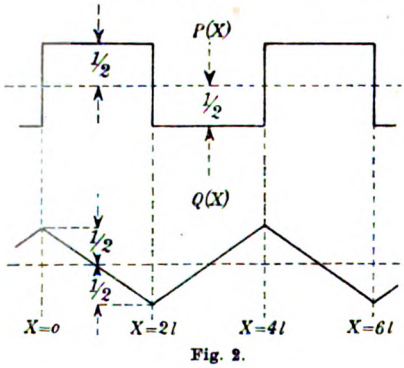


Fig. 2.

$$W = \frac{\sin \gamma_1 \frac{X}{l}}{\gamma_1 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 + 2\beta \gamma_1 \cos^2 \gamma_1} + P(X) + \frac{X}{\beta l} Q(X). \tag{34d}$$

Darin sind $P(X)$ und $Q(X)$ periodische Funktionen mit der Periode $4l$ von der in Fig. 2 angegebenen Form.

Bringt man noch die früher erwähnte Korrektur wegen der Dämpfung an, so ergibt sich, daß die auf Grund der Formeln (34a) bis (34d) gezeichneten Strom- und Spannungskurven mit den experimentell aufgenommenen gut übereinstimmen.

1) Vgl. z. B. K. W. Wagner, Phys. Z. **10**, 1909, S. 865, Nr. 4a, Absatz d und e.

Digitized by Google

5. Zusammenfassung. Zahlreiche Probleme aus der Physik und Technik, von denen neben Wärmeleitungs- und Schwingungsproblemen besonders das Problem der Fortpflanzung des elektrischen Stromes auf Leitungen und Kabeln erwähnt sei, führen auf die Aufgabe, *eine willkürlich angenommene Funktion durch eine Reihe gegebener Funktionen darzustellen.* Jede dieser sogenannten Eigen- oder Normalfunktionen stellt eine durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete räumliche Verteilung der gesuchten physikalischen Größe (Temperatur, Schwingungsweite, elektrischer Strom, ...) dar; bei Schwingungsproblemen z. B. entspricht sie einer der *Eigenschwingungen* des Systems. Mathematisch ist die Eigenfunktion φ durch ihre Differentialgleichung und die Grenzbedingungen bestimmt. Bekannt ist die Entwicklung einer willkürlich gegebenen Funktion nach Eigenfunktionen für den Fall, daß an den Grenzen eine der Bedingungen

$$\varphi = 0; \quad \varphi' = 0; \quad \varphi = a\varphi' \tag{35}$$

besteht. Hier werden die Eigenfunktionen orthogonal, und es gilt die Fouriersche Formel für die Bestimmung der Koeffizienten der Reihenentwicklung.

Wichtige Probleme der Technik führen jedoch auf *Grenzbedingungen, in denen der die Ordnungszahl der Eigenschwingungen bestimmende Parameter λ vorkommt*; dann sind die Eigenfunktionen im allgemeinen nicht mehr orthogonal, und das Verfahren von Fourier versagt. Wenn ein in λ linearer Faktor auf der linken Seite der letzten Gleichung (35) hinzukommt, so können die Koeffizienten nach einer von Rayleigh angegebenen Erweiterung des Fourierschen Verfahrens berechnet werden.

In der vorliegenden Untersuchung wird dieses Verfahren auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, in welchem auf jeder Seite der letzten Gleichung (35) ein Polynom in λ von beliebigem Grade auftritt. Die Theorie umfaßt hiermit *alle diejenigen der vorhin genannten Probleme, bei denen der Zwang auf die Enden durch irgendein Gebilde mit einer beliebigen endlichen Anzahl von Freiheitsgraden ausgeübt wird.* Bei einem schwingenden mechanischen Systeme entspricht z. B. ein solcher Zwang der Verbindung der Enden mit einem aus Federn und trägen Massen zusammengesetzten Gebilde, bei der elektrischen Drahtleitung der Verbindung der Enden mit Induktionsspulen und Kondensatoren in beliebiger Schaltung.

Digitized by Google

Über die Liouvillesche Identität.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

1. Die von Liouville[1]) gefundene merkwürdige Identität

$$(x+y)^4+(x+z)^4+(x+u)^4+(y+z)^4+(y+u)^4+(z+u)^4$$
$$+(x-y)^4+(x-z)^4+(x-u)^4+(y-z)^4+(y-u)^4+(z-u)^4$$
$$=6(x^2+y^2+z^2+u^2)^2$$

läßt sich in der folgenden Weise verallgemeinern:

Bilden wir aus den $3k+1$ *Veränderlichen*

$$a_0, a_1, \ldots, a_{3k}$$

alle Biquadrate von der Gestalt

$$(a_0 \pm a_1 \pm \cdots \pm a_k)^4,$$

indem wir die Vorzeichen $\pm$ *in jeder möglichen Weise variieren und statt*

$$a_0, a_1, \ldots, a_k$$

alle Kombinationen $(k+1)$-ten Grades der vorgelegten $3k+1$ Veränderlichen einsetzen. Die Summe[2])

$$\sum_{a_0 \cdots a_{3k}}^{\left(2^k\binom{3k+1}{k+1}\right)} [a_0 \pm a_1 \pm \cdots \pm a_k]^4 \tag{1}$$

dieser Biquadrate ist gleich

$$2^k\binom{3k}{k}(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_{3k}^2)^2. \tag{2}$$

Es ist nämlich

$$(a_0+a_1+\cdots+a_k)^4 = a_0^4+6a_0^2a_1^2+\cdots+4a_0^3a_1+12a_0^2a_1a_2$$
$$+24a_0a_1a_2a_4+\cdots,$$

wo wir von jedem Typus nur ein Glied ausgeschrieben haben. Variieren wir hier die Vorzeichen von $a_0, a_1, \ldots, a_k$ und addieren die erhaltenen 2^k Biquadrate, so ist ihre Summe gleich

$$2^k a_0^4 + 6\cdot 2^k a_0^2 a_1^2 + \cdots, \tag{3}$$

während die Glieder, die ungerade Potenzen enthalten, wegfallen.

Setzen wir nun für

$$a_0, a_1, \ldots, a_k$$

1) Die Liouvillesche Formel findet sich in Lebesgue, Exercices d'Analyse numérique, Paris 1859 (Leiber et Faraguet), S. 118.

2) Diese Bezeichnung für die betrachtete Summe stammt von Herrn A. Fleck, Mathematische Annalen, Bd. 64 (1907), S. 563.

Digitized by Google

je $k+1$ der gegebenen $3k+1$ Veränderlichen, so wird a_0^4 in $\binom{3k}{k}$ Summen von der Gestalt (3) vorkommen und das Produkt $a_0^2 a_1^2$ in $\binom{3k-1}{k-1}$ Summen. In (1) hat also a_0^4 den Koeffizienten

$$2^k \binom{3k}{k}$$

und $a_0^2 a_1^2$ den Koeffizienten

$$6 \cdot 2^k \binom{3k-1}{k-1} = 2^{k+1} \frac{3k}{k} \binom{3k-1}{k-1} = 2^{k+1} \binom{3k}{k},$$

also in der Tat denselben Koeffizienten wie in (2).

2. *Für $m \geqq 3$ können die positiven ganzen Zahlen k und n nie so bestimmt werden, daß*

$$\sum_{a_0 \cdots a_n}^{\left(2^k \binom{n+1}{k+1}\right)} [a_0 \pm a_1 \pm \cdots \pm a_k]^{2m} = C(a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2)^m, \tag{4}$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Wir können den Beweis dieser Behauptung auf den Fall $m = 3$ reduzieren. Denn gibt es für irgend ein m eine Formel von der Gestalt (4), so liefert die Operation

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial a_n^2}$$

auf beide Seiten angewandt eine ähnliche Formel für $m-1$.

Wenn $m = 3$, so haben wir

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)^6 = a_0^6 + 15 a_0^4 a_1^2 + 90 a_0^2 a_1^2 a_2^2 + \cdots$$

Demnach sind in

$$\sum_{a_0 \cdots a_n}^{\left(2^k \binom{n+1}{k+1}\right)} [a_0 \pm a_1 \pm \cdots \pm a_k]^6$$

die Koeffizienten von a_0^4, $a_0^4 a_1^2$, $a_0^2 a_1^2 a_2^2$ gleich

$$2^k \binom{n}{n-k}, \qquad 15 \cdot 2^k \binom{n-1}{n-k}, \qquad 90 \cdot 2^k \binom{n-2}{n-k}.$$

Soll also die Formel (4) bestehen, so muß im Falle $n = k = 1$

$$\binom{1}{0} = 5 \binom{0}{0}$$

sein, was unmöglich ist; für $n > 1$ aber muß

$$\binom{n}{n-k} = 5 \binom{n-1}{n-k} = 15 \binom{n-2}{n-k},$$

also

$$n = 5k, \qquad n - 1 = 3(k-1)$$

sein, was für kein positives k eintreffen kann.

Budapest, den 25. April 1911.

Digitized by Google

Zur Gerbert-Frage.

Von M. Simon in Straßburg.

In den Comptes rendus von 1839—43 hat M. Chasles die Einführung der Ziffern mit Stellenwert den Arabern ab- und Gerbert, dem Papst Silvester II., zugesprochen. Er stützt sich dabei auf die in der sogen. Geometrie des Boëtius vorkommenden „Apices", welche auf dem Abacus, der Rechentafel, als Ziffern verwandt werden und mit den Gobar- oder Staubziffern der Westaraber übereinstimmen. Olleris, der im Auftrage des lokalpatriotischen Komitees die Werke Gerberts 1867 herausgab, folgte als Laie und Franzose selbstverständlich der Autorität eines so bedeutenden Geometers, zumal da noch nicht bekannt war, wie leicht Chasles zu täuschen war. O. sagt „Ihm und nicht den Arabern schuldet Europa sein Zahlsystem und seine Zahlzeichen. Sein Unterricht und seine Arbeiten haben den Geistern einen Aufschwung gegeben, der nicht mit seinem Tode endigen sollte." Als nun auch M. Cantor die Echtheit der Geometrie des Boëtius verfocht und für die Ansicht Chasles', daß Gerbert den Arabern nichts verdanke, die Wucht seiner Persönlichkeit einsetzte, wurde diese Ansicht herrschend. In der dritten Auflage seiner Vorlesungen vom Jahre 1907 hat Cantor, den Gründen Heibergs weichend, die Fälschung des Boëtius-Manuskripts zugestanden, aber die Konsequenz, daß die „Apices" von Gerbert bei seinem Aufenthalt in Spanien den Arabern entlehnt seien, nicht gezogen. — Gerbert selbst spricht von den Apices gar nicht und von der Einrichtung des Abacus in einer Weise, die unverständlich wäre ohne den „liber abaci" des Bernelinus, der sowohl die 9 Ziffern (denn die Null, welche auf dem Abacus überflüssig ist, fehlt) als auch die Einrichtung der Tafel genau beschreibt. Dabei ist die Bestreuung der Tafel „glauco pulvere", d. h. nicht mit blauem, sondern mit hell(grau)em Sande zu beachten. Richer, nächst den eignen Briefen die wichtigste Quelle über Gerbert, sagt (Monum. Germ. sript., Richeri Hist. libri 4) Buch III cp. 54 p. 104 „In geometria vero non minor in docendo labor expensus est. Cujus introductioni abacum, id est tabulam dimensionibus aptam, opere scutarii effecit. Cujus longitudini in 27 partibus diductae novem numero notas omnem numerum significantes disposuit. Da Richer sicher und Bernelinus wahrscheinlich zu den Schülern G.s in Reims gehörten, so ist damit sein Gebrauch der Apices gesichert. Daß er mit Boëtius ganz genau vertraut war, verstand sich für den Scholastikus

Digitized by Google

damals wie lange vorher und noch lange nachher von selbst, das zeigt auch der von Richer erhaltene Gang seines Unterrichts, der beinahe typisch für die Artistenfakultät wurde und insbesondere die für seine Karriere entscheidende Disputation mit Orthric, dem Scholastikus von Magdeburg vor Otto II. und den Kaiserinnen zu Pavia.

Alle die Argumente, mit denen Gerbert dem Kaiser und den Kaiserinnen imponierte, sind aus Boëtius entlehnt. Aber gerade die 4 artes des quadrivium machen eine Ausnahme. Das Kloster Aurillac gehörte zum Einflußbereich von Clugny, den Boëtius traktierte man dort sicher gründlich, aber der Abt, der in G. einen guten künftigen Scholastikus sah, bat den Grafen Borel von Urjel, den Herrscher der *spanischen* Mark, als dieser gerade Sündenwäsche im Kloster hielt, den Jüngling zur Vervollkommnung in den *exakten Wissenschaften* mit nach Barcelona zu nehmen. Dieser übergab ihn dem Bischof von Vich, Hatto (Richer l. c. p. 100) „Apud quem in mathesi plurimum et efficaciter studuit." Drei volle Jahre blieb er dort von 967—970, der Epoche des gewaltigen Abderrachman III. und seines Sohnes Al Hakim (der Weise), der überall Bibliotheken und Universitäten gründete. Und wäre er auch nicht in der Wunderstadt Cordova mit der Bibliothek von 600 000 Bänden gewesen, vor der Schwelle der spanischen Mark lag Zaragoza, und was von der Intoleranz der Araber gefabelt wird, ist eine Verleumdung vom Schlage der Verbrennung der Bibliothek Alexandrias durch Omar. Dort in Spanien mußte sich der strebsame Jüngling mit arabischem Wissem vollsaugen.

Den nächsten Beweis liefert wieder Richer. G. begleitete den Grafen und den Bischof nach Rom und erregte durch seine Kenntnisse in Musik und Astronomie „quae tunc penitus in Italia ignorabantur" das Interesse des Papstes Johann XIII., der ihn in Rom behielt und dem Kaiser Otto dem Großen vorstellte. Was Boëtius in Musik (d.h. etwa Kontrapunkt) und Astronomie zu geben hatte, wurde auch in Italien nicht ignoriert. Die Vorliebe für Astronomie hat G. sein ganzes Leben hindurch begleitet. Richer widmet seinem Unterricht in Astronomie mehr Raum als allen übrigen Fächern zusammen und berichtet, daß er die Schüler zu eigenen Beobachtungen der Gestirne anhielt, was ebenso wie die Instrumente den arabischen Einfluß bekundet. Das Volk hat angesichts seiner Sternenbeobachtungen, seiner chemischen Experimente, seiner Vorliebe für die „heidnische" Literatur usw. nie an seiner Arabisierung gezweifelt.

Eine selbständige Erfindung der Apices ist nie behauptet und angesichts der geringen produktiven Begabung Gerberts ausgeschlossen. Wäre die Hypothese Woepkes, die ja auch Cantor so ziemlich ak-

Digitized by Google

zeptiert, richtig, daß nämlich etwa im 2. Jahrh. n. Chr. indische Rechnung nach Alexandrien gedrungen und von dort sich direkt nach Italien und zu Boëtius verbreitet hätte, so würde es unbegreiflich sein, daß vom 6. bis 10. Jahrh. und selbst bei den gleichzeitigen Schriftstellern über den Abacus jede Spur der Ziffern fehlt. Woepkes Hypothese war ein Notbehelf, da er die Geometrie des Boëtius für echt hält; nie hätte sie ein Arabist wie Woepke aufgestellt, sobald die Fälschung erwiesen. Und es gibt für die Fälschung kaum einen besseren Beweis als das Fehlen aller Spuren. Auf die Organisation der höheren Schulen des zu Ende gehenden römischen Kaiserreichs und des frühen Mittelalters hat außer Quintilian keiner solchen Einfluß gehabt wie Boëtius (vgl. die Preisschrift von Specht und M. Roger: L'enseignement des lettres class. d'Auson à Alcuin 1905), und es ist geradezu ausgeschlossen, daß eine solche Errungenschaft bis auf Gerbert verloren gegangen wäre.

Wenden wir uns zur Geometrie Gerberts; an sich ein dürftiges Machwerk, ist doch die Einleitung nicht ohne Interesse. Daß sie von Boëtius abhängt, sagt G. selbst, und das zeigt auch die nach Boëtius (Nikomachos) gegebene Stelle aus Platons Timaios; aber G. ist meines Wissens der erste, abgesehen vielleicht von „Die Schlüssel der Wissenschaften" des Jûsuf al Kâtib, der in den Definitionen die Reihenfolge des Euklid umkehrt, um vom Körper auszugehen: „quod communi sensui notius est". Im Kapitel 22 kommt zweimal halidade vor, aber da dies Kapitel in der Münchner Handschrift fehlt, laß ich es aus dem Spiele, denn mediclinium bedeutet dasselbe und das *Quadrat auf der Rückseite des Astrolabium* und seine Benutzung zur Höhenmessung ist, vgl. Eilhard Wiedemann, Erlanger Sitzungsberichte 1909 Beitrag 18, durchaus arabisch.

Der ganze mittlere Teil der Geometrie, Kap. 18—40, von dem Cantor 1907 sagt, er habe bisher noch nicht zurückgeführt werden können, ist durch und durch arabisch; er enthält fast dieselben Methoden, welche man bei Wiedemann l. c. unter Nr. 17 und 18 seiner so überaus dankenswerten Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften findet. Nun hat Bubnow, der 1899 eine kritische Ausgabe der Werke Gerberts edierte, diesen ganzen Teil für „spurius" erklärt, aber a) ist Bubnow wohl in eben dem Maße zu viel kritisch als Olleris zu wenig und b) stammt dieser Teil aus derselben Zeit wie das übrige. Es hätte jedenfalls nahegelegen, die arabischen Quellen auf diese Aufgaben hin untersuchen zu lassen.

Was nun den Einfluß Gerberts auf die exakten Wissenschaften betrifft, so hat ihn Cantor erheblich überschätzt, weil er den der Araber unterschätzt hat. Der frische Wind, der, wie Cousin sagt, um

Digitized by Google

die Mitte des 11. Jahrh. zu wehen beginnt, stammt aus Spanien und von den Arabern, er geht über die großen Scholastiker Erigyna, Abälard, Duns Scotus, Albertus Magnus, Thomas von Aquino und besteht eben in dem Eindringen arabischer Wissenschaft. Gerbert hat seine Manneszeit fast ausschließlich der Politik und seinem Ehrgeiz gewidmet, als wichtiger Parteigänger für die Sachsenkaiser und Hugo Capet, im Kampf um das Erzbistum Reims und als Papst, wo er als Nachfolger Gregors V. und Vorläufer Gregors VII. die Weltmachtstellung des Papsttums in Angriff nimmt. In Italien konnte er sich nur durch das Schwert Ottos III. halten, von einer reorganisierenden Wirkung konnte bei dem Widerwillen, den der Ausländer und Zauberer der italischen Geistlichkeit einflößte, keine Rede sein, und in der übrigen Welt ist wenig oder nichts zu spüren. Damit soll nicht geleugnet sein, daß er als hervorragender Scholastikus in Reims einen oder den anderen Schüler für die Wissenschaft begeistert hat, aber sicher nicht mehr als der für die Musikgeschichte so wichtige Hermannus Contractus, der sich der Zeit nach unmittelbar an Gerbert anschließt, und zu dessen Zeit die arabische Wissenschaft schon in das Kloster des heiligen Pirmin eingezogen war. Von „Apices" ist aber erst im 12. Jahrh. wieder die Rede. Eine wirklich neue der christlichen Kultur angehörende Ära des Erkenntnisproblems beginnt eigentlich erst mit Cusanus. Alle die „Größen", incl. Regiomontan, sind in ihren Leistungen völlig von den Arabern abhängig. Regiomontans Abhängigkeit von Bathâni hat noch vor der meisterhaften Herausgabe des „zig" durch Nallino-Schiaparelli der so früh geschiedene von Braunmühl nachgewiesen; Roger Bacons von Al Haitam und anderen Arabern R. Wiedemann und Seb. Vogl. Beiläufig gesagt wäre es an der Zeit, den Wilsonschen Satz an Abû ʿAli al Basri zurückzugeben. Die Geometrie des Jordanus Nemorarius ist zum Teil wörtlich vom liber trium fratrum der Banû Šakir abgeschrieben (vgl. M. Curtze), über die Buchstabenrechnung lese man Woepke, Journal asiat. 1853, seine Statik hat ihre Quelle bei dem wahrhaft großen Tabit ibn Qorra, für seine stereographischen Projektionen weise ich auf die *Chronologie* Bêrûnîs, Ausgabe von Sachau p. 357—360, wo sich die winkeltreue sog. Mercatorprojektion 600 Jahre vor Mercator und immer noch 500 Jahre vor Giovanni Vespucci findet. Und selbst von Lenardo Pisano bleibt nicht viel übrig, wenn man das abzieht, was Harizmi, Alchaijami, Abû'l Wafâ (Diophant und Teilungsaufgaben) und andern islamischen Autoren gehört.

Um es kurz zu sagen, die zweite, die große Renaissance, danken wir ausschließlich den Arabern und nicht nur den spanischen. Ich rechne

Digitized by Google

die sog. Karolingische Renaissance, welche der bornierten Unterdrückung der „heidnischen" römischen Literatur ein Ende macht und auch nicht frei vom Islam ist — denn sie setzt etwa mit der Schlacht von Tours ein — als die erste. Eine ehrliche Maklerrolle kommt den spanischen Juden wie Ibn Gebirol (Avicebron), Maimonides und dem kühnsten Interpretator des Averroës, dem Erfinder des Jakobstabs, Levi ben Gerschum, zu.

Straßburg, E., den 22. März 1911.

Über die Zerlegung positiver ganzer Zahlen in positive Kuben.

Von EDMUND LANDAU in Göttingen.

Herr Wieferich[1]) hat zuerst (abgesehen von einer geringfügigen, nur auf endlich viele Zahlen bezüglichen und leicht ausfüllbaren[2]) Lücke) bewiesen, daß jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kubikzahlen darstellbar ist. Unter Anwendung seiner Methode und der modernen Primzahltheorie bewies ich[3]) darauf, daß von einer gewissen Stelle an sogar stets höchstens acht Kuben genügen. Aus der Primzahltheorie verwandte ich dabei den Satz: *Wenn p_n die n-te Primzahl der Form $3u+2$ bezeichnet, so ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1. \tag{1}$$

Ein Blick auf meinen alten Beweis lehrt, daß ich die Relation (1) nur benutze, um sagen zu können: Es liegt

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

unterhalb einer gewissen Schranke, die sich sehr nahe bei 1 befindet, nämlich

$$\sqrt[90]{\tfrac{5}{2}} = 1{,}004\cdots.$$

---

1) *Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt* [Mathematische Annalen, Bd. LXVI (1909), S. 95—101].

2) Vgl. Kempner, *Bemerkungen zum Waringschen Problem* [demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinend] und *Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen* [Dissertation, Göttingen (1911)].

3) *Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie* [Mathematische Annalen, Bd. LXVI (1909), S. 102—105]; *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin, 1909)], Kap. XXXVI [S. 555—559].

Digitized by Google

Die Ausarbeitung eines von den transzendenten Hilfsmitteln, die zu (1) führen, freien Beweises von

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} < \sqrt[90]{\tfrac{3}{2}}$$

bezw. von einer durch Modifikation der übrigen Schlüsse als ausreichend erkennbaren weniger scharfen Abschätzung[1]) würde natürlich wegen der Länge einer solchen Beweisanordnung kein erhebliches Interesse bieten.

Andererseits kann ich unter Vermeidung der Primzahltheorie meinen genannten Satz *[Nur endlich viele positive ganze Zahlen sind nicht in acht Kuben* $\geqq 0$ *zerlegbar]* auch heute nicht beweisen. Wohl aber fiel mir kürzlich auf, daß man durch eine kleine Abänderung des Beweisanfanges ohne Primzahltheorie ganz schnell und elementar Teile jenes Satzes beweisen kann, nämlich sowohl den Satz:

Jede zu 10 *teilerfremde Zahl von einer gewissen Stelle an ist in acht Kuben* $\geqq 0$ *zerlegbar,*

als auch genau diesen Wortlaut, in dem 10 durch das Produkt von zwei beliebigen festen verschiedenen Primzahlen der Form $3u + 2$ ersetzt ist.

Das will ich hier für einen Leser, dem aus den genannten Arbeiten nichts bekannt zu sein braucht, auseinandersetzen.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es seien* p *und* q *zwei verschiedene Primzahlen. Dann haben bei gegebenem* $\delta > 0$ *die Ungleichungen*

$$T < p^x q^y < (1 + \delta) T$$

für alle hinreichend großen T, *d. h. für* $T \geqq T_0 = T_0(p, q, \delta)$, *eine Lösung in positiven ganzen Zahlen* x, y.

Anders ausgedrückt: *Wenn die Zahlen* $p^x q^y$ *mit ganzen positiven* x, y *der Größe nach geordnet mit* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *bezeichnet werden, so ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1.$$

Beweis: Da $\frac{\log p}{\log q}$ irrational[2]) ist, so gibt es bekanntlich bei gegebenem $\delta > 0$ ein positives Wertepaar x_0, y_0 derart, daß

$$0 < x_0 \log p - y_0 \log q < \log(1 + \delta),$$

d. h.

$$1 < \frac{p^{x_0}}{q^{y_0}} < 1 + \delta$$

1) Die betreffende Konstante würde immerhin recht nahe an 1 liegen.

2) Aus $\frac{\log p}{\log q} = \frac{A}{B}$, wo A und B ganz und > 0 sind, würde ja $p^B = q^A$ folgen.

Digitized by Google

ist, ebenso ein positives Wertepaar x_1, y_1 derart, daß

$$1 < \frac{q^{y_1}}{p^{x_1}} < 1 + \delta$$

ist.

Also gibt es zu jeder Zahl

$$z_{\bar{n}} = p^{\bar{x}} q^{\bar{y}},$$

wo $\bar{x} > x_1$ oder $\bar{y} > y_0$ oder beides gilt, eine größere Zahl der Menge z_n, deren Quotient durch jene $< 1 + \delta$ ist; in der Tat leistet dies für $\bar{x} > x_1$ die Zahl

$$z_{\bar{n}} \frac{q^{y_1}}{p^{x_1}} = p^{\bar{x} - x_1} q^{\bar{y} + y_1},$$

für $\bar{y} > y_0$ die Zahl

$$z_{\bar{n}} \frac{p^{x_0}}{q^{y_0}} = p^{\bar{x} + x_0} q^{\bar{y} - y_0}.$$

Damit ist offenbar, da nur bei endlich vielen $z_{\bar{n}}$ sowohl $\bar{x} \leqq x_1$ als auch $\bar{y} \leqq y_0$ ist, der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: *Es sei n eine positive ganze Zahl und $\varphi(n)$ nicht durch* 3 *teilbar. Dann ist jede zu n teilerfremde Zahl kubischer Rest modulo n.*

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß aus

$$a^3 \equiv b^3 (\text{mod. } n), \quad (a, n) = 1, \quad (b, n) = 1 \tag{2}$$

die Kongruenz

$$a \equiv b (\text{mod. } n)$$

folgt. Denn dann repräsentieren die Kuben der Elemente eines Repräsentantensystems der $\varphi(n)$ teilerfremden Restklassen wiederum diese Restklassen. Nun folgt aus (2), wenn zwei positive ganze Zahlen x und y auf Grund der Gleichung

$$3x = \varphi(n) y + 1$$

bestimmt werden,

$$a \equiv a^{\varphi(n) y + 1} = a^{3x} \equiv b^{3x} = b^{\varphi(n) y + 1} \equiv b (\text{mod. } n).$$

Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3: *Zu jeder ganzen Zahl n gibt es ein ganzes γ (also auch ein ganzes γ aus der Reihe* 0 *bis* 95) *derart, daß $n - \gamma^3$ modulo* 96 *einen der Reste*

6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 66, 78, 84

läßt.

Beweis: Da jede Zahl modulo 3 kubischer Rest und (wegen $\varphi(32) = 16$ nach Hilfssatz 2) jede ungerade Zahl modulo 32 kubischer Rest ist, so ist jede ungerade Zahl modulo 96 kubischer Rest. Der Hilfssatz 3 ist also für jede der 48 ungeraden Restklassen modulo 96 richtig, da sogar z. B. $n - 6$ stets $\equiv \gamma^3$ (mod. 96) ist. Für die 12

Digitized by Google

im Satz vorkommenden geraden Restklassen leistet $\gamma = 0$ das gewünschte. Er beweist sich für jede der 36 übrigen Restklassen durch Verifikation der folgenden Tabelle. Man nehme

$\gamma = 2$ für $n \equiv 14, 20, 26, 32, 38, 44, 56, 62, 68, 74, 86, 92;$
$\gamma = 4$ für $n \equiv 70, 76, 82, 88, 94, 4, 16, 22, 28, 34, 46, 52;$
$\gamma = 6$ für $n \equiv 42, 72, 90;$
$\gamma = 8$ für $n \equiv 50, 80, 2;$
$\gamma = 10$ für $n \equiv 58, 64, 10;$
$\gamma = 14$ für $n \equiv 8;$
$\gamma = 18$ für $n \equiv 0;$
$\gamma = 22$ für $n \equiv 40.$

Hilfssatz 4: *Jede positive Zahl, die modulo* 96 *einer der im Hilfssatz* 3 *genannten zwölf Restklassen angehört, hat die Gestalt* $6(A^2+B^2+C^2)$.

Beweis: Der sechste Teil der Zahl ist modulo 16 kongruent zu einer der Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14,

und die positiven Zahlen dieser zwölf Restklassen sind bekanntlich nach Gauß in drei Quadrate zerlegbar.

§ 2.

Satz 1: *Alle hinreichend großen zu* 10 *teilerfremden ganzen Zahlen sind in höchstens acht positive Kuben zerlegbar.*

Allgemeiner:

Satz 2: *Es seien* p *und* q *zwei verschiedene fest gegebene Primzahlen der Form* $3u+2$. *Alle hinreichend großen zu* pq *teilerfremden ganzen Zahlen sind in höchstens acht positive Kuben zerlegbar.*

Beweis: Ich setze

$$\delta = \sqrt[9]{\tfrac{3}{2}} - 1;$$

dann sind nach dem Hilfssatz 1 für alle hinreichend großen T die Ungleichungen

$$T < p^x q^y < \sqrt[9]{\tfrac{3}{2}}\, T,$$

d. h.

$$T^3 < p^{3x} q^{3y} < \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}\, T^3,$$

also ($T = \sqrt[9]{\frac{g}{12}}$ gesetzt und die Betrachtung auf ganze g beschränkt) für alle hinreichend großen ganzen g, d. h. für $g \geqq g_0 = g_0(p, q)$, die Ungleichungen

$$\sqrt[3]{\tfrac{g}{12}} < p^{3x} q^{3y} < \sqrt[3]{\tfrac{g}{8}}$$

in positiven ganzen Zahlen x, y lösbar; alsdann ist, wenn

$$p^x q^y = r$$

Digitized by Google

gesetzt wird,

$$\sqrt[3]{\frac{g}{12}} < r^3 < \sqrt[3]{\frac{g}{8}},$$

$$8r^9 < g < 12r^9. \tag{3}$$

Es sei nun $(g, pq) = 1$ und $g \geqq g_0$. Wegen

$$\varphi(r^3) \not\equiv 0 (\mathrm{mod.}\ 3)$$

ist g nach Hilfssatz 2 kubischer Rest modulo r^3. Es gibt also ein β derart, daß

$$0 < \beta < r^3 \tag{4}$$

und

$$g - \beta^3 = r^3 M \tag{5}$$

ist. Wegen (4) und (5) ist

$$g - r^9 < r^3 M < g,$$

also mit Rücksicht auf (3)

$$7r^9 < r^3 M < 12r^9,$$

$$7r^6 < M < 12r^6.$$

Es werde nun

$$M - 6r^6 = M_1 \tag{6}$$

gesetzt, so daß

$$r^6 < M_1 < 6r^6 \tag{7}$$

ist. Ich wähle (was nach der zweiten Hälfte von (3) und der ersten Hälfte von (7) möglich ist) ein $g_1 \geqq g_0$ so, daß für $g \geqq g_1$

$$M_1 \geqq 95^3$$

ist. Dann gibt es nach den Hilfssätzen 3 und 4 ein γ zwischen 0 und 95 derart, daß

$$M_1 - \gamma^3 = 6(A^2 + B^2 + C^2) \tag{8}$$

ist. Wegen (7) ist

$$A^2 + B^2 + C^2 < r^6,$$

also

$$|A| < r^3, \quad |B| < r^3, \quad |C| < r^3.$$

Aus (5), (6) und (8) folgt

$$\begin{aligned} g &= \beta^3 + r^3 M \\ &= \beta^3 + r^3(6r^6 + M_1) \\ &= \beta^3 + r^3(6r^6 + \gamma^3 + 6A^2 + 6B^2 + 6C^2) \\ &= \beta^3 + (r\gamma)^3 + (2r^9 + 6r^3A^2) + (2r^9 + 6r^3B^2) + (2r^9 + 6r^3C^2) \\ &= \beta^3 + (r\gamma)^3 + (r^3+A)^3 + (r^3-A)^3 + (r^3+B)^3 + (r^3-B)^3 + (r^3+C)^3 + (r^3-C)^3, \end{aligned}$$

womit, da alle Glieder rechts $\geqq 0$ sind, der Satz 2 und speziell der Satz 1 bewiesen ist.

Göttingen, den 24. Juni 1911.

Digitized by Google

Rezensionen.

H. E. Timerding. Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren im Text. VI u. 112 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 2,80.

Die vorliegende Arbeit gehört zu den „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, herausgegeben von F. Klein." Sie handelt von den Beziehungen der Mathematik zur Physik, und zwar werden zwei Hauptfragen beantwortet: Welche Probleme und Ziele erwachsen dem mathematischen Schulunterricht aus der Rücksicht auf die Bedürfnisse der Physik, und in welcher Weise wird die Physik durch einen vernünftig und zweckdienlich ausgestatteten mathematischen Unterricht beeinflußt? Die Grundlage der Untersuchung bilden die wichtigeren Lehrbücher der Physik; durch ihre Prüfung ermittelt der Verfasser diejenigen Aufgaben aus dem Pensum der Schulphysik, die der Mathematik als Hilfswissenschaft zur Lösung bedürfen.

Die Arbeit zerfällt in einen historischen und einen methodischen Teil. Im ersteren wird die Entwicklung der Mathematik, insbesondere der Infinitesimalrechnung in ihrer Beziehung zur Physik und die Entwicklung des physikalischen Lehrbuchs in mathematischer Beziehung behandelt. Der Verfasser gibt hochinteressante Aufschlüsse über die Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung; er erläutert an treffend gewählten Beispielen die wesentlichsten Infinitesimalmethoden, die den heute benutzten Methoden der Differential- und Integralrechnung voraufgegangen sind, und zwar 1. das Exhaustionsverfahren des Archimedes; 2. die Indivisibelnlehre, die zwar schon im Altertum bekannt, aber erst 1635 durch Cavalieri ihre zusammenfassende Darstellung gefunden hat; 3. das Approximationsverfahren von Huygens; 4. die Fluxionsrechnung von Newton; 5. die Differential- und Integralrechnung von Leibniz; daran schließt sich 6. der weitere Ausbau der Integralrechnung an der Hand physikalischer Probleme durch Abel, Jacobi, Fourier, Laplace, Green, Gauß, Dirichlet u. a.

Bei der Darstellung der Entwicklung des physikalischen Lehrbuchs erhält der Leser zugleich interessante Aufschlüsse über den Zustand der Physik zu verschiedenen Zeitperioden; die Bedeutung Galileis, der durch Vereinigung der experimentellen Grundlegung mit der mathematischen Methode das Fundament der wissenschaftlichen Physik legte, wird gewürdigt; der Einfluß des großen Newtonschen Werkes auf die Physiklehrbücher bis in die neueste Zeit dargelegt; vor allem wird an der Hand einer Reihe von Lehrbüchern (s'Gravesand 1721, Desaguliers 1725, Segner 1746, Tobias Mayer 1801, Ernst Gottfried Fischer 1805, Brettner 1828, Eisenlohr 1836 und 1870 u. a.) die Entwicklung der Schulphysik dargelegt; wir sehen, wie nach der naiven ex-

Digitized by Google

perimentellen Forschung des 18. Jahrhunderts, zu Beginn des 19. Jahrhunderts beim physikalischen Unterricht ein Überwuchern der mathematischen Methoden über die experimentelle Auffassung der wirklichen Vorgänge stattfindet, wie an Stelle des Versuchs die schematische Zeichnung tritt und sich die berüchtigte Kreidephysik entwickelt. Zugleich wird gezeigt, wie im Gegensatz zu diesem „in das mathematische Fahrwasser gelenkten Physikunterricht" sich in der Magnetik und Elektrik die vorwiegend experimentelle Betrachtung erhält und wie die technischen Anwendungen der Wärme bei den Dampfmaschinen und der Elektrizität, insbesondere auch die neuartigen Faradayschen Anschauungen zu einem mit reichlichen Experimenten unterstützten physikalischen Schulunterricht anregten, und wie endlich die Forderungen nach Einrichtung von Schülerübungen zu der neuesten Methode der Physik geführt haben, die jetzt noch in ihren Anfängen steckt.

In dem zweiten methodischen Teil des Buches wird an einzelnen typischen und wichtigen physikalischen Problemen und Methoden der Charakter der zugehörigen mathematischen Entwicklung behandelt; hierher gehört die Behandlung der Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung, die Fallgesetze, das mathematische Pendel, die Lehre vom Schwerpunkt und Trägheitsmoment, die barometrische Höhenmessung, die Wellentheorie und die Fernwirkungstheorie.

Um den übrigen reichhaltigen Gedankeninhalt des Buches nur andeutungsweise zu skizzieren, seien noch einige Kapitelüberschriften hergesetzt: Die Bedeutung der Zeichnung; Diagramme; geometrische Auffassungen des Unendlichkleinen; analytische Ersatzmittel der Infinitesimalrechnung; die Darstellung der Infinitesimalrechnung in den Physikbüchern; die Infinitesimalrechnung in der Schule. Das letztere Kapitel führt mitten hinein in die modernen Bestrebungen zur Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan der höheren Schulen; es wird gezeigt, daß eine Reihe von physikalischen Problemen zu ihrer Lösung ihrem Wesen nach der Infinitesimalrechnung bedürfen, und daß die Differential- und Integralrechnung die einfachste und bequemste Methode zu ihrer Lösung ist. Kein Leser wird ohne großen Gewinn das Buch aus der Hand legen.

Gr. Lichterfelde. Wilhelm Bahrdt.

J. Kleiber und **Siepert. Experimental-Physik und Chemie für die Oberstufe der höheren Mädchenbildungsanstalten** (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und Lyzeen). Unter Berücksichtigung der Lehrpläne vom 12. Dezember 1908 bearbeitet. Mit 421 Figuren im Text und 1 Tafel. IX u. 440 S. Berlin und München, R. Oldenbourg. *M* 4,25.

Zwei Drittel des Buchumfanges etwa enthalten das Pensum der Physik, ein Drittel das Pensum der Chemie für die Oberstufe höherer Mädchenbildungsanstalten. Der physikalische Teil unterscheidet sich von den anderen Kleiberschen Physikbüchern durch Weglassung der Übungsaufgaben und durch Einfügung von zahlreichen, meist quantitativen Schülerübungen; diese Neuerung wird sicherlich von allen Fachgenossen mit Freude begrüßt werden. Neu ist auch der „Rückblick" am Ende des physikalischen Teils, in dem über die Methode der Naturwissenschaften, über Hypothesen, die Gesetze von der Erhaltung der Energie und der Materie und über die mechanische Auffassung

Digitized by Google

der Naturerscheinungen allgemeine Betrachtungen angestellt werden, die freilich bisweilen den Widerspruch des Lesers hervorrufen. Der chemische Teil behandelt die allgemeine Chemie in der Einleitung und Metalle und organische Chemie im Hauptteil. Bei den chemischen Übungen im Anhang ist das Hauptgewicht auf die qualitative Analyse gelegt; diese einseitige Bevorzugung gegenüber andern für das Praktikum geeigneten Arbeitsgebieten wird manchem Widerspruch der Fachgenossen begegnen. Die einleitenden Kapitel über Atom- und Molekulargewichtsbestimmungen, elektrolytische Dissoziation und Lösungstension würden bei ausführlicherer Darstellung gewinnen; in ihrer Kürze enthalten sie manche Unklarheiten.

Gr. Lichterfelde. WILHELM BAHRDT.

J. Kleiber. Experimental-Physik für die Unterstufe. Nach dem neuen Kgl. Bayr. ministeriellen Lehrplane bearbeitet. 2. Auflage. Mit 347 Figuren, 4 Spektralbildern, zahlreichen Schülerübungen und Musterbeispielen. VII u. 224 S. München und Berlin 1910, R. Oldenbourg. ℳ 2,50.

Daß von diesem Kleiberschen Buch schon jetzt eine zweite Auflage erforderlich ist — die erste erschien im Jahre 1908 — beweist die freundliche Aufnahme desselben sowohl in den bayrischen als auch in andern deutschen Schulen. Die zweite Auflage ist im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der ersten, weist jedoch im Vergleich mit ihr als wichtigen Fortschritt eine Zusammenstellung von Schülerübungen aus der Lehre vom Magnetismus, von der Elektrizität, dem Galvanismus, der Optik und der Mechanik auf. Diese Übungen sollen nach den bayrischen Lehrplänen die Grundlage des physikalischen Unterrichts sein; sie sind daher von allen Schülern und in „gleicher Front" auszuführen. Die Übungen sind entsprechend der Unterrichtsstufe meist qualitativer Art; sie enthaltun recht wertvolle Hinweise für den Lehrer, der solche Übungen auf der Unterstufe veranstaltet. Größere Ausführlichkeit in der Darstellung wäre bei einigen Beispielen sehr erwünscht.

Gr. Lichterfelde. WILHELM BAHRDT.

M. Nath und **J. Kleiber. Physik für die Oberstufe.** Zum Gebrauch für die Oberklassen höherer Lehranstalten. Vierte Auflage. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse norddeutscher Lehranstalten. Mit 661 Figuren, zahlreichen durchgerechneten Musterbeispielen und Aufgaben samt Lösungen. XI u. 472 S. Berlin und München 1910, R. Oldenbourg. ℳ 4,45.

Die vorliegende Neubearbeitung zeigt gegenüber der von J. Kleiber und H. Scheffler besorgten Auflage nur geringe Textänderungen, so daß beide Bücher nebeneinander benutzt werden können. Die Eigenschaften der Kleiberschen Bücher: scharfe, durch den Druck hervorgehobene Disposition des Stoffes, Hervorhebung wichtiger Formeln und Lehrsätze durch fetten Druck, Reichtum an Figuren und Musterbeispielen sind in der Neubearbeitung erhalten geblieben; der Herausgeber kennzeichnet wegen dieser Eigenarten das Buch als „Lernbuch". Die Herausgeber haben den Stoff systematisch, nicht methodisch geordnet, da sie der Ansicht sind, daß die methodische Darstellung dem Lehrer einen unliebsamen Zwang auferlegt.

Gr. Lichterfelde. WILHELM BAHRDT.

Digitized by Google

G. Mahler. Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 129 S. Leipzig 1910, G. J. Göschensche Verlagsbuchhandlung. ℳ 0,80.

Die rasche und günstige Aufnahme, welche die erste Auflage der physikalischen Aufgabensammlung gefunden und eine zweite Auflage nötig gemacht hat, beweist, daß ein derartiges billiges Werk in der Tat einem Bedürfnisse entspricht. Die Zahl der Aufgaben ist von 582 auf 609 vermehrt; mehrere Aufgaben sind durch zweckmäßigere ersetzt worden. Die Angabe der Resultate scheint nach einigen vom Referenten gemachten Stichproben durchaus zuverlässig zu sein.

Gr. Lichterfelde. Wilhelm Bahrdt.

Heinrich Alt. Schülerübungen zur Einführung in die Physik. Ein praktisches Hilfsbuch für den Lehrer. Mit 53 Figuren. VII u. 106 S. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. Geh. ℳ 2,20, in Leinwand geb. ℳ 2,60.

Das Buch soll als Leitfaden für die Einführung physikalischer Schülerübungen in Volksschulen dienen; es ist dies der erste derartige Versuch in Deutschland. Berücksichtigt man, daß — wenigstens in Deutschland — durchaus keinerlei praktische Erfahrungen noch irgendwelche Literatur zur Einführung von Schülerübungen an Elementarschulen vorliegen, so wird man gern anerkennen, daß der Verfasser Gutes geboten und zur Einführung von Schülerübungen in die Volksschule wertwolle Anregungen gegeben hat.

Bei der Bearbeitung hat der Verfasser die Erfahrungen aus einer größeren Zahl von Informationskursen, die er für das Münchener Lehrpersonal abgehalten hat, und aus eigner zweijähriger Unterrichtspraxis an einer Schule verwertet.

Die Übungen sind in methodisch geschlossener Form dargestellt; der jeder Übung beigefügte Text enthält das Notwendigste von dem, was der Lehrer dem Schüler vor Beginn des Versuchs sagt. Jeder Übung ist ein Schema für die Form, in der die Messungsresultate aufzuschreiben und zu verwerten sind, angehängt, was zweifellos den Schüler zur Ordnung und Gewissenhaftigkeit anleitet. Für den Lehrer ist die Aufzählung der bei jeder Übung nötigen Gebrauchsgegenstände, detaillierte Vorschriften für Apparate und Versuchsausführungen und die angefügte Literatur von großem Werte. Das Buch wird den Lehrern an Elementarschulen unschätzbare Dienste leisten; eine ganze Reihe von Übungen lassen sich auch zur Ausführung auf der Mittelstufe höherer Lehranstalten gut verwenden.

Gr. Lichterfelde. Wilhelm Bahrdt.

R. Neuendorff. Praktische Mathematik I. Graphisches und numerisches Rechnen. Mit 69 Figuren im Text und einer Tafel [VI u. 106 S.]. 8. [Aus Natur und Geisteswelt Nr. 341.] Leipzig 1911, B. G. Teubner. In Leinwand geb. ℳ 1,25.

Es sind in einem Volkshochschulkursus gehaltene Vorträge, die der Verf. hier abdrucken läßt. Ihr Zweck ist, die zur Lösung wichtiger praktischer

Digitized by Google

Aufgaben vorhandenen mathematischen Hilfsmittel und ihre Verwendung zu erklären. In diesem ersten Teil werden das graphische und das numerische Rechnen behandelt, u. a. die Planimeter und Rechenschieber. Zu der Besprechung des Stangenplanimeters ist zu bemerken, daß die Stangenlänge mindestens dreimal so groß sein muß wie der Durchmesser der auszumessenden Fläche, da sonst die Ungenauigkeit zu groß wird. Auf S. 33 muß es heißen, daß bereits 707 Stellen der Zahl π berechnet worden sind. Die Regeln, die zur Bestimmung des Kommas bei der verkürzten Multiplikation und beim Rechnen mit dem Rechenschieber aufgestellt werden, dürften wohl nur theoretisches Interesse beanspruchen.

Es ist zu hoffen, daß die geschickte Darstellung das vom Verf. erstrebte Ziel erreichen wird: der Mathematik neue Freunde zu gewinnen.

Berlin. E. Jahnke.

A. Séférian. Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. Lausanne 1910, A. Denéréaz-Spengler.

Es ist eine geschickte Einführung in die Elemente der Theorie der linearen Komplexe.

Auf S. 17 findet sich in der Antwort auf die Frage nach dem kürzesten Abstand zweier Geraden ein Versehen. Der kürzeste Abstand zweier Geraden $(X_1 Y_1 Z_1 L_1 M_1 N_1)$ und $(X_2 Y_2 Z_2 L_2 M_2 N_2)$ ist gleich

$$\frac{L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1}{\sqrt{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2)^2 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3)^2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2}}.$$

Berlin. E. Jahnke.

Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn. Im Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren. Nach dem ungarischen Original unter Mitwirkung der Herren M. Balog und J. Rados deutsch herausgegeben von E. Beke und S. Mikola. VI u. 160 S. gr. 8. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 4,—.

Im Jahre 1906 hielt Herr Beke in der Generalversammlung des „Országos Kozépiskolai Tanáregyesület" (Landesverein der Mittelschulprofessoren) einen Vortrag über die mathematischen Reformbestrebungen im Ausland und fügte seine Ansichten über die Notwendigkeit und Möglichkeit einer entsprechenden Reform in Ungarn hinzu. Auf Antrag des Vortragenden wurde eine Kommission gewählt, die sich die nähere Bearbeitung der angeregten Fragen zur Aufgabe machte. Der erwähnte Vortrag, sowie die von einzelnen Referenten in den Kommissionssitzungen erstatteten Berichte bilden den Hauptinhalt des vorliegenden Buches. Die Einleitung stammt von Herrn E. Beke; sie gibt eine Zusammenstellung und Entwicklung der ungarischen Lehrpläne, desgleichen einen Vortrag über die mathematische Lehrerbildung mit Rücksicht auf die Reformbestrebungen. In letzterem ist mir die Bemerkung aufgefallen, daß ein großer Teil der ungarischen Studenten manche trigonometrischen Formeln, z. B.

Digitized by Google

für $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$, nicht kennt (S. 130) und ungenügende Fertigkeit im Aufstellen von Gleichungen und im Behandeln geometrischer Konstruktionsaufgaben besitzt! Die übrigen Vorträge haben zur Überschrift: Übersicht der Reformbestrebungen in den einzelnen Staaten, von K. Goldziher; Über die zweckmäßige Einteilung des Rechenunterrichts auf der unteren Stufe, von K. Fröhlich; Die graphische Methode im mathematischen Unterricht, von A. Péch; Die heuristische Methode im Unterrichte der Mathematik auf der unteren Stufe, von S. Mikola; Über den Unterricht der geometrischen Disziplinen, von I. Rados; Der geometrische Unterricht in den unteren Klassen, von P. Szabó, Die Einteilung des Lehrstoffes der Geometrie in Ungarn und im Auslande, von L. Kopp; Zur Frage des geometrischen Zeichenunterrichtes in den Mittelschulen, von A. Privorszky; Über logarithmische Tafeln und das Rechenlineal, von I. Winter; Die Einführung der Funktionen und der Infinitesimalrechnung in die Mittelschulen, von L. Rátz; Beziehungen der Mathematik zur Physik, von G. Szabó; Einige Bemerkungen vom Standpunkte des Technikers, von A. Czakó. Den Beschluß macht ein Bericht über die Arbeiten und Beschlüsse der Kommission aus der Feder des Herrn S. Mikola. Über den Inhalt der Vorträge ist zu bemerken, daß sie keine wesentlichen neuen Gesichtspunkte aufweisen. Die bei uns in Deutschland erstrebten Reformen im mathematischen Unterricht werden anerkannt und auf die örtlichen Verhältnisse übertragen.

Berlin. A. Baruch.

E. B. Christoffel. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung von A. Krazer u. G. Faber herausgegeben von L. Maurer. 2 Bände. 8. Leipzig 1910, B. G. Teubner. I. Band. Mit einer Biographie E. B. Christoffels von C. F. Geiser und seinem Bild, sowie 15 Figuren. [XVI u. 382 S.] Geh. ℳ 18.—. II. Band. Mit 18 Figuren. [III. u. 343 S.] Geh. ℳ 16,—.

Die Publikationen Christoffels sind in vielen, teils ausländischen Zeitschriften zerstreut, und so wird man es gewiß mit Freuden begrüßen, daß die Herausgeber diese Abhandlungen, 35 an der Zahl, in zwei stattlichen Oktavbänden gesammelt und dadurch dem mathematischen Publikum bequemer zugänglich gemacht haben. Zwar gehört Christoffel nicht zu den führenden Geistern, die große Umwälzungen in der Wissenschaft hervorgerufen haben; er hat keine neue Richtung inauguriert, keine Schule begründet. Aber er gehörte auch nicht zur Schule eines andern, er ging einsam seine eigenen Wege; jede seiner Arbeiten bezeugt eine ausgesprochene Originalität. Freilich ist ja manches, was er gefunden, durch die spätere Forschung nicht nur überholt, sondern auch korrigiert worden; aber manches ist doch von bleibendem Wert, so seine Untersuchungen über die geodätischen Dreiecke und über die Abelschen Integrale. Und vor allem ist sein Gedankengang überall interessant und lehrreich, selbst da, wo Irrtümer unterlaufen sind. Übrigens haben die Herausgeber dankenswerter Weise diejenigen Arbeiten, die die Kritik herausfordern mußten, mit diesbezüglichen kurzen Anmerkungen versehen, die der Belehrung des Lesers dienen.

Die Ausstattung ist eine gediegene. Vor allem wird es den zahlreichen früheren Schülern und sonstigen Verehrern Christoffels willkommen sein, daß

Digitized by Google

dem ersten Band ein Bild des Forschers in Lichtdruck beigegeben worden ist. Ferner findet sich daselbst eine von Geiser verfaßte Biographie, die die charakteristischen Züge dieses eigenartigen und nicht nur in seinen wissenschaftlichen Forschungen eigne Wege gehenden, sondern mehr noch im Leben einsam dastehenden Mannes deutlich hervortreten läßt.

Tübingen. Oskar Perron.

G. Vivanti. Les fonctions polyédriques et modulaires. Traduit par A. Cahen. VI u. 318 S. Paris 1910.

Dieses Werk stellt sich nach dem Vorwort lediglich die Aufgabe, die Lektüre der bekannten Werke von Klein über das Ikosaeder und von Klein-Fricke über die Modulfunktionen zu erleichtern. Aber selbstverständlich ist dies nicht so zu verstehen, als ob wir es bloß mit einem „Führer durch die Kleinschen Werke" zu tun hätten, sondern das Buch ist doch ein selbständiges Ganzes. Und ebenso selbstverständlich kann die Erleichterung nicht so gemeint sein, daß nun den jüngsten Semestern die Materie zugänglich sein soll; ein gewisses nicht geringes Maß von Vorkenntnissen ist zum Eindringen in den hier behandelten Stoff immer erforderlich. Auch ist es natürlich, daß insbesondere von dem, was in dem umfangreichen Kleinschen Werk über die Modulfunktionen steht, auf dem hier zur Verfügung stehenden engen Raum nur ein sehr bescheidenes Quantum behandelt sein kann, während allerdings von dem Stoff des Ikosaeder-Werkes doch die größere Hälfte untergebracht ist.

Trotz Würdigung all dieser Umstände glaube ich, daß das eingangs erwähnte Ziel doch nicht in dem Maße erreicht worden ist, wie es wohl wünschenswert gewesen wäre. An Vorzügen des Werkes ist zu nennen die sehr glückliche Auswahl und Umgrenzung des Stoffes, sodaß wirklich ein einheitliches und abgeschlossenes Ganzes vor uns liegt. Auch die größere Menge der Figuren trägt, wenngleich sie nicht alle sehr sorgfältig ausgeführt sind, zur Erleichterung des Verständnisses bei; endlich sind zahlreiche Rechnungen, die bei Klein nur skizziert sind, mehr im Detail durchgeführt. Diesen Vorzügen stehen aber auch Nachteile gegenüber; es wäre wohl eine weitergehende Gliederung in Abschnitte mit Überschriften und kurzen Programmangaben zu wünschen gewesen. Gerade solche Wegweiser, die sich bei Klein viel häufiger finden, sind, wenn das Gebiet jemandem leichter zugänglich gemacht werden soll, sehr am Platze. Der Hauptnachteil der französischen Übersetzung ist aber vor allem die ganz unglaubliche Menge von Druckfehlern, die den Leser natürlich immer ärgern, hier aber zum Teil wirklich recht sinnstörend sind. Dadurch allein werden die oben genannten Vorzüge fast völlig wieder aufgehoben. Denn was nützt eine ausführlichere Entwicklung, wenn sie an wesentlichen Stellen ein paar Fehler aufweist, die zwar der Kundige meistens leicht richtig stellen kann, die aber dem Neuling, für den das Buch doch eigentlich geschrieben ist, die größten Rätsel aufgeben. Dadurch wird das Verständnis keineswegs erleichtert, eher noch erschwert.

Im einzelnen gliedert sich der Stoff folgendermaßen. Im ersten Abschnitt werden nach einer allgemeinen Einleitung über Gruppen und speziell lineare Subtstitutionsgruppen im engen Anschluß an Klein die Polyedergruppen untersucht, und die zugehörige Netzeinteilung der komplexen Zahlenebene durch Figuren klar gemacht. Sodann wird die Modulgruppe durch Angabe ihres

Digitized by Google

Fundamentalbereiches definiert, woraus sich auch sofort ihre Substitutionen ergeben; daran schließt sich eine ausführliche Untersuchung ihrer wichtigsten Untergruppen. Im zweiten Abschnitt werden zuerst die Invarianten der verschiedenen Gruppen aufgestellt (Polyederfunktionen und Modulfunktionen). Sodann entsteht das Problem, bei gegebenem Funktionswert den Wert der Variabeln zu berechnen (Polyedergleichung und Modulgleichung). Diese Aufgabe ist für die Polyedergleichungen vollständig durchgeführt; insbesondere sind für die Ikosaedergleichung die Resolventen fünften und sechsten Grades aufgestellt. Auch für die Modulgleichungen, die ja transzendent sind, werden die wichtigsten Resolventen berechnet.

Tübingen. OSKAR PERRON.

Paul Montel. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. (Collection Borel.) VI u. 128 S. Paris 1910, Gauthier-Villars.

Die Aufgabe, eine in einem gewissen Gebiet reguläre analytische Funktion als unendliche Reihe von Polynomen darzustellen, ist schon von vielen Autoren und auf viele Arten behandelt worden. Die betreffenden Originalarbeiten sind aber in den verschiedensten Zeitschriften verstreut; es ist daher gewiß sehr dankenswert, daß ein Kenner dieses Gebietes wie Herr Montel es unternommen hat, das angehäufte Material zu ordnen und in einem Bande der beliebten Borelsammlung zusammenzustellen, in einer Form, die nicht allzuviele Vorkenntnisse erfordert und eine rasche Orientierung über dieses überaus wichtige Gebiet ermöglicht.

In dem ersten Kapitel werden die für das Folgende unerläßlichen funktionentheoretischen Grundlagen entwickelt, wovon manches noch kaum bekannt ist. Es folgen dann die verschiedenen Methoden von Painlevé, Hilbert, Runge, sowie auch die Entwicklungen nach sogenannten Tschebyscheffschen Polynomen. In diesem letzteren Paragraphen hat sich leider ein Fehler eingeschlichen, auf den ich hier aufmerksam machen möchte, weil er mir doch nicht ohne Konsequenzen zu sein scheint. Auf Seite 67 ist von drei positiven Zahlen μ, μ', μ_1 die Rede, wobei $\mu_1 < \mu$ ist. Es soll dann eine positive Zahl α der Ungleichung genügen: $\mu_1 + \alpha\mu' < \mu$. Nun ist ja die Existenz einer solchen Zahl α selbstverständlich, sofern keine weiteren Bedingungen gefordert werden. Aber in dem fraglichen Fall liegt die Sache so, daß eine Verkleinerung von α stets ein Wachsen von μ_1 nach sich zieht, und zwar bis beliebig nahe an μ heran, sodaß die Ungleichung $\mu_1 + \alpha\mu' < \mu$ nicht ohne weiteres erzwungen werden kann.

Das dritte Kapitel ist den Untersuchungen von Faber gewidmet, die darauf abzielen, eine Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form $\sum a_\nu P_\nu(z)$ zu entwickeln, wo die Polynome $P_\nu(z)$ gar nicht von der Funktion $f(z)$ abhängen, sondern nur von dem Bereich, in dem $f(z)$ regulär ist und dargestellt werden soll. Für den Kreis kann man z. B. einfach Potenzreihen wählen, für die Ellipse Reihen nach Legendreschen Polynomen.

Das vierte Kapitel handelt von solchen polynomischen Entwicklungen, die in verschiedenen getrennten Gebieten gegen verschiedene Funktionen konvergieren, die nicht analytische Fortsetzungen von einander zu sein brauchen. Endlich das fünfte Kapitel ist den Bedingungen gewidmet, unter denen eine polynomische Reihe in einem gewissen Gebiet eine analytische Funktion dar-

Digitized by Google

stellt. Während die gleichmäßige Konvergenz hinreichend ist, aber keineswegs notwendig, zeigt es sich, daß die sogenannte quasigleichmäßige Konvergenz, in welcher Arzelà bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit erkannt hat, zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist. Einige tieferliegende Erörterungen in dieser Richtung beschließen den inhaltreichen Band.

Tübingen. Oskar Perron.

H. Wieleitner. Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. XIV u. 85 S. gr. 8. Leipzig und Berlin 1910, B. G. Teubner. *M* 2,40.

Der Bericht von Herrn Wieleitner über den mathematischen Unterricht im Königreich Bayern ist als 1. Heft des II. Bandes der „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland" erschienen und darf besonderes Interesse beanspruchen. Vor allem kommt der in ihm besprochene mathematische Lehrplan der im Herbst 1907 errichteten bayerischen Oberrealschulen den berechtigten Wünschen der beteiligten Kreise entgegen. Aber auch sonst sind die bayerischen Schulverhältnisse in vieler Beziehung so eigenartig, daß es sich wohl verlohnt, sie näher zu betrachten, besonders wenn man dabei einen so kundigen Führer wie Herrn Wieleitner hat.

In der Einleitung erwähnt der Herr Verfasser zunächst die Frequenzverhältnisse der bayerischen Mittelschulen, die sich in humanistische und realistische Anstalten gliedern. Jene wurden bei Beginn (September) des Schuljahrs 1909/10 von 22382, diese von 19993 Schülern besucht; bei den ersteren sank die Zahl im folgenden Jahre auf 21405, bei den letzteren stieg sie auf 20903. Dabei trifft auf die 9 Oberrealschulen eine Mehrung von 212, auf die 4 Realgymnasien von 82 und auf die 46 Realschulen (mit 6 Klassen) von 616 Schülern. Sodann werden wichtige allgemeine Verhältnisse (Fachlehrer, Schulleitung, Reifeprüfung) erörtert.

Nun folgt eine Besprechung der humanistischen Anstalten. Nach einer historischen Einleitung über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an diesen Schulen wird der jetzt geltende Lehrplan von 1901 mitgeteilt. Dabei werden der in der IV. Klasse[1]) zu erteilende propädeutische Geometrieunterricht und die für die VIII. Klasse vorgeschriebenen Elemente der analytischen Geometrie eingehend gewürdigt und die Erläuterungen zu den Lehrplänen angeführt. Schließlich kommen die Vorschläge zur Abänderung des Lehrplans zur Sprache.

Von den vier bayerischen Realgymnasien hat das in München wegen ungünstiger Raumverhältnisse, denen in der nächsten Zeit durch einen modernen Neubau abgeholfen werden soll, nur die Klassen IV bis IX. Auch hiervon werden die Lehrpläne, die Abänderungsvorschläge der „Bayerischen Sektion" und einige Beispiele von den bei der Reifeprüfung gestellten Aufgaben mitgeteilt; diese sind — wie bei den humanistischen Anstalten — für alle Realgymnasien die gleichen und werden vom Ministerium gegeben.

---

1) An den bayerischen Anstalten ist die I. Klasse die unterste (Sexta).

Digitized by Google

Aus der Geschichte der bayerischen Realschulen ist folgendes bemerkenswert: Das „Realinstitut", eine naturwissenschaftlich-mathematische Vollanstalt, ging nach kurzer Blüte im Schuljahre 1815/16 ein. Seit 1833 gab es die dreikursigen „Gewerbschulen", die eine höhere Bildung zu geben hatten; aus ihnen sind viele tüchtige Männer hervorgegangen, die zum Teil auch später noch die Vorliebe für Mathematik beibehielten. Am 29. April 1877 wurden diese Schulen in Realschulen umgewandelt, die nun überall sechsklassig sind. Der Lehrstoff in Mathematik und Zeichnen war sehr groß, und die bei der Reifeprüfung vom Ministerium gestellten Aufgaben waren nicht einfacher als an den humanistischen Gymnasien. Als Fortsetzung der Realschulen dienten die vier „Industrieschulen", deren Reifezeugnis zum Übertritt in die technische Hochschule berechtigte. Doch gingen diese Anstalten immer mehr zurück und wurden im Jahre 1907 aufgehoben. Schon lange forderte die öffentliche Meinung eine neunklassige Anstalt, an der die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer den Mittelpunkt bilden sollten, und besonders die (anonym erschienenen) „Zwölf Artikel über den Ausbau der bayerischen Realschulen"[1]) vertraten diese Forderung mit großem Nachdruck. Am 14. Juli 1907 traten die Oberrealschulen ins Leben. Ihr Lehrplan für Rechnen und Mathematik sowie die einleitenden Bemerkungen hierzu werden mitgeteilt; auch von den Anforderungen im Zeichnen hört man das Wichtigste. Für die Reifeprüfung sind von dem in der Oberklasse unterrichtenden Lehrer zwei Aufgabengruppen (mit Lösungen) einzusenden, aus denen die vorgesetzte Behörde eine auswählt. Die bearbeiteten Aufgaben kann man aus den Jahresberichten der einzelnen Schulen entnehmen.

Unter den genehmigten Lehrbüchern findet man einige, die auch außerhalb Bayerns verwendet werden; die benützten Logarithmentafeln sind fünfstellig. Für die oberen Klassen der Oberrealschulen sind noch keine Lehrbücher gebilligt. Wenn nun auch dem Lehrer in der Behandlung des Lehrstoffes volle Freiheit bleibt, so hat doch das Diktieren mancherlei Nachteile.

Daß im Lehrplane der Oberrealschulen die Anwendungen betont sind und die Schüler allmählich zum funktionalen Denken erzogen und in die Infinitesimalrechnung eingeführt werden sollen, ist von den beteiligten Kreisen mit großer Freude begrüßt worden. Doch ist dabei die Übung in den formalen algebraischen Operationen nicht zu vernachlässigen, wie der Herr Verfasser richtig bemerkt. Da bei der Einführung in den Funktionsbegriff die graphische Darstellung herangezogen wird, bereitet später das Verständnis der Grundbegriffe der analytischen Geometrie den Schülern keine großen Schwierigkeiten. Für die humanistischen Anstalten und die Realgymnasien sind wohl in einiger Zeit neue Lehrpläne zu erwarten.

Von den Prüfungsordnungen für das Lehramt in Mathematik und Physik bespricht Herr Wieleitner die vom Jahre 1873, bei der nach Schluß der Studienjahre das Hauptexamen und ein Spezialexamen abzulegen waren, und die jetzt geltende vom Jahre 1895. Diese teilt die Prüfung in zwei Abschnitte: dem ersten unterzieht sich der Kandidat nach vier, dem zweiten nach acht Semestern; bei letzterem ist eine wissenschaftliche Arbeit aus Mathematik oder Physik vorzulegen. Einige Beispiele der gestellten Aufgaben und der für die Arbeit gewählten Themen werden beigebracht. Eine neue Prüfungs-

1) München 1905, Verlag der Allgemeinen Zeitung.

Digitized by Google

ordnung steht in Aussicht; ihr Entwurf ist vom Ministerium an die beteiligten Fachvereinen hinausgegeben worden.

Die geprüften Lehramtskandidaten werden an vier Seminaren, deren Besuch (vom November bis zum Juli) zunächst noch fakultativ ist, in die pädagogische Praxis eingeführt. Für die Lehrer werden jährlich an den Universitäten — in München tritt die Technische Hochschule dazu — Ferienkurse abgehalten; den Teilnehmern werden vom Ministerium auf Ansuchen Zuschüsse gewährt. Obwohl diese Kurse leider nur wenige Tage währen können, erfreuen sie sich doch eines guten Besuches; auch aus dem dabei gepflogenen kollegialen Verkehr läßt sich viel Nutzen ziehen.

Im Anhange wird das „Deutsche Museum" erwähnt und des Herrn Geheimrat von Dyck gedacht, der bei der Ausarbeitung des Lehrplans der Oberrealschulen in erster Linie beteiligt war.

Herrn Wieleitner gebührt für seinen Bericht, in dem die bayerischen Verhältnisse mit wohltuender Objektivität geschildert sind, der wärmste Dank. Das Buch sei allen Fachgenossen bestens empfohlen.

Bayreuth. Oskar Degel.

Jos. Finger. Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und Technischen Hochschulen und zum Selbstunterricht. Dritte, neubearbeitete und verbesserte Auflage. XV u. 842 S. gr. 8°. Mit 213 Figuren im Text. Wien und Leipzig 1911, Alfred Hölder. ℳ 22,—.

Die Studierenden der Technischen Hochschulen müssen so früh wie möglich in die Mechanik eingeführt werden; der Kursus der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule zu Berlin-Charlottenburg erstreckt sich deshalb über die ersten drei Studiensemester. Soll nun ein für solche Leser bestimmtes Lehrbuch der Mechanik neben den Vorträgen nicht als ein bloßer Leitfaden zur Wiederholung dienen, sondern im Gegenteil die Gegenstände der Vorlesung weiter ausführen, also zur Ergänzung des Kollegs oder gar zum Selbststudium benutzt werden, so dürfen einerseits nicht allzuviele Kenntnisse in der höheren Mathematik vorausgesetzt werden, und es ist andererseits dadurch Breite und Ausführlichkeit der Darstellung bedingt. Damit ist die charakteristische Eigenart des vorliegenden Werkes gekennzeichnet. Bei der Anzeige der ersten Ausgabe äußerte ich vorsichtig meine Zweifel, ob es zweckmäßig sei, dem Anfänger ein so umfangreiches Werk in die Hände zu geben, das ihm zwar manche Mühe abnimmt, aber ihn auch vielleicht durch die Dicke abschrecken und zufolge der peinlichen Durcharbeitung bis in alle Einzelheiten wohl vom selbständigen Arbeiten zurückhalten könnte. Wenn trotzdem genau 25 Jahre nach der Vollendung der letzten Lieferung der ersten Ausgabe jetzt die dritte Auflage notwendig geworden ist, so bezeugt der Erfolg der Schrift bei den zahlreichen Schülern des Verfassers die Brauchbarkeit und Nützlichkeit des durchweg klar und leichtverständlich geschriebenen Buches und widerlegt somit meine damals angedeuteten Bedenken.

Der verdiente Autor, der am 1. Januar dieses Jahres sein siebzigstes Lebensjahr vollendet hat und mithin nach dem österreichischen Gesetze dem Ende seiner 33-jährigen Lehrtätigkeit an der Wiener Technischen Hochschule

Digitized by Google

entgegensieht, kann mit großer Befriedigung auf dieses sein Hauptwerk blicken, das nach dem Muster der klassischen französischen Lehrbücher, aber unter voller Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technischen Hochschulen abgefaßt ist und die Erfahrungen seiner Lebensarbeit für weitere Kreise nutzbar macht.

Er hat den Wahlspruch festgehalten, der jetzt wie in der ersten Ausgabe auf dem Titelblatt steht: „Quidquid ex phaenomenis non deducitur, hypothesis vocanda est; et hypotheses seu metaphysicae, seu physicae, seu qualitatum occultarum, seu mechanicae in philosophia naturali locum non habent" (Newton, Phil. nat. princ. math.). Trotz der vielfach ungerechtfertigten Anfechtungen, welche die Newtonschen Prinzipien der Mechanik von manchen Fachgenossen erfahren haben, ist er, wie im Vorworte wiederholt wird, in seiner festen Überzeugung noch immer nicht wankend geworden, daß die Festhaltung an den Galilei-Newtonschen Grundlagen den Charakter der Mechanik als einer exakten Wissenschaft nicht beeinträchtigt, und daß die Elimination des Kraftbegriffes und dessen Ersetzung durch andere Grundbegriffe und Grundsätze für einen faßlichen Unterricht in der Mechanik, zumal an Technischen Hochschulen, sich in keiner Weise empfiehlt.

In dieser Ansicht stimme ich mit dem Verfasser vollkommen überein. Wer bei dem Anfangsunterricht in der Mechanik die sehr schwierigen Fundamentalbegriffe der Mechanik nach den neuesten Untersuchungen philosophisch zergliedert und die Axiome der Mechanik auf ihre Vollständigkeit und Widerspruchslosigkeit prüft, die Masse und das Trägheitsgesetz auf die Elektronentheorie zurückführt, das Relativitätsprinzip zugrunde legt und die Kräfte auf verborgene Bewegungen reduziert, ist einem Lehrer zu vergleichen, der den Unterricht in der Geometrie mit den Hilbertschen Überlegungen über die Grundlagen der Geometrie beginnt und die verschiedenen Möglichkeiten nichteuklidischer Geometrien neben der euklidischen erörtert. Daß trotzdem der Verfasser es mit den Begriffsbestimmungen nicht leicht nimmt, bekundet die Anzeige der ersten Lieferung im Archiv der Math. (zweite Reihe, Bd. 1, 1884). Hoppe, der als grübelnder Kopf über solche philosophischen Fragen tief nachgedacht hatte und gerade hierin sehr streng urteilte, sagt dort: „Es ist charakteristisch für die Bearbeitung, daß der empirische Ursprung der Begriffe, um welche es sich in den Prinzipien der Mechanik handelt, enthüllt und zur Geltung gebracht wird. Die Wichtigkeit der Kenntnis derselben für die Logik der Forschung und der Didaktik ist nicht zu bestreiten. Daß dieser Ursprung in allen Punkten richtig erfaßt und ans Licht gestellt ist, und daß sich darin keine bloße Wiedergabe fremder Ideen, sondern der eigene klare Blick des Verfassers kund gibt, ist anzuerkennen."

Der Inhalt ist, wie dies der Titel andeutet, im wesentlichen auf die theoretische, niedere Mechanik beschränkt und erstreckt sich vorzugsweise auf solche Gebiete, die in einem ersten Kursus an Technischen Hochschulen gelehrt werden, weil sie für die späteren technischen Anwendungen erforderlich sind; ausgeschlossen sind dagegen die allgemeineren Betrachtungen, die zwar mathematisch recht interessant sind, aber bei praktischen Aufgaben der Technik nicht in Betracht kommen. Selbst die Aufgaben über Attraktionen nach dem Newtonschen Gesetze der Gravitation und demnach auch die ersten Sätze über das Potential haben keine Aufnahme gefunden. Dafür sind dann aber die Methoden der graphischen Statik gemäß ihrer Bedeutung für die Praxis neben der analytischen Behandlung der statischen Fragen in aller Aus-

Digitized by Google

führlichkeit entwickelt. Die ersten neun Kapitel behandeln Statik, Kinematik und Dynamik des materiellen Punktes und der starren Punktsysteme, das letzte Kapitel ist den Prinzipien der Hydrodynamik gewidmet.

Über die Änderungen in der neuen Auflage ist folgendes zu bemerken. Behufs Erzielung größerer Klarheit ist der Lehrstoff zum großen Teile neu bearbeitet und in einigen Kapiteln anders gegliedert. Manche Kapitel haben eine Erweiterung erfahren; dadurch ist der Umfang von 797 Seiten der zweiten Auflage auf 842 gestiegen. Die Lehren der graphischen Statik sind erweitert um die Methode der graphischen Zusammensetzung von Kräften im Raume und um eine ausführliche Behandlung des belasteten horizontalen Trägers. Viel weiter gehende Vermehrungen des Lehrstoffes in der reinen Mechanik beziehen sich auf das Virial der Kräftesysteme, auf den Stoßmittelpunkt, den Kräftemittelpunkt, das vektorielle Deviationsmoment und Massenmoment, die Lehre von den Trägheitshauptachsen. Auch der die einfachen Maschinen behandelnde Abschnitt im VIII. Kapitel ist vollständig umgearbeitet und wesentlich bereichert.

Obgleich also eine gründliche Revision des ganzen Werkes vorgenommen ist, so hat doch das Buch in der neuen Auflage nach der gesamten Erscheinung das Aussehen der früheren gewahrt, indem die ganze Disposition beibehalten ist und die Änderungen vorsichtig hineingearbeitet sind. An einer Stelle wäre eine Ergänzung sehr wünschenswert gewesen. In der großen Anmerkung über die mittlere Dichte der Erde (S. 503—508) ist auf S. 506, wo die Ergebnisse der Messungen historisch aufgezählt werden, der Text der ersten Auflage ungeändert beibehalten; es sind also die Arbeiten von Richarz und Krigar-Menzel, Poynting, Braun, Eötvös, Boys aus den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts weder in der zweiten Auflage (1901), noch in der jetzigen gewürdigt worden, obschon sie sowohl in der Verfeinerung der Methoden, als auch in den Ergebnissen unsere Kenntnisse erheblich erweitert haben. Von anderen Wünschen, die ich wohl noch hätte, und die sich zum großen Teil auf eine mehr geometrisch gehaltene Veranschaulichung beziehen, wie z. B. bei dem Hodographen, will ich nur den einen äußern, daß ich ein alphabetisches Register gern gesehen hätte, um jeden Gegenstand schnell aufzufinden.

Wir schließen unsere Anzeige des vortrefflichen Buches mit dem letzten Satze unseres Referates über die zweite Auflage im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik: Die Ausführlichkeit und die Durchsichtigkeit der Darstellung, sowie die Einfachheit der gebrauchten Mittel empfehlen das Werk besonders für Anfänger zur fleißigen Benutzung.

Berlin. E. Lampe.

L. Crelier. Systèmes cinématiques. Scientia, série phys.-math., n° 31. 100 S. 8. m. 13 Fig. im Text und einem Bildnis von A. Mannheim. Paris 1911, Gauthier-Villars. Kart. *frs.* 2,—

Seiner kleinen Einleitung in die kinematische Geometrie, die ich in ds. Archiv (3) **17**, 1910, S. 234 anzeigte (Libr. Rüfenacht, Bienne, Preis *frs* 1,50), läßt nun der Verfasser eine eingehende Behandlung der einfachsten kinematischen Systeme und der durch sie erzeugten Kurven folgen. Er schloß sich dabei nach seiner eigenen Angabe mehrfach an Arbeiten von J. Neuberg und an des Referenten *Spezielle ebene Kurven* an. Das Büchlein ist rein mathe-

Digitized by Google

matisch, enthält aber natürlich die Grundlagen der hauptsächlichsten Mechanismen, indem diejenigen Bewegungen studiert werden, die wir als Schleifschieber-, Schleifkurbelbewegung, elliptische (oder kardanische), konchoidische Bewegung usw. bezeichnen. Von jedem System werden die Rastpolbahn und die Gangpolbahn, die Trajektorien aller Punkte der bewegten Ebene, die Einhüllenden aller Geraden und noch manches andere aufgestellt und ausführlich diskutiert. Die Methode ist die der analytischen Geometrie. Die hauptsächlichsten Kurven, die auftreten und in mannigfacher, zum Teil auch neuer Weise beleuchtet werden, sind die Konchoiden der Geraden und des Kreises, die Kappakurven, die Kampyla des Eudoxus, die Strophoiden und Kissoiden, die Kubik von Tschirnhaus, die Parallelkurven der Kegelschnitte und die Konchoiden der letzteren vom Brennpunkt aus, die Pascalschen Schnecken, die Astroiden mit den zugehörigen Rosenkurven. Daneben treten auch neue Kurven auf, die noch keinen Namen haben. Koppelkurven und Zykloiden werden nicht behandelt.

Pirmasens. H. Wieleitner.

Paul B. Fischer. Koordinatensysteme. Sammlung Göschen 507. 125 S. kl. 8^0. Mit 8 Fig. Leipzig 1911, G. J. Göschen. Geb. ℳ 0.80.

Über die verschiedenen, in der Mathematik üblichen Koordinatensysteme hat jüngst Herr E. Müller in der *Encyklopädie* einen Bericht geliefert, der dort 174 Seiten enthält. Es ist daher klar, daß in dem vorliegenden kleinen Büchlein, das ja auch Entwicklungen geben soll und will, nur eine Auswahl besprochen werden konnte. Ganz kurz werden die Cartesischen Koordinaten, die Plückerschen Linienkoordinaten und die Hesseschen homogenen Koordinaten abgetan; dann folgen längere Ausführungen über die projektiven Koordinaten. Polarkoordinaten, elliptische Koordinaten und allgemeine krummlinige Koordinaten sind in einem weiteren Abschnitt vereinigt. Den Schluß bildet die Betrachtung der Plückerschen Linienkoordinaten im Raum, woran noch allgemeine Bemerkungen über Koordinatenbestimmung in höheren Dimensionen gefügt werden. Auf die Transformation der Koordinaten wird überall eingegangen.

Diese Auswahl ist natürlich, trotz der Versicherung, sie sei nach dem Gesichtspunkt der Bedeutung der Koordinaten für die Entwicklung der Geometrie erfolgt, sehr subjektiv. Insbesondere vermißt man jegliche Erwähnung der von E. Cesàro mit solcher Meisterschaft gehandhabten »natürlichen Koordinaten«, die doch von nicht unwesentlichem Einfluß auf die Theorie der speziellen Kurven waren. Ihre Erwähnung wäre um so wünschenswerter gewesen, als sie im Gegensatz zu allen behandelten Systemen, mit dem Gebilde selbst aufs engste verknüpft sind. Bei Kürzung der Einleitung und vielleicht auch des Schlusses wäre es wohl möglich gewesen, sie unterzubringen. In der Einleitung kann ohnehin manches beanstandet werden. Die Ableitungen der Anzahlen ∞^2 für die Geraden einer Ebene usw. sind nicht ganz korrekt (man erhält nämlich eigentlich $\infty^2 - \infty$ und müßte doch wenigstens erwähnen, daß ∞ gegen ∞^2 vernachlässigt werden darf, usw.); ferner sind Aussprüche, wie S. 13, daß der Punkt als Träger der Geraden eines Bündels zu einem zweifach ausgedehnten Raume werde, doch nur als façon de parler anzusehen und nicht als von uns deswegen zu wenig gewürdigte Realität, weil

Digitized by Google

wir mit „großer Willkür“ (S. 16 u. S. 118) immer nur den Punkt als raumbildendes Element betrachteten. In der Tat bauen doch z. B. die ∞^2 Punkte einer Ebene diese wirklich auf, während ihre ∞^2 Geraden sie ∞^1-mal überdecken. Die Linienräume, Kugelräume usw. und die Räume von mehreren Dimensionen sind berechtigte Erweiterungen unserer Begriffe, aber nicht mehr als das.

Das Büchlein ist sonst sehr zu loben und zeugt von eingehender Literaturkenntnis, die auch in vielen Fußnoten ihren Ausdruck findet. In dieser Hinsicht kann es vielen umfangreichen Büchern zum Muster dienen, deren Verfasser für literarische Noten keinen Platz finden, oder kurzerhand auf die *Encyklopädie* verweisen, die doch den wenigsten Lesern zur Hand ist.

Pirmasens. H. Wieleitner.

Scritti di G. Vailati (1863—1909). 972 S. Lex.-8. Leipzig 1911, J. A. Barth (Firenze, Succ. B. Seeber). Geh. ℳ 13,50.

Dieser dickleibige Band ist rein bibliographisch eine große Merkwürdigkeit: es sind die gesammelten Werke eines Gymnasiallehrers, erschienen kaum 2 Jahre nach seinem Tode. So ging der Wunsch, den Herr Loria in seinem Nachrufe (L'Enseign. math. **11** (1909) 296/9) unterm 9. Juni 1909 aussprach, unerwartet schnell in Erfüllung. Freunde des Verewigten veranstalteten eine Subskription, die rasch an 6500 lire ergab, so daß man schon im August 1909 (Vailati war am 14. Mai gestorben) an die Drucklegung des vorliegenden Bandes gehen konnte. Über 200 Nummern sind hier vereinigt, kleinere und größere Aufsätze, sowie viele Rezensionen, die alle aufgenommen wurden, da sie nicht bloß „semplici riassunti infiorati di complementi“ darstellen, sondern öfters, wie die Herausgeber sagen, bedeutender als das besprochene Werk waren, jedenfalls immer eigene Gedanken ihres Verfassers enthielten. Vailati war nur in der Schule Mathematiker, als Schriftsteller war er eigentlich Philosoph. So gehören auch fast alle seine mathematischen Arbeiten dem Logikkalkül an. In den letzten Jahren hat er sich, als Mitglied der Kgl. Kommission zur Reform der Mittelschulen, auch mit Unterrichtsfragen sehr eingehend beschäftigt. Im Jahre 1908 hielt er über die heutigen Lehrpläne Italiens eine bedeutende Rede, die ich in dem vorliegenden Bande vergebens suchte. Allerdings sind ihre Grundgedanken in anderen Abhandlungen enthalten. Auch die Geschichte der Mechanik, mit der sich Vailati tiefer befaßte, schlägt noch in das mathematische Gebiet. Bevor er nämlich (1899) in den Mittelschulunterricht trat, war Vailati nach einer langen Zeit des privaten Studiums und des Wartens auf Anstellung durch G. Peano als Assistent für höhere Mathematik an die Universität Turin gezogen worden, wo er später auch V. Volterra im Unterrichte der projektiven Geometrie unterstützte. An der Turiner Universität hielt er dann von 1896 an Vorlesungen über Geschichte der Mechanik, als deren literarische Früchte die drei geistreichen einleitenden Vorträge und drei bedeutende Abhandlungen historisch-kritischer Art über Archimedes, Heron und G. Benedetti ans Licht traten. Sonst aber gehören die allermeisten Aufsätze und Besprechungen dem Bereich der Philosophie an, wo unser Verfasser der von Ch. S. Peirce (1871) »Pragmatismus« genannten Richtung angehörte. „Philosophie“ muß aber im weitesten Umfang genommen werden, wenn man den Umkreis des Vailati-

Digitized by Google

schen Denkens bezeichnen will. Von der formalen Logik an bis zur Erkenntnistheorie, von den Grundfragen der Physiologie bis zu Untersuchungen über Telepathie und Spiritismus erstreckte sich das schaffende Interesse dieses reichen Geistes. Eine Übersetzung der Metaphysik des Aristoteles trug er mit sich zu Grabe. Kaum ist man mehr erstaunt, auch Arbeiten über Soziologie und Volkswissenschaft, ja über Grenzgebiete der Philologie zu finden. Mehr darüber hier zu sagen, läßt der Charakter unseres Achivs nicht zu. Der sehr billige Preis der *Scritti*, sowie die Beteiligung einer deutschen Verlagsanstalt an der Herausgabe, wird vielleicht dazu beitragen, daß Vailati nach seinem Tode auch unter Mathematikern bekannter wird, als er es zu Lebzeiten war.

Pirmasens. H. Wieleitner.

P. Crantz. Planimetrie zum Selbstunterricht. (*ANuG* Nr. 340). Mit 99 Textfig. IV u. 134 S. 8°. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geb. ℳ 1,25.

P. Crantz hat schon ein recht gutes Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen auf Grund der neuen Lehrpläne geschrieben; er kennt also die modernen Forderungen und wendet sie im vorliegenden Büchlein geschickt an. Freilich für interessierte Schuster und Schneider ist es doch nicht geeignet. Denn es wird in ihm (übrigens mit Recht) das algebraische Rechnen vorausgesetzt. Wer aber viel vergessen hat und eine rasche Übersicht gewinnen will, für den ist das Büchlein gut. Ob freilich selbst ein solcher den Übergang vom Peripheriewinkel zum Tangentensehnenwinkel (S. 61) ohne genauere Erläuterung verstehen wird, bleibe dahingestellt. Die Länge der Mittellinie eines Trapezes erhält man einfacher, wenn man das umgekehrte Trapez neben das ursprüngliche legt. Charakteristisch für die Darstellung sind die überall eingestreuten praktischen Anwendungen der Geometrie auf das Feldmessen. Zu loben wäre auch die Beifügung historischer Bemerkungen, wenn diese nicht so mangelhaft wären. Der Verfasser hat sich leider darauf beschränkt, ohne Benutzung der neueren Untersuchungen aus Cantor einige Notizen zu entnehmen und hat diese noch ausgeschmückt. So sind hier Dinge über Thales, Pythagoras, die Ägypter usw. für gewiß erzählt, die höchstens möglich sind, öfters nicht einmal das. Hätte der Verfasser nur die paar letzten Bände der von G. Eneström herausgegebenen „Bibliotheca mathematica" durchgeblättert, dann wäre ihm das zum Bewußtsein gekommen.

Pirmasens. H. Wieleitner.

F. Busmann. Ein neuer Kegelschnittzirkel. Alleinige Anfertigung und Vertrieb durch Hans Hilgers, Bonn a. Rhein. ℳ 35,—.

Daß die Idee dieses Zirkels neu wäre, könnte man gerade nicht sagen. Er zeichnet Ellipsen und Hyperbeln jeder Art nach dem Satze von der Summe bzw. der Differenz der Radienvektoren (für die Hyperbel ist der Apparat im Prinzip z. B. in Salmon-Fiedlers *Kegelschnitten*, Nr. 200, angegeben), Parabeln mit Zuhilfenahme einer weiteren Schiene genau so, wie es wahrscheinlich schon Isidorus von Milet im 6. Jahrh. n. Chr. angegeben hat (vgl. *Enc. d. Math.* III C 1, S. 87). „Gesetzlich geschützt" könnten also hier höchstens die Scharniere, die Öse und der „dehnungslose" Faden werden, der durch die

Digitized by Google

Öse läuft. Die Brauchbarkeit kann man natürlich aus den beigegebenen Photogrammen, die allerdings sehr schöne konfokale Kegelschnitte aufzeigen, nicht entnehmen. Für Liebhaber sei bemerkt, daß das Instrument für hölzerne Wandtafeln, nicht für das Zeichenblatt, konstruiert ist.

Pirmasens. H. Wieleitner.

F. W. Sanderson and **G. W. Brewster. A Geometry for Schools.** 386 S. kl. 8°. Mit 226 Fig. Cambridge 1910, University Press.

Ein prächtiges Büchlein für den Anfangsunterricht in der Geometrie, ganz entgegengesetzt dem Betriebe, wie er nach der Schilderung von C. Godfrey (auf dem Kongreß zu Rom) noch vor kurzem in England geherrscht haben muß. Der Lehrgang geht hier allmählich vom Probieren und Ausmessen zum Beweisen über, ohne je die Anschaulichkeit und die Verbindung mit dem numerischen und algebraischen Rechnen außer acht zu lassen. Eigentlich Neues wird ein erfahrener deutscher Lehrer ja wenig finden. Mir fiel besonders auf, daß aus der Scheitelgleichung des Kreises $y(2a - y) = x^2$, die als geometrischer Satz auftritt, die Folgerung $y = \frac{x^2}{2a}$ für kleine y gezogen wird. Diese Formel, aus der ja $a = \frac{x^2}{2y}$ sofort folgt, kann nämlich häufig benutzt werden, um den Krümmungsradius einer Kurve zu bestimmen, wird aber in Deutschland wenig verwendet. Unter den vielen Übungsbeispielen befinden sich übrigens auch die Grundbegriffe der Koordinatengeometrie und die Formeln für Linsen und Hohlspiegel.

Pirmasens. H. Wieleitner.

K. Düsing. Leitfaden der Kurvenlehre. (Analytische Geometrie der Ebene). Für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Anwendungen aus der Technik von Dipl.-Ing. Ernst Preger sowie vielen Übungen und 117 Figuren. 144 S. 8°. Hannover 1911, Dr. M. Jänecke. Kart. ℳ 2,20.

Ohne hier nochmals zu wiederholen, was schon in der Überschrift steht, will ich gleich sagen, daß ich das Büchlein im ganzen für recht zweckentsprechend halte. Die Beweise sind ja manchmal etwas problematisch (wie S. 59 unten), manchmal fehlen sie ganz (wie S. 35 oben). Aber das Buch steht trotzdem auch im Beweisen, nicht bloß in der Originalität der Stoffanordnung hoch über anderen ähnlichen Zieles (s. das Referat in ds. Archiv **17**, 1911, S. 349, wo auch unseres Verfassers *Elemente der Differential- und Integralrechnung* besprochen sind). Der Titel wurde gewählt, weil der Verfasser von der analytischen Geometrie nur das bringen will, was direkt brauchbar ist für den Maschinenbauer. Dazu gehören die höheren Parabeln und Hyperbeln (Adiabate), die zyklischen Kurven, die Sinuslinie, die logarithmische Spirale, Evoluten und Evolventen, Flächeninhalte usw. Da die Infinitesimalrechnung, soweit man sie braucht, vorausgesetzt wird, kann dies alles behandelt werden. Die technischen Beispiele sind recht lobenswert, bedürften aber für den Laien doch hin und wieder einer kleinen Erläuterung. Im wirklichen Unterricht werden ja wohl Differentialrechnung, Kurvenlehre,

Digitized by Google

Festigkeitslehre usw. parallel laufen, so daß die Disziplinen sich aufeinander beziehen können. Hübsch ist die Betonung der Ähnlichkeit bei den verschiedenen Kurven; merkwürdigerweise wurde das bei den Zykloiden versäumt, wiewohl es aus S. 94 unten sofort hervorginge. S. 91, Z. 1 u. 2 v. u. und S. 97, Z. 6 u. 7 v. u. ist zu bemerken, daß die Kreise so, wie angegeben, nicht rollen können. Es handelt sich aber nur darum, die Ausdrucksweise zu ändern, die auch S. 95, Z. 7/8 v. o. sehr schlecht ist. Auf weitere Einzelheiten einzugehen lohnt nicht. Wegen des mancherlei Eigenartigen ist das Buch auch Nicht-Technikern zu empfehlen.

Pirmasens. H. Wieleitner.

G. Darboux. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2me édition, complétée. [567 S.] Paris 1910, Gauthier-Villars.

Mit ganz besonderer Freude begrüßen wir die neue, vervollständigte Auflage des Darbouxschen Werkes über die *dreifach-orthogonalen Flächensysteme*. Hingewiesen sei auf Weingartens Referat in den *Fortschritten der Mathematik* (Bd. 29, S. 515) über den ersten im Jahre 1898 erschienenen Band. An Stelle eines ursprünglich beabsichtigten zweiten Bandes, der der Theorie der quadratischen Differentialformen gewidmet sein sollte, legt der hochgeschätzte Verfasser seinen mathematischen Lesern eine erweiterte Neuausgabe in einem Bande vor, in der das durch Lamés Arbeiten eröffnete Forschungsgebiet eine dem gegenwärtigen Entwicklungsstadium entsprechende Behandlung findet.

Den beiden Büchern *L'équation du troisième ordre* und *Les coordonées curvilignes* schließt sich jetzt ein drittes mit dem Titel *Théories générales* sowie ein Anhang von vier umfangreichen Noten an. Eine ausführliche Inhaltsangabe erleichtert den Überblick über das ganze kunstvolle Gebäude, das in allen seinen Teilen die seit fünfundvierzig Jahren geübte schöpferische Tätigkeit des Autors und die Fruchtbarkeit von ihm ausgegangener Anregungen erkennen läßt. Wertvoll wird diese Übersicht besonders dadurch, daß auch die verwendeten Forschungsmethoden kurz charakterisiert werden. Der durch die glücklichste Vereinigung systematischer und historisch-genetischer Darstellungsweise außerordentlich reizvoll gestaltete Aufbau des Werkes möge hier in seinen Hauptzügen skizziert werden.

Im Mittelpunkt des *ersten Buches* steht die zuerst von Cayley gefundene partielle Differentialgleichung 3. Ordnung, der die Funktion $f(x,y,z)$ genügen muß, damit $f =$ const. eine Lamésche Flächenschar darstellt, d. h. eine solche, die einem dreifachen Orthogonalsystem angehört. Der Verfasser gewinnt sie durch Differentiation der Orthogonalitätsbedingungen mit Hilfe eines eleganten Eliminationsverfahrens in Gestalt einer verschwindenden Determinante. Nach Bestimmung derjenigen Orthogonalsysteme, die eine Schar von Ebenen oder von Kugeln enthalten, wird ein Typus von partikulären Integralen untersucht, auf den der Ansatz einer gewissen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung führt. Die zugehörigen Laméschen Scharen umfassen als speziellsten Fall die Parallelflächen, weisen eine charakteristische Eigenschaft ihrer orthogonalen Trajektorien auf und gestatten eine Erzeugung auf Grund infinitesimaler Transformationen. Es folgen Umformungen und geometrische Interpretationen der Differentialgleichung 3. Ordnung mit Anwendungen auf spezielle Probleme.

Digitized by Google

Hervorgehoben sei die Tatsache, daß bei einer Laméschen Schar der unendlich kleine Abstand einer Fläche von der benachbarten dieselbe Differentialgleichung 2. Ordnung in bezug auf die Parameter der Krümmungslinien erfüllt wie die Koordinaten, sowie die Entdeckung Ribaucours, daß für die Punkte einer solchen Fläche die Schmiegungskreise der orthogonalen Trajektorien ein normales Kreissystem bilden. Nach Ermittlung derjenigen Laméschen Scharen, die aus Flächen 2. Grades mit gemeinsamen Symmetrieebenen bestehen, werden die bisherigen Methoden auf Orthogonalsysteme mit n Variabelen ausgedehnt. Die Benutzung der fünf homogenen pentasphärischen Koordinaten im dreidimensionalen Raume führt zur Bestimmung der Krümmungslinien einer ganzen Reihe von algebraischen Flächen.

Gegenstand des *zweiten Buches* sind die orthogonalen Flächenscharen als Koordinatensysteme des Raumes. Die wertvollen Theorien Lamés, die hier entwickelt und unter Berücksichtigung der neueren Arbeiten zu einem gewissen Abschluß gebracht werden, stehen in engstem Zusammenhang mit einem der interessantesten Probleme der mathematischen Physik, der Integration der Differentialgleichung für das Potential und die stationäre Wärmeströmung. Die sogen. Laméschen Gleichungen, partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, denen die Koeffizienten des Linienelements unter Zugrundelegung eines Orthogonalsystems genügen, werden für den allgemeinen Fall eines n-dimensionalen Raumes aufgestellt. Die Einführung neuer Hilfsgrößen ermöglicht, sie durch ein System von der 1. Ordnung zu ersetzen. Für $n = 3$ gewinnt der Verfasser eine in naher Beziehung zum Dupinschen Satze stehende kinematische Deutung, indem er die den Lesern seines Hauptwerkes bekannte, außerordentlich fruchtbare Methode des beweglichen Trieders auf das dreiparametriger Bewegungen fähige Normalendreikant anwendet. Die Definition der Differentialparameter Lamés führt zur Untersuchung einer besonderen Gattung dreifacher Orthogonalscharen, der isothermen Systeme, bei denen sich Funktionen je einer der drei Parameter angeben lassen, die Integrale der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ sind. Es existieren dann stationäre Wärmeströmungen, für die immer eine der drei Scharen aus Flächen gleicher Temperatur besteht. Die einzelnen Flächen dieser Orthogonalsysteme werden, wie Bertrand gezeigt hat, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt und heißen isothermische Flächen. Die isothermen Systeme Lamés bilden nur einen besonderen Fall derjenigen Orthogonalsysteme, die sich aus isothermischen Flächen zusammensetzen. Nach derartigen Systemen zu fragen, veranlaßt der Versuch, die schönste Entdeckung Lamés zu verallgemeinern, dem es gelang, die Wärmegleichung in elliptischen Koordinaten durch Produkte von Funktionen der einzelnen Parameter zu integrieren. Die hochinteressanten Entwicklungen, die dieses Problem erledigen, umfassen drei Kapitel. Am Schlusse des Buches werden in knapper Form die auf Grund einer Bemerkung Weingartens von Bianchi entdeckten Orthogonalsysteme behandelt, die eine Schar von Flächen von konstanter Krümmung enthalten. Bemerkenswert ist das Auftreten einer partiellen Differentialgleichung in dem Bianchischen Formelsystem, deren weittragende Bedeutung erst in dem neuen Teile des Werkes zutage tritt.

Das *dritte Buch* bringt nach einem vorbereitenden Kapitel über Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, das von der Picardschen

Digitized by Google

Methode der sukzessiven Approximation Gebrauch macht, eine wichtige Verallgemeinerung der dreifachen Orthogonalscharen durch die Definition der Flächensysteme mit konjugierten Schnittlinien. Charakteristisch für diese ist die Existenz unendlich vieler Parallelsysteme, d. h. solcher dreifacher Flächenscharen, die ihnen Punkt für Punkt in der Weise entsprechen, daß die Tangentialebenen der Koordinatenflächen und damit auch die Tangenten der Koordinatenlinien parallel sind. Den Grad der Allgemeinheit dieser Parallelsysteme, die ebenfalls konjugierte Schnittlinien besitzen, kennzeichnet die Tatsache, daß zu einem gegebenen System ein einziges gehört, das drei durch einen Punkt gehende Kurven enthält, denen drei Schnittlinien des ersten durch Parallelität der Tangenten entsprechen. Noch ein zweiter Übergang zu neuen dreifach-konjugierten Systemen ist möglich. Die Tangententrieder sind dabei supplementär, d. h. die Kanten des einen stehen auf den Ebenen des anderen senkrecht und umgekehrt. Für den Fall der Orthogonalsysteme, zu denen das 4. Kapitel zurückkehrt, fallen Parallelsysteme und supplementäre Systeme zusammen. Der von Combescure 1864 erkannte transformatorische Zusammenhang zwischen dreifachen Orthogonalscharen, bei dem entsprechende Flächen in den sphärischen Bildern der Krümmungslinien übereinstimmen, gestattet demnach eine zweifache Behandlung, indem sich einerseits die für Parallelsysteme, andrerseits die für supplementäre Systeme entwickelten Methoden anwenden lassen. Der zweite Weg führt zu einem rekurrierenden Verfahren zur Bildung neuer Orthogonalsysteme, das im wesentlichen mit einer von Ribaucour angegebenen Transformation zusammenfällt.

Im 6. und 7. Kapitel wird eine neue Methode zur Ermittlung dreifacher Orthogonalsysteme auseinandergesetzt, die auf eine Idee Ossian Bonnets zurückgeht, zur Orientierung des Normalentrieders die drei Eulerschen Winkel zu benutzen. Durch Einführung gewisser imaginärer Variabelen leitet der Verfasser aus den Bonnetschen Formeln drei außerordentlich einfache partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung her, aus denen durch Elimination die Gleichung 3. Ordnung hervorgeht, die bereits in dem Formelsystem für die Bianchischen Orthogonalscharen auftrat, deren Integration also, wie sich jetzt zeigt, die allgemeinsten dreifach-orthogonalen Systeme liefern würde.

Das 8. und 9. Kapitel bringt Untersuchungen über eine besondere Gattung von Orthogonalsystemen, ausgezeichnet durch die Möglichkeit rein translatorischer Bewegungen des Normalendreikants bei Verschiebung des Scheitels auf einer gewissen Schar von Kurven. Die ersten Mitteilungen über diese „E-Systeme“ rühren vom Verfasser her, eine eingehende Behandlung haben sie neuerdings durch Egorow erfahren. Zu ihrer Bestimmung hat man das Linienelement der Kugel auf eine besondere Form zu bringen.

Zu den Guichardschen Systemen, denen das 10. Kapitel gewidmet ist, gelangt man, wenn man den Differentialgleichungen für die Bewegung des Dreikants gewisse Symmetriebedingungen auferlegt. Die dadurch ermöglichte Vertauschung der Indices vermittelt zwischen je zwei Reihen derartiger Systeme.

Von den *Noten* des Anhangs betrifft die *erste* die Verwendung des Abelschen Theorems zur Ermittlung orthogonaler Systeme im n-dimensionalen Raume, die *zweite* und *dritte* die Dupinsche Zyklide und die von Zykliden gebildeten Laméschen Scharen, die *vierte* endlich eine besondere Klasse end-

Digitized by Google

licher Deformationen (Transformationen des Raumes), bei denen die drei zu jedem Punkte gehörigen Hauptrichtungen die Flächennormalen eines Orthogonalsystems liefern.

Berlin. H. Jonas.

V. und K. Kommerell. Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Bd. II. Zweite, erweiterte Aufl. Mit 12 Fig. VI u. 188 S. 8. Sammlung Schubert XLIV. Leipzig 1911, Göschen. Geb. ℳ 5,80.

Ohne die Anlage des Werkes wesentlich zu verändern, sind die Verfasser bei der Neuauflage des *zweiten* Bandes bestrebt gewesen, durch Vermehrung der Anwendungen und Beispiele das Verständnis für die theoretischen Entwicklungen zu fördern. Die dadurch bedingte Erweiterung veranlaßte sie, einer Anregung seitens der Verlagsbuchhandlung folgend, den früheren zweiten Abschnitt abzutrennen und als selbständigen Band unter dem Titel *Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme*, S. Schubert LXII, erscheinen zu lassen (s. das folg. Ref.).

Gegenstand des vorliegenden Bandes ist die Untersuchung der Flächen unter Verwendung zweier Parameter. Nach Einführung der Fundamentalgrößen werden konjugierte Kurven, Krümmungs- und Asymptotenlinien, sphärische Abbildung und Ebenenkoordinaten behandelt. Die Verwendung der letzteren wird am Beispiel der Flächen mit ebenen Krümmungslinien erläutert. Es folgen Abschnitte über Zentraflächen, Transformation der Parameter, Minimallinien, isometrische Parameter, sowie über konforme und flächentreue Abbildung mit einer Reihe zweckmäßig gewählter Beispiele. Flächendeformation und Gaußscher Satz, geodätische Linien, Codazzische Gleichungen und Bonnetscher Satz, endlich leicht faßliche Darlegungen über die Differentialparameter und ihre Anwendung auf die allgemeine Flächenkurve und das Biegungsproblem bilden den weiteren theoretischen Inhalt, dem 45 Übungsaufgaben angegliedert sind, die das Studium des Werkchens in anregender Weise begleiten. Auf die Originalabhandlungen wird durchweg verwiesen.

Berlin. H. Jonas.

V. und K. Kommerell. Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Mit 9 Fig. VI u. 171 S. Sammlung Schubert LXII. 8. Leipzig 1911, Göschen. Geb. ℳ 4,80.

Ursprünglich dazu bestimmt, in der vermehrten Ausgabe der *„Allgemeinen Theorie der Raumkurven und Flächen"* den zweiten Abschnitt des zweiten Bandes zu bilden, wahrt das vorliegende Buch auch in der neuen, selbständigen Gestalt die enge Beziehung zum Hauptwerk, dessen Abschluß und Ergänzung es darstellt. Behandelt werden in sechs Kapiteln: W-Flächen, Minimalflächen, Flächen von konstantem Krümmungsmaß, Regelflächen, dreifach orthogonale Systeme und Strahlensysteme. Besonders willkommen wird dem Leser der erweiterte Abschnitt über nicht-euklidische Geometrie, die elegant entwickelte Theorie der isotropen Kongruenzen, bei der infinitesimale Deformation und W-Strahlensysteme gestreift werden, sowie die Vermehrung der historischen Notizen sein. Das am meisten umgearbeitete Kapitel über Strahlensysteme

Digitized by Google

bringt auch einige neue Ergebnisse. Manche Abschnitte regen unmittelbar zum Studium der größeren Werke von Darboux und Bianchi an. Literaturnachweise sind beigefügt. Der letzte Paragraph umfaßt 31 Übungsaufgaben mit den notwendigen Anweisungen. Am Schluß wird auf die vorteilhaften Modifikationen Bezug genommen, die die Kummersche Theorie der Strahlensysteme neuerdings besonders durch Sannia erfahren hat.

Berlin. H. Jonas.

Éric Gérard. Leçons sur l'électricité. 2 Bände. 8. Aufl. Bd. I. 975 S. mit 461 Fig. Bd. II. 989 S. mit 489 Figuren. Paris 1910, Gauthier-Villars.

Wie der Verfasser im Vorwort zur ersten Auflage sagt, hat er sich bei Beginn seiner Lehrtätigkeit im Jahre 1883 genötigt gesehen, eine eigene Lehrmethode auszuarbeiten, da es damals an geeigneten Lehrbüchern für solche Ingenieure und Studenten, die sich der Elektrotechnik widmen wollten, mangelte. Die im Laufe der Jahre erprobten Vorlesungen hat er dann im vorliegenden Werke im Jahre 1890 zum erstenmal der Öffentlichkeit übergeben. Infolge dieser Entstehungsweise ist das Werk ein Lehrbuch der gesamten Elektrotechnik geworden, das umfassender ist, als der Titel erwarten läßt. Es enthält nicht allein die physikalischen Grundgesetze der Elektrizität und des Magnetismus, sondern behandelt auch das gesamte Anwendungsgebiet des elektrischen Stromes. Daß bei dem heutigen großen Umfang des Stoffes nicht alle Gebiete mit der gleichen Ausführlichkeit behandelt werden können, ist selbstverständlich und erwartet wohl auch niemand. Trotzdem wird dies Buch gerade dem Spezialisten vorzügliche Dienste leisten; denn dieser wird in jedem anderen außer seinem Spezialgebiet eine so ausführliche Auskunft finden, wie er es nur wünschen kann. Das Buch ist nicht nur beschreibend abgefaßt, sondern es enthält daneben auch jedesmal die theoretischen Grundlagen für das betreffende Kapitel. Vielleicht hätte allerdings an manchen Stellen die theoretische Ableitung etwas ausführlicher und strenger sein können.

Das ganze Werk ist in eine Reihe von Hauptabschnitten geteilt. Nachdem in einer Einleitung die Theorie der Zentralkräfte (Kräfte nach dem verkehrten Quadrat der Entfernung) gegeben ist, wird diese auf Magnetismus und Elektrizität angewandt und die hierfür gültigen Gesetze abgeleitet. Ein Teil dieser beiden Abschnitte bespricht auch die Faradaysche Kraftlinientheorie. Es wäre wohl zweckmäßiger gewesen, den Faraday-Maxwellschen Anschauungen etwas mehr Raum zu gönnen, da diese heutzutage in der Technik durchweg Anwendung finden und zweifellos das Verständnis für die elektrischen und magnetischen Vorgänge bedeutend erleichtern.

Die nächsten drei Abschnitte behandeln den Elektromagnetismus, die elektromagnetische Induktion und die Wechselströme. Sie gehören mit zu den besten Kapiteln des Werkes und zeichnen sich durch Vielseitigkeit der Darstellung aus. Insbesondere ist bei der Theorie der Wechselströme einmal die rein analytische Untersuchung der Vorgänge gegeben, dann ihre graphische Darstellung und schließlich die symbolische Methode. Der Abschnitt über die Wechselströme gibt auch die Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und enthält auch einiges über Elektronentheorie, Leitung in Gasen usw. Das letzte Kapitel des Abschnittes über die Wechselströme enthält eine Zu-

Digitized by Google

sammenstellung der sämtlichen bisher gebrauchten Hauptformeln. Hierbei wäre es sehr vorteilhaft für den Gebrauch des Buches gewesen, wenn bei jeder Formel angegeben worden wäre, wo sie abgeleitet bezw. zum erstenmal gebracht wurde.

Ein weiterer Abschnitt ist den elektrischen Messungen aller Art gewidmet und zwar sind sowohl Meßmethoden, als auch Meßinstrumente beschrieben, nachdem schon im Abschnitt über Elektromagnetismus einige Instrumente für Strommessungen nebst ihrer Theorie gebracht waren.

Zwei folgende Abschnitte behandeln die thermoelektrischen und galvanischen Elemente, einschließlich der Akkumulatoren.

Die beiden letzten Abschnitte des ersten Bandes besprechen die Gleichstrom- und die Wechselstromgeneratoren, denen über 400 Seiten gewidmet sind. Sie enthalten eine ganze Reihe Erweiterungen gegenüber der vorhergehenden Ausgabe, beispielsweise die Kommutationstheorie bei den Gleichstrommaschinen und die Analyse der Wechselstromkurven.

Im zweiten Band sind zunächst die Transformatoren und Drosselspulen behandelt. Die hier gegebene Theorie ist klar und kurz und zwar nach verschiedenen Methoden durchgeführt, analytisch und graphisch. Bezüglich der Abbildungen wäre es wohl besser gewesen, etwas modernere Ausführungen zu zeigen.

Der folgende Abschnitt enthält das Wichtigste über die elektrischen Leitungen. Es werden die verschiedenen Stromverteilungssysteme für Gleichstrom und Wechselstrom, Niederspannung und Hochspannung kurz beschrieben. Schalter, Schaltapparate, Schalttafeln, Transformatorstationen, Blitzschutzapparate werden beschrieben und gezeigt. Darauf folgt eine Berechnung von Netzen und Leitungen; dann werden Kabel und ihre Fabrikation für Starkstrom und Schwachstrom mit Hilfe von zahlreichen Abbildungen beschrieben und schließlich noch kurz Fehlermessungen besprochen.

Die nächsten beiden Abschnitte behandeln Telegraphie und Telephonie. Hierin werden die wichtigsten Apparate und Systeme besprochen und in Abbildungen bezw. Schaltungsschemen dem Leser vor Augen geführt. Auch ist ein Kapitel der drahtlosen Telegraphie gewidmet.

Ein weiterer Abschnitt betrifft die elektrische Beleuchtung. Im ersten Kapitel sind die verschiedenen Arten von Glühlampen und Bogenlampen beschrieben; ein Kapitel gibt kurz die Grundlagen der Photometrie und eine Beschreibung der wichtigeren Systeme. Die nächsten beiden Kapitel enthalten Erfahrungszahlen über Lichtstärken und spezifischen Energieverbrauch, sowie Berechnung und Beschreibung von Beleuchtungsanlagen und das letzte Kapitel bespricht die bekanntesten Zählersysteme.

Der nun folgende Abschnitt über Elektromotoren ist der größte dieses Bandes und umfaßt etwa 240 Seiten. Eigentümlich ist die Stellung, welche der Verfasser diesem Abschnitt in der Reihenfolge gegeben hat. Logischerweise stehen die Motoren unter den Energieverbrauchern, aber ob es nicht der Einheitlichkeit und Kürze der Behandlung wegen zweckmäßiger wäre, sie an die Generatoren anzugliedern, darüber ließe sich streiten. Das erste Kapitel behandelt die Gleichstrommotoren samt den dazu gehörigen Apparaten. Theoretische Ausführungen und Wicklungen sind hier in Anbetracht der ausführlichen Besprechung bei den Generatoren fortgelassen. Gleiches läßt sich vom vierten Kapitel über die Synchronmotoren sagen. Das zweite und

Digitized by Google

dritte Kapitel enthält die Theorie (graphisch und analytisch) der asynchronen Motoren, sowie ihre Schaltungsarten und Wicklungen, ferner Beschreibung und Abbildung von ausgeführten Typen. Im fünften Kapitel sind die rotierenden Umformer, Gleichrichter, Phasen- und Frequenzwandler, sowie die Compoundierung der Wechselstromgeneratoren besprochen und das letzte Kapitel enthält Ausführungen über die Kraftübertragungsanlagen, insbesondere Vergleichung der verschiedenen Systeme miteinander: beispielsweise Gleichstrom oder Wechselstrom, Wasserkraft oder Wärmekraft, Transport der Kohle oder der Energie, Einzelantrieb oder Gruppenantrieb. Ferner werden Schaltungsarten von Motoren gegeben und schließlich die Berechnung des Schwungrades eines elektrischen Motors.

Hierauf folgt ein Abschnitt über elektrische Bahnen, in welchem eine kurze Berechnung der erforderlichen Zugkraft, des Energieverbrauches und der Geschwindigkeit gegeben wird; es werden die gebräuchlichen Motoren und Kontrollvorrichtungen nebst erforderlichen Apparaten und Leitungszubehör beschrieben und durch Abbildungen verdeutlicht; es werden die verschiedenen Systeme der elektrischen Bahnen besprochen, ebenso die Vorteile der verschiedenen Stromarten.

Der letzte Abschnitt des Werkes behandelt noch in mehreren Kapiteln die Anwendung des elektrischen Stromes für metallurgische und chemische Zwecke.

Wenn man nun die Gesamtheit dieses Werkes betrachtet, so muß man sagen, daß es ein vorzügliches Buch für Studierende und jüngere Ingenieure ist und daß es auch den Fortgeschrittenen recht gute Dienste leisten wird, wenn sie sich über Gebiete unterrichten wollen, welche ihren gewohnten Arbeiten ferner liegen. Wer sich nun aber mit den physikalischen Grundlagen beschäftigen will, wird mehrfach die Beobachtung machen, daß es schwierig ist, den Ausführungen des Verfassers zu folgen, und dies liegt zum Teil daran, daß die Abbildungen häufig etwas mangelhaft sind und vor allem zu wenig Bezeichnungen enthalten, beispielsweise die Fig. 6 und 8 des ersten Bandes. Bei den Ableitungen auf S. 263 und 346 wären bildliche Darstellungen zur Verdeutlichung sehr angebracht gewesen. Ferner sind die Ableitungen nicht immer glücklich zu nennen, so z. B. diejenige der Kapazität eines Plattenkondensators auf S. 100 des ersten Bandes. Formeln werden mehrfach ohne Ableitung gebracht; hier wäre ein Hinweis angebracht gewesen, wo die Ableitung zu finden ist. Die Bezeichnungsweise ist auch nicht konsequent durchgeführt, so steht unter anderem auf S. 24 des zweiten Bandes und folgenden der Buchstabe e für $E.\,M.\,K.$ und auf S. 38 für eine Längenabmessung. Bezüglich der spezifischen Wärmeabgabe A auf S. 555 Band II ist noch zu bemerken, daß in der Praxis wohl niemand mit der komplizierten Strahlungsformel rechnet, sondern statt dessen Größen benutzt, welche konstant sind oder von der Temperatur linear abhängen. Die genannten Mängel beeinträchtigen jedoch nicht den Wert des Buches, da sie bei einer späteren Ausgabe leicht beseitigt werden können. Der Druck des Textes sowie auch der Formeln ist sorgfältig und klar.

Charlottenburg. E. Jasse.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

372. Ein Kegelschnitt, der einen Kegelschnitt berührt und einem seiner Polardreiecke umgeschrieben ist, schneidet ihn auf der dem Berührungspunkte harmonisch zugeordneten Transversale des Polardreiecks, während die Diagonalen des vollständigen Vierecks, zu welchem der Berührungspunkt das Polardreieck ergänzt, die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind, das er in den gegebenen vier Punkten berührt.

Holzminden. G. Kober.

---

373. Ein in der Ebene eines Kegelschnitts liegender zweiter Kegelschnitt, der das Diagonaldreiseit eines vollständigen Vierseits mit konjugierten Gegenecken in den Ecken eines der vier Dreiseite berührt, schneidet den ersten Kegelschnitt auf einem dritten Kegelschnitte, in dessen Polarfelde die in dem zweiten Kegelschnitte liegenden Ecken des vollständigen Vierseits die Ecken eines Polardreiecks sind.

Holzminden. G. Kober.

---

374. Zwei reziproke Punkt- und Strahlenfelder einer Ebene, die kein Polarfeld bilden, haben einen stets reellen Pol, der nicht in der Polare liegt, und auf ihr zwei reelle oder imaginäre Pole, die in ihren Polaren liegen. Wie lauten die Koordinaten des stets reellen Poles, wenn jeder Punkt des ersten Feldes als Punkt des zweiten Feldes die Koordinaten $\sigma x_i' \equiv \varrho \Sigma a_{ik} x_k$ hat? Wie lautet, durch sie ausgedrückt, das Kriterium für das Vorhanden- oder Nichtvorhandensein der beiden anderen Pole?

Holzminden. G. Kober.

B. Lösungen.

Zu **341** (Bd. XVII, S. 362) (E. N. Barisien). — *En chaque point M d'une ellipse, on considère la parabole P qui est tangente aux deux axes de l'ellipse, à la tangente et à la normale en M. Trouver l'aire de la courbe lieu du foyer et de la courbe lieu du sommet des paraboles P.*

Bekanntlich berührt die in Rede stehende Parabel die Normale in dem zu dem Punkte M gehörigen Krümmungsmittelpunkt C. Als Schnittpunkte rechtwinkliger Tangenten liegen der Punkt M und der Punkt O, der Mittel-

Digitized by Google

punkt der Ellipse, auf der Leitlinie der Parabel. Fällt man also von C auf die Leitlinie OM das Lot CD, von D das Lot DE auf die Normale des Punktes M und verlängert dieses über E hinaus um sich selbst bis F, so ist F der Brennpunkt der Parabel.

Aus der Gleichung der Leitlinie OM:

$$ay\cos\varphi - bx\sin\varphi = 0$$

und der Gleichung von CD:

$$by\sin\varphi + ax\cos\varphi = c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

findet man als Koordinaten des Punktes D:

$$x_D = \frac{ac^2\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad y_D = \frac{bc^2\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Die Gleichung von DE lautet:

$$(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(ay\sin\varphi + bx\cos\varphi) = abc^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

die der Normale MC:

$$by\cos\varphi - ax\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Für die Koordinaten des Punktes E ergeben sich die Werte:

$$x_E = \frac{ac^2\cos^3\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad y_E = -\frac{bc^2\sin^3\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Die Koordinaten der Punkte D, E, F sind durch die Relation verbunden:

$$x_F = 2x_E - x_D, \quad y_F = 2y_E - y_D.$$

Führt man die für x_D, y_D und x_E, y_E gefundenen Werte ein, so ergibt sich:

$$(1) \qquad x_F = \frac{ac^2\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad y_F = -\frac{bc^2\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, so erkennt man, daß der Brennpunkt F eine Kurve 4. Ordnung beschreibt. Ihr Flächeninhalt U_F bestimmt sich nach der Formel

$$U_F = \tfrac{1}{2}\int(y\,dx - x\,dy).$$

Nach einfachen Rechnungen findet man:

$$U_F = 2abc^4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2},$$

woraus wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

folgt:

$$U_F = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)c^4}{a^2b^2}.$$

Digitized by Google

Der Scheitel der Parabel ist der Schnittpunkt der Scheiteltangente und der Achse. Die Richtung dieser beiden Geraden ist leicht zu ermitteln, da die der Leitlinie bekannt ist. Berücksichtigt man noch, daß die Scheiteltangente durch den Punkt E, die Achse durch den Punkt F gehen muß, so erhält man als Gleichung der Scheiteltangente:

$$(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(ay\cos\varphi - bx\sin\varphi) = -abc^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

als Gleichung der Achse:

$$(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(by\sin\varphi + ax\cos\varphi) = c^2(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi).$$

Diese beiden Gleichungen liefern als Koordinaten des Scheitels:

$$(2)\qquad x_S = \frac{a^3c^2\cos^3\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2}, \qquad y_S = -\frac{b^3c^2\sin^3\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2}.$$

Durchläuft der Punkt M die Ellipse, so beschreibt der Scheitel S der Parabel eine Kurve 8. Ordnung. Berechnet man aus (2) dx und dy und setzt in

$$U_S = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx)$$

ein, so ergibt sich nach einfacher Reduktion

$$U_S = 6a^3b^3c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^4}.$$

Substituiert man $\operatorname{tg}\varphi = t$ und sodann $t = \frac{a}{b}\operatorname{tg} u$, so geht das Integral über in

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2(1+t^2)\,dt}{(a^2+b^2t^2)^4} = \frac{1}{a^5b^3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\cos^4 u\,du + \frac{a^2}{b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\cos^2 u\,du\right].$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\cos^4 u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\cos^2 u\,du = \frac{\pi}{32},$$

daher schließlich

$$U_S = \frac{3\pi(a^2+b^2)c^4}{16a^2b^2}.$$

Man sieht also, daß sich der Flächeninhalt der Ortskurve S zu dem der Ortskurve F verhält wie 3 : 8.

Zusätze. 1. Der Punkt E beschreibt eine Kurve 6. Ordnung vom Flächeninhalt $\frac{3}{2}\pi(a-b)^2$ (vgl. auch meine Lösung zu Aufg. **260**, Nr. 2 in **16**, 261). Ihre Fläche ist das Dreifache von der der Fußpunktkurve der Evolute der gegebenen Ellipse in bezug auf den Mittelpunkt.

2. Die Gleichung der Parabel kann in die Form gesetzt werden:

$$\sqrt{ax}\cos\varphi \pm \sqrt{-by}\sin\varphi = c.$$

Digitized by Google

3. Auf jeder Achse der Ellipse ist der Berührungspunkt der Parabel mit dieser Achse der konjugierte harmonische Punkt zu dem Schnittpunkt der Normale mit dieser Achse in bezug auf die beiden Spitzen der Ellipsenevolute.

4. Die Berührungssehne der Parabel mit den Ellipsenachsen hüllt die Ellipse $a^2x^2 + b^2y^2 = 4c^4$ ein.

5. Zieht man zu den Achsen durch die Berührungspunkte der Parabel mit diesen Achsen Parallelen, so beschreibt ihr Schnittpunkt die Kreuzkurve

$$\frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{b^2y^2} = \frac{1}{c^4}.$$

6. Die Parabel hüllt außer der Ellipsenevolute noch die folgende Kurve 8. Ordnung ein:

$$x = \frac{c^2}{a}\frac{\cos^3\varphi}{\cos^2 2\varphi}, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\frac{\sin^3\varphi}{\cos^2 2\varphi}.$$

Berlin. WERNER GAEDECKE.

Lösungen sind auch von den Herren C. Hoffmann und O. Degel eingegangen. Herr Degel fügt noch hinzu, daß der Ort von F eine bizirkulare rationale C_4 mit der Gleichung $(x^2+y^2)^2 - \frac{c^4}{a^2}x^2 - \frac{c^4}{a^2}y^2 = 0$ ist, die in O und den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten I und J Doppelpunkte hat. Sie kann auch als Fußpunktkurve der Ellipse mit den Halbachsen $\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{b}$ in bezug auf O aufgefaßt werden.

Zu **342** (Bd. XVIII, S. 362) (G. Kober). — Die Fußpunkte und der Schnittpunkt von zwei Normalen eines Kegelschnittes liegen mit seinem Mittelpunkte und den unendlich fernen Achsenpunkten in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der drei Geraden ist, auf denen die Projektionsstrahlen der beiden Punkte des Grundkegelschnittes die Achsen und einander schneiden.

Erster Beweis. Sind A und B die unendlich fernen Punkte der Achsen, A_1A_2 und B_1B_2 die Treffpunkte der Normalen der Punkte C_1 und C_2 des Kegelschnitts mit diesen Achsen und trifft die Gerade A_2B_1 die Geraden C_1A und C_2B in den Punkten E und F, so ist

$$\frac{C_1A_1}{C_1B_1} = \frac{EA_2}{EB_1}, \quad \frac{C_2A_2}{C_2B_2} = \frac{FA_2}{FB_1};$$

und da $C_1A_1B_1$, $C_2A_2B_2$ Normalen des Kegelschnittes sind, so werden die rechten Seiten der Gleichungen auch gleich, d. h. die Punkte F und E koinzidieren, und also treffen sich die Geraden B_1A_2, C_1A und C_2B in einem Punkte C.

Ist aber D der Schnitt jener Normalen und M der Mittelpunkt des Kegelschnitts, so ist C_1AMBC_2D ein Pascalsechseck mit der Pascalgerade B_1A_2C, woraus der erste Teil des Satzes folgt.

Wegen den der gleichseitigen Hyperbel C_1AMBC_2D einbeschriebenen Vierecken C_1AC_2B, C_1AMB und C_2AMB sind aber die im zweiten Teile

Digitized by Google

des Satzes angegebenen Geraden die Polaren der unendlich fernen Punkte der Geraden C_1C_2, C_1M und C_2M, also treffen sich jene Polaren im Mittelpunkte der Hyperbel.

Ist der angenommene Kegelschnitt eine Parabel mit der Achse A_1A_2A, so wird wegen der gleichen Subnormalen $C_1A_1 \parallel CA_2$; die Punkte A und M koinzidieren und jene Achse wird eine Asymptote der Hyperbel, während der Mittelpunkt auf der durch C gehenden Diagonale des Rechteckes liegt, von welchem C_1C_2 die andere Diagonale ist.

Bemerkung. Fällt der Punkt C_2 in C_1, so trifft die im Punkte A_1 auf der Normale $C_1A_1B_1$ errichtete Senkrechte als Pascalgerade des der Hyperbel einbeschriebenen Sechseckes C_1C_1MABD, den Durchmesser MC_1 des Grundkegelschnitts auf der Seite BD, womit sich der Krümmungsmittelpunkt D dieses Kegelschnitts im Punkte C_1 nach der Mannheimschen Konstruktion ergibt, während die Pascalgerade des Sechseckes ABC_1C_1DM das auf der Tangente C_1C_1 im Punkte (C_1C_1, MA) errichtete Lot ist, womit auch die in Aufgabe 331 beschriebene Konstruktion bewiesen ist.

Klausenburg. L. Klug.

Zweiter Beweis. Ist $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ die Gleichung des gegebenen Kegelschnitts, so haben die Normalen in den Punkten (x_1y_1) und (x_2, y_2) die Gleichungen

$$a^2y_1x - b^2x_1y = c^2x_1y_1, \quad \text{und} \quad a^2y_2x - b^2x_2y = c^2x_2y_2,$$

wo $c^2 = a^2 - b^2$; hieraus folgt für ihren Schnittpunkt (x_3, y_3):

$$(1) \qquad x_3 = \frac{c^2}{a^2}\frac{x_1x_2(y_1 - y_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}, \quad y_3 = \frac{c^2}{b^2}\frac{y_1y_2(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}.$$

Ein Kegelschnitt durch (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(0, 0)$ und die unendlich fernen Achsenpunkte ist eine gleichseitige Hyperbel mit zu diesen Axen parallelen Asymptoten, hat also eine Gleichung von der Form:

$$(2) \qquad xy + Ax + By = 0.$$

Die Koeffizienten A und B bestimmen sich aus den beiden Gleichungen

$$Ax_1 + By_1 = -x_1y_1, \quad Ax_2 + By_2 = -x_2y_2,$$

woraus folgt,

$$(3) \qquad A = \frac{y_1y_2(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2} = \frac{b^2}{c^2}y_3, \quad B = -\frac{x_1x_2(y_1 - y_2)}{x_2y_1 - x_1y_2} = -\frac{a^2}{c^2}x_3.$$

Als Koordinaten des Mittelpunkts (x_0, y_0) bekommt man daher:

$$(4) \qquad x_0 = -B = \frac{x_1x_2(y_1 - y_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}, \quad y_0 = -A = -\frac{y_1y_2(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2},$$

und wegen

$$\frac{x_0}{x_1} + \frac{y_0}{y_1} = \frac{x_2(y_1 - y_2) - y_2(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2} = 1,$$

$$\frac{x_0}{x_2} + \frac{y_0}{y_2} = \frac{x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2} = 1,$$

$$(y_0 - y_2)(x_1 - x_2) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1) =$$

$$= \frac{x_1y_2(y_2 - y_1)}{x_2y_1 - x_1y_2}(x_1 - x_2) - \frac{x_1y_2(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}(y_2 - y_1) = 0$$

Digitized by Google

liegt (x_0, y_0) auf den drei Geraden der Gleichungen

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} - 1 = 0, \quad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} - 1 = 0,$$
$$(y - y_2)(x_1 - x_2) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0,$$

die in der Aufgabe genannt sind.

Zusatz: Konstruiert man eine durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gehende gleichseitige Hyperbel mit zu den Achsen parallelen Asymptoten, die den Kegelschnitt berührt, so geht sie durch den Krümmungsmittelpunkt des Berührungspunktes hindurch.

Die Hyperbel schneidet den Kegelschnitt in zwei weiteren reellen oder imaginären Punkten (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), deren Normalen sich nach ebendem Satz auf derselben Hyperbel schneiden müssen. Stellt man aber aus (2) und (3) die Hyperbelgleichung in der Form $c^2xy + b^2y_3x - a^2x_3y = 0$ her, so erkennt man, daß dies diejenige Hyperbel ist, welche die Fußpunkte der durch (x_3, y_3) hindurchgehenden Normalen ausschneidet (vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 5. Aufl., Leipzig 1887, S. 345). Die Normalen der Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_1', y_1'), (x_2', y_2') treffen sich also in einem Punkt (x_3, y_3) dieser Hyperbel.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Lösungen sind auch von den Herren W. Stegemann und O. Degel eingegangen.

Zu **343** (Bd. XVII, S. 362) (G. Kober). — Die ebenen Kurven einer Fläche 2. Ordnung, deren Ebenen einen Büschel bilden, erscheinen jedem Punkte dieser Fläche als ein Kurvenbüschel 2. Ordnung. Auf welcher zweiten Ebene schneiden sich die projizierenden Kegel?

Erste Lösung. Der Strahlenbüschel der Polarenpaare der Berührungsebene in dem gemeinsamen Scheitel der projizierenden Kegel ist, weil das zugehörige Polarbündel ein parabolisches ist, zugleich der Strahlenbüschel der konjugierten Polaren dieser Kegel, daher ist jene Berührungsebene die zweite Ebene, in welcher sich die Kegel treffen.

Kolozsvár. L. Klug.

Zweite Lösung. Von dem Grundtetraeder $x_1x_2x_3x_4 = 0$ ist die vierte Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ein Punkt der Fläche $\sum_1^4 a_{ij}x_ix_j = 0$, wenn $a_{44} = 0$ ist. Diese den Schnitt des Kegels $\sum_1^3 a_{ij}x_ix_j = 0$ und des Ebenenpaares $x_4\sum_1^3 a_{i4}x_i = 0$ enthaltende Fläche

$$F \equiv \sum_1^3 a_{ij}x_ix_j + 2x_4\sum_1^3 a_{i4}x_i = 0$$

schneidet jede durch die Kante $x_3 = x_4 = 0$ gehende Ebene $x_4 - \lambda x_3 = 0$ in

Digitized by Google

einem Kegelschnitte, den ein den Kegel $\sum_1^3 a_{ij}x_ix_j = 0$ auf dem Ebenenpaare $x_3\sum_1^3 a_{i4}x_i = 0$ schneidender Kegel

$$K \equiv \sum_1^3 a_{ij}x_ix_j + 2\lambda x_3 \sum_1^3 a_{i4}x_i = 0$$

projiziert. Die zweite Ebene, auf der die projizierenden, auf der Grundebene $x_3 = 0$ sich schneidenden Kegel $K = 0$ sich schneiden, ist also die die Fläche $F = 0$ in ihrem Grundpunkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ berührende Ebene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_4} \equiv \sum_1^3 a_{i4}x_i = 0.$$

Holzminden. G. Kober.

Eine Lösung ist auch von Herrn O. Degel eingegangen.

Zu 346 (Bd. XVII, S. 363) (C. Hoffmann). — Die Fläche zwischen einer Parabel und dem geometrischen Ort der Mitte der Parabelsehnen von gleicher Länge ist gleich dem Halbkreis über dieser Sehne als Durchmesser, während der Schwerpunkt dieser Fläche ins Unendliche fällt.

Bezeichnet man eine Parabelsehne mit $AB = 2l$ und die Koordinaten von A und B bzw. mit x_1, y_1 und x_2, y_2, so ist $4l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, oder wegen $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$:

$$(1) \qquad 4l^2 = \frac{(y_1 - y_2)^2[(y_1 + y_2)^2 + 4p^2]}{4p^2}.$$

Sind x, y die Koordinaten der Mitte von AB, so ist

$$(2) \qquad 2x = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p}, \qquad (3) \qquad 2y = y_1 + y_2.$$

y_1 und y_2 ist zwischen (1), (2) und (3) zu eliminieren. Quadriert man (3) und beachtet (2), so hat man

$$4px + 2y_1y_2 = 4y^2, \quad \text{d. h.} \quad y_1y_2 = 2(y^2 - px).$$

Nun ist $(y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 = 4y^2 - 8(y^2 - px) = 4(2px - y^2)$, mithin wird (1): $4l^2 = \frac{4(2px - y^2)(4y^2 + 4p^2)}{4p^2}$, also ist

$$(4) \qquad (2px - y^2)(y^2 + p^2) = l^2p^2$$

der gesuchte Ort und zwar eine Kurve 4. Ordnung, die den Scheitel $x = \frac{l^2}{2p}$, $y = 0$ besitzt. Sie nähert sich asymptotisch der Parabel. (4) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$(5) \qquad x = \frac{1}{2p}\left[y^2 + \frac{l^2p^2}{y^2 + p^2}\right].$$

Das Flächenelement $x\,dy$ der Quartik ist

$$(6) \qquad x\,dy = \frac{dy}{2p}\left(y^2 + \frac{l^2p^2}{y^2 + p^2}\right),$$

Digitized by Google

das der Parabel

$$x_0 dy = \frac{y^2}{2p} dy. \tag{7}$$

Die Differenz von (6) und (7) gibt das zwischen diesen beiden Kurven gelegene Flächenelement $dU = \frac{l^2 p}{2(y^2+p^2)} dy$, also

$$U = l^2 p \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+p^2} = \frac{\pi l^2}{2}, \text{ q. e. d.}$$

Bemerkenswert ist, daß der Flächeninhalt unabhängig von p, d. h. von der Gestalt der Parabel ist.

Die Guldinsche Regel ergibt, wenn ξ die Abszisse des Schwerpunktes bezeichnet ($\eta = 0$): $U \cdot \xi = 2 \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\frac{x+x_0}{2}\right) dU$, also

$$\frac{\pi l^2}{2} \cdot \xi = \int_0^\infty \frac{l^2 p\, dy}{2(y^2+p^2)} \left[2y^2 + \frac{l^2 p^2}{y^2+p^2}\right] \cdot \frac{1}{2p},$$

woraus

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2y^2}{y^2+p^2} + \frac{l^2 p^2}{(y^2+p^2)^2} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_0^\infty dy - 2p^2 \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+p^2} + l^2 p^2 \int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+p^2)^2} \right].$$

Da die beiden letzten Integrale endlich sind, das erste dagegen unendlich ist, so ergibt sich in der Tat $\xi = \infty$, $\eta = 0$.

Zusatz. Der Ort der Pole der Parabelsehnen von gleicher Länge ist die Quartik

$$(y^2 - 2px)(y^2 + p^2) = p^2 l^2, \tag{8}$$

die zu der vorhergehenden (4) in naher Beziehung steht. Sie läßt sich auch in der Form

$$x = \frac{1}{2p} \left(y^2 - \frac{p^2 l^2}{y^2+p^2} \right)$$

schreiben, und man erkennt dann die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die Fläche zwischen dem Ort der Pole der Parabelsehnen von gleicher Länge und der Parabel ebenso groß ist wie die zwischen der Parabel und dem Ort der Mitten der Parabelsehnen von gleicher Länge gelegene Fläche.

Vgl. auch die bei Loria, Spezielle Kurven, 2. Aufl., 1. Bd., 1910, S. 233, Nr. 100 a) in den Anmerkungen 3)—5) aufgeführten Abhandlungen.

Berlin. Werner Gaedecke.

Anmerkung des Aufgabenstellers. Der Ort der Sehnenmitten hat für $l \leqq p$ hinsichtlich der y-Achse das Minimum $x = \frac{l^2}{2p}$, $y = 0$; für $l > p$

Digitized by Google

zwei Minima $x = l - \frac{p}{2}$, $y = \pm\sqrt{p(l-p)}$ und ein Maximum $x = \frac{l^2}{2p}$, $y = 0$. — Die Gleichung des Orts der Pole in der zweiten Form folgt sofort aus (5) auf Grund der bekannten Sätze über die Lage von Pol und Sehne bei der Parabel. Die Gleichheit der Flächen ergibt sich aus demselben Grund ohne Rechnung nach dem Cavalierischen Prinzip und erstreckt sich daher auf beliebige Flächenstücke zwischen Parallelen zur Parabelachse. — Der Wert $\xi = \infty$ resultiert sofort, weil der Integrand für $y = \infty$ endlich bleibt.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Lösung auch von den Herren W. Wangerin (Königsberg i. P.), W. Stegemann und den stud. math. Werner, Goll und Fladt (Tübingen) eingelaufen.

Zu **349** (Bd. XVII, S. 364) (Fr. Meyer). — Es seien a, b, c die Kantenwinkel, α, β, γ die Flächenwinkel eines Dreikants, ferner A, B, Γ die spitzen Winkel, die die Kanten des Dreikants mit den entsprechenden Kanten des Polardreikants bilden. Dann verhalten sich die Kosinus der Winkel A, B, Γ umgekehrt wie die Sinus der Kantenwinkel a, b, c und damit auch umgekehrt wie die Sinus der Flächenwinkel α, β, γ. Und zwar ist:

$$\cos A \sin a = \cos B \sin b = \cos \Gamma \sin c = RS,$$

$$\cos A \sin \alpha = \cos B \sin \beta = \cos \Gamma \sin \gamma = \frac{1}{R}\Sigma,$$

wo

$$S = \sin a \sin b \sin c, \quad \Sigma = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad R = \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Überdies ist:

$$\cos A \cos B \cos \Gamma = S\Sigma.$$

Erste Lösung: In dem spärischen Dreiecke, dessen Seiten a, b, c und dessen Winkel α, β, γ sind, sind A, B, Γ die Komplemente der drei Höhen (vgl. Kambly, 3. Teil, 6. Aufl., Breslau 1868, Abb. 16 a). Daher ist:

$$\cos A = \sin b \sin \gamma = \sin \beta \sin c$$

$$\cos B = \sin c \sin \alpha = \sin \gamma \sin a$$

$$\cos \Gamma = \sin a \sin \beta = \sin \alpha \sin b.$$

Womit alles bewiesen ist.

Holzminden. G. Kober.

Zweite Lösung: Die Formeln sind eine unmittelbare Folge des Graßmannschen Satzes, wonach das Volumen V eines Quaders mit den Kanten a_1, a_2, a_3 gleich dem äußeren Produkt $[a_1 a_2 a_3]$ ist. Man braucht dieses nur auf die verschiedenen Weisen auszudrücken. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
[a_1 a_2 a_3] &= a_1 a_2 a_3 \sin (a_1, a_2, a_3) \\
&= [a_1 \; a_2 a_3] = a_1 a_2 a_3 \sin (a_2, a_3) \cos (a_1, |a_2 a_3) \\
&= [a_2 a_3 \; a_1] = a_1 a_2 a_3 \sin (a_3, a_1) \cos (a_2, |a_3 a_1) \\
&= [a_3 a_1 \; a_2] = a_1 a_2 a_3 \sin (a_1, a_2) \cos (a_3, |a_1 a_2).
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Winkel $(a_2, a_3), \ldots$ stimmen mit den a, b, c des Aufgabenstellers überein, ebenso die Winkel $(a_1, a_2 a_3), \ldots$ mit seinen A, B, Γ. Demnach wird

$$V = a_1 a_2 a_3 \sin a \cos A = a_1 a_2 a_3 \sin b \cos B = a_1 a_2 a_3 \sin c \cos \Gamma$$
$$= a_1 a_2 a_3 \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}$$
$$= a_1 a_2 a_3 \sin b \sin c \sin \alpha = a_1 a_2 a_3 \sin c \sin a \sin \beta = a_1 a_2 a_3 \sin a \sin b \sin \gamma.$$

Diese Ableitung läßt auch sogleich übersehen, daß und wie sich die Formeln auf den R_n verallgemeinern lassen.

Nebenbei ergibt sich für das Quadervolumen:

$$V = a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{\cos A \cos B \cos \Gamma}{k}}$$
$$= a_1 a_2 a_3 k \sin a \sin b \sin c = \frac{a_1 a_2 a_3}{k^2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

wo k die Konstante des Sinussatzes $\left(\frac{\sin \alpha}{\sin a}\right)$ bedeutet.

Und weiter findet man

$$\cos A \cos B \cos \Gamma = 4 k \sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)$$
$$= \frac{4}{k^2} \sin \sigma \sin (\sigma - \alpha) \sin \sigma - \beta) \sin (\sigma - \gamma)$$

für $2 s = a + b + c$, $2 \sigma = \alpha + \beta + \gamma$.

Berlin. E. Jahnke.

Eine Lösung ist auch von Herrn C. Hoffmann (Schorndorf) eingegangen.

Zu **351** (Bd. XVII, S. 365) (W. Fr. Meyer). — Aus der Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist durch Differentiation direkt die elliptische Differentialgleichung herzuleiten.

Diese Ableitung findet sich bei Durège, Theorie der Elliptischen Funktionen, 4. Aufl., Leipzig 1887, S. 129.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Eine Lösung ist von Herrn W. Wangerin (Königsberg) eingelaufen.

Zu **354** (Bd. XVII, S. 365) (R. Mehmke). — In einem ebenen Polarsystem sei p der Pol einer beliebigen Gerade G. Die Verbindungsgeraden der Ecken a, b, c eines beliebigen Dreieckes mit p mögen G in den Punkten a', b', c' schneiden. Ferner seien a'', b'', c'' die Pole der Seiten bc, ca, ab des Dreiecks. Dann gehen die Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ durch einen und denselben Punkt.

Lösung: Unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß $a_{ji} = a_{ij}$ sei, ist dem Dreieck des Dreiseites $x_1 x_2 x_3 = 0$ das Dreiseit $\Sigma a_{1i} x_i \cdot \Sigma a_{2i} x_i \cdot \Sigma a_{3i} x_i = 0$ polar; denn dann liegen beide Dreiseite und ihre Gegendreiecke perspektiv.

Digitized by Google

In dem hierdurch bestimmten Polarfelde hat irgend ein Punkt $x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3'$ die Polare

$$x_1 \Sigma a_{1i} x_i' + x_2 \Sigma a_{2i} x_i' + x_3 \Sigma a_{3i} x_i' = 0.$$

Die diesen Punkt enthaltenden drei Eckenstrahlen

$$\Sigma a_{2i} x_i : \Sigma a_{3i} x_i = \Sigma a_{2i} x_i' : \Sigma a_{3i} x_i'$$
$$\Sigma a_{3i} x_i : \Sigma a_{1i} x_i = \Sigma a_{3i} x_i' : \Sigma a_{1i} x_i'$$
$$\Sigma a_{1i} x_i : \Sigma a_{2i} x_i = \Sigma a_{1i} x_i' : \Sigma a_{2i} x_i'$$

des Dreiseits $\Sigma a_{1i} x_i \cdot \Sigma a_{2i} x_i \cdot \Sigma a_{3i} x_i = 0$ haben als Transversalen des Dreiseites $x_1 x_2 x_3 = 0$ die Gleichungen:

$$(a_{12} \Sigma a_{3i} x_i' - a_{13} \Sigma a_{2i} x_i') x_1 + (a_{22} \Sigma a_{3i} x_i' - a_{23} \Sigma a_{2i} x_i') x_2 + \\ + (a_{23} \Sigma a_{3i} x_i' - a_{33} \Sigma a_{2i} x_i') x_3 = 0$$
$$(a_{13} \Sigma a_{1i} x_i' - a_{11} \Sigma a_{3i} x_i') x_1 + (a_{23} \Sigma a_{1i} x_i' - a_{12} \Sigma a_{3i} x_i') x_2 + \\ + (a_{33} \Sigma a_{1i} x_i' - a_{13} \Sigma a_{3i} x_i') x_3 = 0$$
$$(a_{11} \Sigma a_{2i} x_i' - a_{12} \Sigma a_{1i} x_i') x_1 + (a_{12} \Sigma a_{2i} x_i' - a_{22} \Sigma a_{1i} x_i') x_2 + \\ + (a_{13} \Sigma a_{2i} x_i' - a_{23} \Sigma a_{1i} x_i') x_3 = 0$$

schneiden also die ihnen konjugierte Gerade

$$x_1 \Sigma a_{1i} x_i' + x_2 \Sigma a_{2i} x_i' + x_3 \Sigma a_{3i} x_i' = 0$$

der Reihe nach auf den die Gegenecken dieses Dreiseites projizierenden drei Strahlen

$$x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1i} x_i', & 0, & \Sigma a_{3i} x_i' \\ a_{12}, & \Sigma a_{2i} x_i', & a_{33} \\ a_{13}, & \Sigma a_{3i} x_i', & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Sigma a_{1i} x_i', & \Sigma a_{2i} x_i', & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & \Sigma a_{2i} x_i' \\ a_{13}, & a_{23}, & \Sigma a_{3i} x_i' \end{vmatrix} = \sigma_{12} : \sigma_{13}$$

$$x_3 : x_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \Sigma a_{1i} x_i' \\ \Sigma a_{1i} x_i', & \Sigma a_{2i} x_i', & 0 \\ a_{13}, & a_{23}, & \Sigma a_{1i} x_i' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Sigma a_{1i} x_i', & a_{12}, & a_{13} \\ 0, & \Sigma a_{2i} x_i', & \Sigma a_{3i} x_i' \\ \Sigma a_{3i} x_i', & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{23} : \sigma_{12}$$

$$x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1i} x_i', & a_{12}, & a_{13} \\ \Sigma a_{2i} x_i', & a_{22}, & a_{23} \\ 0, & \Sigma a_{2i} x_i', & \Sigma a_{3i} x_i' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}, & \Sigma a_{1i} x_i', & a_{13} \\ a_{12}, & \Sigma a_{2i} x_i', & a_{23} \\ \Sigma a_{1i} x_i', & 0, & \Sigma a_{3i} x_i' \end{vmatrix} = \sigma_{13} : \sigma_{23}$$

des Punktes $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\sigma_{23}} : \frac{1}{\sigma_{13}} : \frac{1}{\sigma_{12}}$.

Bemerkung: Nennt man eine Projektion, deren Zentrum und Achse Pol und Polare eines Polarfeldes sind, eine Polarprojektion, so lautet der bewiesene Satz: In dem durch zwei einander polare Dreiecke und Dreiseite bestimmten Polarfelde ist jede Polarprojektion des einen Dreiecks eine Projektion des anderen Dreiecks.

Holzminden. G. Kober.

Digitized by Google

2. Sprechsaal.

Vermeintliche Beweise des Fermatschen Satzes.

111. Hermann Haedicke (Stand unbekannt). 12 Seiten 8^0.

Der Verfasser fordert bei den an seine Figur 4 angeschlossenen Betrachtungen implizit, daß die Zahlen x, y, z außer der Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ zugleich noch die weitere $x^2 + y^2 = z^2$ befriedigen. Solche Zahlen gibt es allerdings für > 2 nicht. Ob Herr Haedicke seine Nebenforderung *bewußt* erhebt, weiß ich nicht; manchmal scheint es so, manchmal auch wieder nicht. Wie wenig er übrigens den Sinn des Fermatschen Satzes verstanden hat, zeigt sich auch darin, daß er auf die Ganzzahligkeit der x, y, z gar keinen Wert legt; Irrationale sind bei ihm gar nicht ausgeschlossen.

Tübingen. Oskar Perron.

3. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Grassmann, Hermann, Gesammelte Werke. Dritten Bandes zweiter Teil: Graßmanns Leben, geschildert von Fr. Engel. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 18.—.

Greve, W., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ausg. A: ohne — Ausg. B: mit Tabellen aus den Gebieten der Naturwissenschaft. Bielefeld 1911. Velhagen und Klasing. ℳ 1.80 bzw. 2.25.

Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Berichte und Mitteilungen. VI. ℳ 0.50.

Klein, F., Aktuelle Probleme der Lehrerbildung. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Nielsen, N., Elemente der Funktionentheorie. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 15.—.

Øde, Kolbjørn, Das Pythagoreische Dreieck und Faktorenzerlegung der Gleichung $x^n + z^n = A^n$, wenn $n > 2$. Selbstverlag.

Poske, Fr., Oberstufe der Naturlehre (Physik nebst Astronomie und mathematischer Geographie). 3. Aufl. Braunschweig 1911, Vieweg u. S. ℳ 4.—.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung II. 4. u. 5. Aufl. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 13.—.

Schmid, Th., Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 4.—.

Digitized by Google

Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten.

Von M. Zacharias in Berlin.

Einleitung.

Die nachfolgenden Zeilen enthalten synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Die rein geometrische Behandlung dieser Flächen wird durch einen von Herrn Jolles bewiesenen Satz über zwei auf einem Kegel zweiter Ordnung liegende Raumkurven dritter Ordnung ermöglicht.[1]) Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie sämtliche Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten auf Grund jenes Satzes konstruiert werden können; außerdem werden einige allgemeine Sätze über die durch die Doppelpunkte gehenden kubischen Raumkurven auf diesen Flächen und ihre Beziehungen zu einem Büschel polarer Bündel (Kegelbüschel) entwickelt. Da der Büschel polarer Bündel von jeder Ebene in einem Büschel polarer Felder geschnitten wird, so können im zweiten Teile einige Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten aus entsprechenden Eigenschaften des Büschels polarer Felder abgeleitet werden. Die synthetische Theorie dieses Büschels ist von Herrn Jolles in der Abhandlung „Eine einfache synthetische Ableitung der Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder“[2]) in ihren Grundzügen einheitlich, d. h. völlig unabhängig von beschränkenden Voraussetzungen über die Inzidenzkurven der den Büschel bildenden polaren Felder entwickelt worden. Zwei an diese grundlegende Abhandlung anknüpfende Arbeiten des Verfassers „Über die allgemeinen Eigenschaften und über die verschiedenen Arten der Büschel polarer Felder“[3]) werden im dritten Teile der vorliegenden Untersuchungen als Hilfsmittel zu einer erschöpfenden Übersicht über die verschiedenen Arten der Flächen

1) Reye, Geometrie der Lage, II. Abt., 4. Aufl., 299—300.

2) Jolles, Archiv der Math. und Phys., (3) **11**, 72—76.

3) Zacharias, Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges., VIII. Jahrg., 31—54.

Digitized by Google

dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten herangezogen.[1]) Der vierte Teil enthält Bemerkungen über die Polarentheorie und insbesondere das Sylvestersche Pentaeder jener Flächen.

I. Konstruktion der kubischen Flächen mit vier Doppelpunkten.

Jede Fläche dritter Ordnung F^3 kann bekanntlich als Ort der Schnittpunkte homologer Ebenen dreier kollinearer Bündel S, S_1 und S_2 aufgefaßt werden. Zwei kollineare Bündel besitzen ∞^1 Paare sich schneidender homologer Strahlen; der Ort ihrer Schnittpunkte ist eine durch die Mittelpunkte der Bündel gehende Raumkurve dritter Ordnung. Die beiden kubischen Raumkurven k_1^3 und k_2^3, welche von den sich schneidenden homologen Strahlen der Bündel S und S_1 einerseits und S und S_2 andrerseits erzeugt werden, haben den Punkt S gemein. Sie können außerdem noch höchstens vier Punkte gemein haben, die aber auch paarweise konjugiert-imaginär sein können; jeder dieser vier Punkte ist ein *Doppelpunkt* von F^3.[2]) Eine Fläche dritter Ordnung kann demnach nicht mehr als vier (reelle oder paarweise konjugiert-imaginäre) Doppelpunkte besitzen. *Mit F^3 werde im folgenden, wo nichts anderes angegeben ist, stets eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten bezeichnet.* Die vier Doppelpunkte liegen paarweise auf zwei stets reellen Geraden x_1 und x_2.

In einem Doppelpunkte schneiden sich alle kubischen Raumkurven zweier konjugierter Netze von F^3.[2]) Irgend zwei Punkte S und T einer Fläche dritter Ordnung lassen sich im allgemeinen durch je eine Kurve des ersten und des zweiten Netzes verbinden.[3]) Auf der Fläche F^3 sind diese beiden Kurven identisch, weil sie die Punkte S und T und die vier Doppelpunkte gemein haben. *Zwei Punkte einer Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten lassen sich also nur durch eine einzige durch die vier Doppelpunkte gehende kubische Raumkurve verbinden.*

---

1) In der Abhandlung des Herrn W. Jaeckel: „Geometrische Untersuchungen über Kurven auf Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten" (Wissenschaftl. Beilage zum Jahresbericht des Kgl. Gymn. zu Ohlau, 1909) wird die wesentliche Frage nach der Realität der Doppelpunkte nicht berührt. Die dort zur Ableitung einiger Sätze benutzte Abbildung der Fläche auf einer Ebene durch Projektion aus einem Doppelpunkte setzt mindestens die Realität dieses einen Doppelpunktes voraus und ermangelt daher der notwendigen Allgemeinheit. Herr Sturm leitet im letzten Kapitel seiner bekannten „Synthetischen Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung", Leipzig 1867, die Flächen dritter Ordnung mit Doppelpunkten als Übergangsformen zwischen verschiedenen Gattungen von Flächen ohne Doppelpunkte her, ohne aber auf die Eigenschaften dieser Übergangsflächen näher einzugehen.

2) Reye, a. a. O. III. Abt., 4. Aufl., 82.

3) Reye, a. a. O. III. Abt., 4. Aufl., 77—78.

Digitized by Google

Die durch den Punkt S und die vier Doppelpunkte von F^3 gehenden kubischen Kurven der Fläche werden aus S durch Kegel zweiter Ordnung projiziert, welche auf den Geraden x_1 und x_2 die Involutionen $J(x_1)$ und $J(x_2)$ hervorrufen. Diese Kegel sind die Inzidenzflächen desjenigen *Büschels polarer Bündel* $[S]$, dessen Grundstrahlen die Doppelpunkte von $J(x_1)$ und $J(x_2)$ aus S projizieren. *Jede durch S und die Doppelpunkte gehende kubische Kurve von F^3 liegt also auf einem Kegel des Büschels* $[S]$.

Ist T irgend ein Punkt der Schnittlinie der Fläche F^3 und eines dem Büschel angehörenden Kegels (S), so existiert auf F^3 eine einzige kubische Kurve k^3, welche S mit T verbindet und durch die Doppelpunkte geht. Der Kegel $S(k^3)$ gehört dem Büschel $[S]$ an. Durch T geht aber nur ein einziger Kegel dieses Büschels. Also ist $S(k^3) \equiv (S)$. Der vollständige Durchschnitt eines Kegels zweiter Ordnung und einer Fläche dritter Ordnung ist von der sechsten Ordnung. Der Kegel (S) hat daher mit F^3 außer k^3 noch eine zweite die Doppelpunkte enthaltende kubische Kurve gemein. *Jeder Kegel des Büschels* $[S]$ *schneidet also F^3 in zwei durch die Doppelpunkte gehenden kubischen Kurven.*

Die durch S gehenden Tangenten dieser beiden Kurven bilden den Durchschnitt des Kegels (S) mit der im Punkte S an F^3 gelegten Tangentialebene τ. Jede durch S gelegte Ebene schneidet die Inzidenzkegel des Büschels $[S]$ in Strahlenpaaren einer Involution. *Also bilden die Schnittlinien der im Punkte S an F^3 gelegten Tangentialebene und der Kegel des Büschels* $[S]$ *eine Strahleninvolution* $S(\tau)$. Die (reellen oder konjugiert-imaginären) Doppelstrahlen dieser Involution sind die durch S gehenden *Haupttangenten.*

Man erhält eine Fläche F^3, wenn man von zwei kubischen Raumkurven k_1^3 und k_2^3 ausgeht, die auf einem Strahlenkegel zweiter Ordnung liegen. Wie Herr Jolles a. a. O. beweist[1]), *haben zwei solche Raumkurven stets den Mittelpunkt S des Kegels und zwei reelle Bisekanten x_1 und x_2 gemein und rufen auf diesen dieselben Involutionen konjugierter Punkte hervor.* Die (reellen oder konjugiert-imaginären) Doppelpunkte dieser Involutionen sind Schnittpunkte von k_1^3 und k_2^3 und somit Doppelpunkte derjenigen eindeutig bestimmten Fläche 3. Ordnung F^3, auf welcher k_1^3 und k_2^3 Kurven desselben Netzes sind.[2]) Man erhält diese Fläche, wenn man auf k_1^3 einen von S verschiedenen Punkt S_1 und auf k_2^3 einen von S verschiedenen Punkt S_2 annimmt und die beiden Bündel S_1 und S_2 derart kollinear auf den Bündel S bezieht, daß sich in jedem Punkte von k_1^3 zwei homologe Strahlen von S und

1) Reye, a. a. O. II, 299—300.

2) Reye, a. a. O. III. 74 ff. und Math. Ann. 55, 257.

Digitized by Google

S_1 und in jedem Punkte von k_2^3 zwei homologe Strahlen von S und S_2 schneiden; je drei homologe Ebenen der drei Bündel schneiden sich dann in einem Punkte von F^3.

Mittels der vorstehend angegebenen Konstruktion kann jede Fläche F^3 hergestellt werden. Um dies zu beweisen, nehme man an, F^3 sei irgend eine derartige Fläche, und ihre vier Doppelpunkte seien durch zwei Involutionen $J(x_1)$ und $J(x_2)$ auf zwei beliebigen reellen Geraden x_1 und x_2 bestimmt. S sei ein beliebiger anderer Punkt von F^3 und $[S]$ derjenige Büschel polarer Bündel mit dem Mittelpunkt S, dessen Inzidenzkegel auf x_1 und x_2 die Involutionen $J(x_1)$ und $J(x_2)$ hervorrufen. Irgend ein bestimmter Kegel (S) des Büschels enthält dann, wie oben gezeigt, zwei durch S und die Doppelpunkte gehende kubische Kurven von F^3, k_1^3 und k_2^3. Nach der vorstehenden Konstruktion ist ferner eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten F_1^3 eindeutig bestimmt, auf welcher k_1^3 und k_2^3 als Kurven desselben Netzes anzusehen sind. Man muß nun beweisen, daß F_1^3 mit F^3 identisch ist. Jeder Kegel des Büschels $[S]$ schneidet F_1^3 in zwei durch die Doppelpunkte gehenden kubischen Kurven. Da k_1^3 und k_2^3 beiden Flächen angehören, so besitzen F^3 und F_1^3 im Punkte S dieselbe Tangentialebene τ; diese wird nämlich durch die im Punkte S an k_1^3 und k_2^3 gelegten Tangenten eindeutig bestimmt. Irgend ein von (S) verschiedener Kegel $(S)_1$ des Büschels $[S]$ wird von τ in zwei Strahlen t und t' geschnitten; diese sind gemeinsame Tangenten der Flächen F^3 und F_1^3 und der beiden Paare kubischer Kurven, in denen F^3 und F_1^3 von $(S)_1$ geschnitten werden. Ist l^3 eine der beiden Schnittkurven von F^3 und $(S)_1$ und l_1^3 diejenige Schnittkurve von F_1^3 und $(S)_1$, welche mit l^3 im Punkte S dieselbe Tangente t besitzt, so haben l^3 und l_1^3 außer S und den vier Doppelpunkten von $J(x_1)$ und $J(x_2)$ noch die Tangente t gemein; l^3 und l_1^3 sind also identisch. Dasselbe gilt von den beiden Kurven, welche die Tangente t' gemein haben. Die Kegel des Büschels $[S]$ schneiden also überhaupt F^3 und F_1^3 in denselben kubischen Kurven. Da nun jeder Punkt von F_1^3 mit S durch eine solche Kurve verbunden werden kann, so fällt F_1^3 Punkt für Punkt mit F^3 zusammen.

Jede beliebige durch S gelegte Ebene ε enthält außer S je eine reelle Bisekante von k_1^3 und k_2^3. In dem auf F^3 liegenden Schnittpunkte dieser beiden Bisekanten schneiden sich die in ε enthaltenen, nicht mit S inzidierenden Bisekanten aller durch S und die Doppelpunkte gehenden kubischen Kurven von F^3.[1] *Die in irgend einer Ebene des Bündels S enthaltenen, nicht mit S inzidierenden Bisekanten*

1) Reye, a. a. O. III. 79—80.

Digitized by Google

der durch S und die Doppelpunkte gehenden kubischen Kurven von F^3 bilden also einen Strahlenbüschel erster Ordnung; der Mittelpunkt desselben ist ein Punkt von F^3.

II. Die geraden Linien auf den kubischen Flächen mit vier Doppelpunkten.

Eine Fläche F^3 sei bestimmt durch zwei auf einem Kegel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkt S liegende kubische Raumkurven k_1^3 und k_2^3. Diese haben nach dem von Herrn Jolles bewiesenen Satze zwei reelle, im allgemeinen windschiefe, gemeinsame Bisekanten x_1 und x_2 und erzeugen auf diesen dieselben Involutionen konjugierter Punkte $J(x_1)$ und $J(x_2)$. Der Kegel $S(k_1^3)$ und das Ebenenpaar $\xi_1 \equiv Sx_1$ und $\xi_2 \equiv Sx_2$ (— das übrigens auch in eine Doppelebene zusammenfallen kann —) sind die Inzidenzflächen zweier polarer Bündel, welche einen Büschel solcher Bündel $[S]$ eindeutig bestimmen.[1]) Die Ebenen ξ_1 und ξ_2 haben eine stets reelle durch S gehende Gerade x gemein. (Fallen sie in eine Doppelebene zusammen, so werde eine beliebige durch S gehende Gerade dieser Doppelebene x genannt.) Dem Punkte (xx_1) entspreche in $J(x_1)$ der Punkt X_1, dem Punkte (xx_2) in $J(x_2)$ der Punkt X_2. Die Ebene $\xi \equiv (SX_1X_2)$ ist dann die Polarebene des Strahls x in bezug auf die beiden den Büschel $[S]$ bestimmenden polaren Bündel und damit in bezug auf alle Bündel von $[S]$. Man nennt eine Ebene, die in allen Bündeln von $[S]$ dieselbe Polare besitzt, eine *„Hauptebene"* und ihre Polare einen *„Hauptstrahl"* des Büschels polarer Bündel. (Fällt ξ_1 mit ξ_2 und damit auch x_1 mit x_2, $J(x_1)$ mit $J(x_2)$ und X_1 mit X_2 zusammen, so bleibt doch die Ebene ξ als Polarebene von x in bezug auf den Kegel $S(k_1^3)$ bestimmt.) Der Hauptstrahl x ist Träger der zugehörigen *„Hauptinvolution"*, deren Doppelebenen den in ein Ebenenpaar zerfallenden Inzidenzkegel eines dem Büschel $[S]$ angehörenden polaren Bündels bilden. Diese Doppelebenen sind ξ_1 und ξ_2. In jeder Doppelebene rufen alle dem Büschel angehörigen polaren Bündel eine und dieselbe Strahleninvolution hervor, deren Doppelstrahlen durch die Doppelpunkte der Fläche gehen.

Die beiden den Büschel $[S]$ bestimmenden Bündel erzeugen in der Ebene ξ zwei Strahleninvolutionen mit dem Mittelpunkt S; diese besitzen ein (reelles oder konjugiert-imaginäres) gemeinsames Paar konjugierter Strahlen y und z. y und z sind in bezug auf zwei Bündel und damit in bezug auf den ganzen Büschel $[S]$ konjugiert. y und z

1) Bei den folgenden Entwickelungen wird die Theorie des Büschels polarer Felder als bekannt vorausgesetzt und in leicht erkennbarer Weise auf den Büschel polarer Bündel oder Kegelbüschel übertragen. Vgl. S. 289, Anmerk. 2 und 3.

Digitized by Google

haben daher in allen polaren Bündeln von $[S]$ die Polarebenen $\eta \equiv (xz)$ bzw. $\zeta \equiv (xy)$. y und z sind also zwei Hauptstrahlen, η und ζ die zugehörigen Hauptebenen. Die drei Strahlen x, y und z bilden mit ihren drei Polarebenen ξ, η und ζ das *„Hauptdreikant"* des Büschels polarer Bündel.

Der reelle Hauptstrahl x ist Unisekante aller durch S und die Doppelpunkte gehenden kubischen Raumkurven von F^3. Er läßt sich mit jeder dieser Kurven durch eine Regelfläche zweiter Ordnung R^2 verbinden. Die eine Regelschar jeder Fläche besteht aus Bisekanten, die andere, der x angehört, aus Unisekanten der betreffenden Raumkurve.[1]) In jeder durch x gehenden Ebene ε bilden die Bisekanten der Kurven einen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt E auf F^3 liegt.

In jeder der beiden Ebenen ξ_1 und ξ_2 fällt der Büschel der Bisekanten in eine Gerade zusammen. *Diese beiden Geraden x_1 und x_2 gehören also ganz der Fläche F^3 an.* (Dasselbe geht auch daraus hervor, daß sich in jeder dieser beiden Geraden drei homologe Ebenen der die Fläche erzeugenden kollinearen Bündel S, S_1 und S_2 schneiden.) Alle Regelflächen R^2 haben die reellen Geraden x, x_1 und x_2 gemein. Die Mittelpunkte E der Bisekantenbüschel aller durch x gehenden Ebenen ε liegen daher in einer vierten gemeinsamen Schnittgeraden x_0 der Regelflächen R^2. *Die Gerade x_0 liegt auf der Fläche F^3;* sie gehört zu den aus Unisekanten der Kurven bestehenden Regelscharen der Flächen R^2, schneidet demnach x_1 und x_2 und ist windschief zu x. Jede reelle Hauptebene enthält je eine Bisekante von k_1^3 und k_2^3. Diese mögen als *„Hauptbisekanten"* bezeichnet werden. Die Hauptbisekanten von ξ seien $h_1^\xi h_2^\xi$, diejenigen von η $h_1^\eta h_2^\eta$ und diejenigen von ζ $h_1^\zeta h_2^\zeta$. Ferner sei $X \equiv (h_1^\xi h_2^\xi)$, $Y \equiv (h_1^\eta h_2^\eta)$ und $Z \equiv (h_1^\zeta h_2^\zeta)$. Sind η und ζ reell, so sind es auch die entsprechenden Hauptbisekanten. *x_0 ist dann die Verbindungslinie der Punkte Y und Z.*[2])

Sind die Hauptstrahlen y und z reell, und besitzen die zu ihnen gehörigen Hauptinvolutionen reelle Doppelebenen $\eta_1\eta_2$ und $\zeta_1\zeta_2$, so enthalten diese je eine reelle gemeinsame Bisekante der beiden Kurven k_1^3 und k_2^3. Diese Bisekanten seien y_1, y_2, z_1 und z_2. Auf jeder dieser Bisekanten rufen die beiden Kurven nach dem von Herrn Jolles bewiesenen Satze dieselbe Involution konjugierter Punkte hervor, deren Doppelpunkte zugleich Doppelpunkte von F^3 sind. Durch jeden der vier Doppelpunkte von F^3 geht also eine der Geraden x_1x_2, eine der Geraden

1) Reye, a. a. O. II. 166.

2) Vgl. W. Stahl, Die Raumkurve 4. Ordnung 2. Art und die desmische Fläche 12. Ordnung 4. Klasse, Crelles Journ. **101**, 84—86.

Digitized by Google

$y_1 y_2$ und eine der Geraden $z_1 z_2$. *Die vier Geraden* y_1, y_2, z_1 *und* z_2 *gehören ebenso wie* x_1 *und* x_2 *der Fläche* F^3 *an.* Im allgemeinen sind y_1 und y_2 windschief, ebenso z_1 und z_2. y_1 und y_2 werden von der Geraden $y_0 \equiv ZX$, z_1 und z_2 von der Geraden $z_0 \equiv XY$ geschnitten. y_0 *und* z_0 *bilden mit* x_0 *ein auf der Fläche* F^3 *liegendes Dreieck* XYZ. Die Ebene dieses Dreiecks werde mit δ bezeichnet.

Die Fläche F^3 *kann im allgemeinen außer den neun Geraden* $x_1 x_2 x_0$, $y_1 y_2 y_0$, $z_1 z_2 z_0$ *keine zehnte Gerade enthalten, ohne zu zerfallen.* (Die Ausnahmen, welche dann eintreten, wenn zwei zusammengehörige gemeinsame Bisekanten $x_1 x_2$ oder $y_1 y_2$ oder $z_1 z_2$ sich schneiden, werden im dritten Teile angeführt.) Um dies zu beweisen, werde folgende Bezeichnung der Doppelpunkte und ihrer Verbindungslinien festgesetzt: $D_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $D_2 \equiv (x_1, y_2, z_2)$, $D_3 \equiv (x_2, y_1, z_2)$ und $D_4 \equiv (x_2, y_2, z_1)$. Wäre nun g irgendeine zehnte Gerade von F^3, so würde diese die Ebene $D_1 D_2 D_3 \equiv x_1 y_1 z_2$ in einem Punkte treffen. Schnitte nun g diese Ebene in einem der drei Doppelpunkte, z. B. in D_1, so müßte die Ebene $(g x_1)$ mit F^3 außer g und x_1 noch eine dritte durch D_2 gehende Gerade h gemein haben. Die Gerade x_2 würde die Ebene $(g x_1)$ ebenfalls in einem auf F^3 liegenden Punkte treffen. Läge nun dieser Punkt auf g oder h, so würde entweder g in die Ebene $(x_2 y_1 z_1)$ oder h in die Ebene $(x_2 y_2 z_2)$ fallen. Läge jener Punkt weder auf g noch auf h, so würde jede durch ihn gehende Gerade der Ebene $(g x_1)$ vier Punkte mit F^3 gemein haben. In jedem Falle würde also F^3 in eine Ebene und eine Fläche zweiter Ordnung zerfallen. Schließt man dies aus, so müßte g also eine der drei Geraden $x_1 y_1 z_2$, etwa x_1, schneiden, dagegen zu y_1 und z_2 windschief sein. Die Gerade g müßte ferner die Ebene $x_1 y_2 z_1$ auch in einem Punkte treffen. Aus der Annahme, daß g die Gerade x_1 schneide, würde also folgen, daß g zu y_2 und z_1 windschief sei. Da g nun zu y_1 und z_1 windschief ist, aber eine Seite des Dreiecks $x_2 y_1 z_1$ treffen muß, so müßte x_2 von g geschnitten werden. Die Gerade g müßte ferner eine Seite des Dreiecks $x_0 y_0 z_0$ schneiden. Das könnte nicht x_0 sein; denn die beiden windschiefen Geraden x_1 und x_2 können nicht von zwei sich schneidenden Geraden getroffen werden. g müßte also entweder y_0 oder z_0 schneiden. Angenommen, g schnitte y_0. Dann würde g der Regelschar angehören, welche die Geraden x_1, x_2 und y_0 zu Leitgeraden hat. Dieser Regelschar gehören außerdem die Geraden y_1, y_2 und x_0 an. Jede Leitgerade dieser Regelschar würde also vier gerade Linien von F^3 treffen und folglich ganz der Fläche angehören; F^3 würde demnach die ganze Regelfläche enthalten. Daraus folgt, wie oben behauptet: Soll die Fläche F^3 nicht zerfallen, so kann sie nur die oben genannten neun Geraden enthalten.

Digitized by Google

Die Geraden x_1, x_2 und x_0 sind stets reell. x_0 schneidet die reelle Hauptebene ξ in einem reellen Punkte X_0. X_0 läßt sich mit S durch eine eindeutig bestimmte auf F^3 liegende und durch die Doppelpunkte gehende kubische Kurve k^3 verbinden; diese muß ξ außer in S und X_0 noch in einem dritten reellen Punkte X_0' schneiden. Der Kegel $S(k^3)$ schneidet ξ in zwei konjugierten Strahlen der Involution $\xi(yz)$, d. h. derjenigen Involution, deren Doppelstrahlen y und z sind. SX_0 und SX_0' sind also konjugierte Strahlen dieser Involution. X_0X_0' ist die in ξ liegende, nicht mit S inzidierende Bisekante von k^3, geht also durch den Schnittpunkt X der Hauptbisekanten von ξ. X_0X_0' liegt demnach in der Ebene δ. Diese schneidet F^3 in den Geraden x_0, y_0 und z_0. x_0 ist eine Unisekante von k^3; X_0' kann daher nicht auf x_0 liegen. X_0' muß demnach mit X identisch sein. *SX_0 und SX sind also konjugierte Strahlen der Involution $\xi(yz)$.*

Die im Punkte S an F^3 gelegte Tangentialebene τ schneide ξ in t_ξ. Durch jede durch S gehende Gerade t der Ebene τ geht ein Kegel (S) des Büschels $[S]$. Dieser schneide die Ebene $(xt) \equiv \varepsilon$ zum zweiten Male in t'. Dann sind x, t', $(\varepsilon\xi)$ und t vier harmonische Strahlen. Dreht sich nun t in der Ebene τ um S, so durchläuft (S) den Kegelbüschel $[S]$ und ε den Ebenenbüschel x. Die Ebene $(t't_\xi) \equiv \xi_0$ ergänzt τ, ξ und (xt_ξ) zu einem harmonischen Wurf und ist τ zugeordnet. Der Strahl t' durchläuft also den Strahlenbüschel S der Ebene ξ_0. Der Kegel (S) schneidet F^3 in zwei kubischen Kurven k_1^3 und k_2^3. Von diesen berührt die eine, etwa k_1^3, im Punkte S den Strahl t, die andere den zu t konjugierten Strahl der Involution $S(\tau)$. Jede von ihnen schneidet außerdem den Strahl t' in einem von S verschiedenen Punkte. Von den beiden reellen Bisekanten, welche die Ebene ε außer dem Punkte S mit den beiden Kurven gemein hat, fällt daher die eine, nämlich diejenige von k_1^3, mit t' zusammen. Der Schnittpunkt der beiden Bisekanten liegt also auf t' und somit in der von t' durchlaufenen Ebene ξ_0. Dieser Schnittpunkt ist aber ein Punkt von x_0. Die Gerade x_0 liegt also in der Ebene ξ_0, die demnach auch als die Ebene (Sx_0) bezeichnet werden kann, und der Punkt X_0 gehört der Geraden t_ξ an. Sind die Hauptebenen η und ζ reell, so sind es auch die Punkte Y_0 und Z_0, und zwar liegt Y_0 in der Geraden $t_\eta \equiv (\tau\eta)$ und Z_0 in der Geraden $t_\zeta \equiv (\tau\zeta)$. *Die drei Punkte X_0, Y_0 und Z_0 sind daher die Schnittpunkte der geraden Linie $(\tau\delta)$ mit den drei Hauptebenen ξ, η und ζ.* Bezeichnet man die Ebene (Sy_0) mit η_0 und (Sz_0) mit ζ_0, so kann man auch sagen: *Die beiden Dreikante $\xi\eta\zeta$ und $\xi_0\eta_0\zeta_0$ liegen perspektiv; die Schnittgeraden ihrer homologen Ebenen liegen in der Ebene τ.*

Digitized by Google

Fällt die vorher genannte durch x gehende Ebene mit ξ_1 zusammen, so geht t' durch den Punkt $(x_0 x_1)$ und t durch den Punkt (τx_1). Daraus folgt: *Die Tangentialebene τ und die Gerade x_0 teilen die zwischen x und ξ liegenden Strecken von x_1 und x_2 harmonisch. Entsprechendes gilt für y_0 und z_0.*

III. Die verschiedenen Arten der kubischen Flächen mit vier Doppelpunkten.

Jede Fläche F^3 kann, wie im ersten Teile gezeigt worden ist, dargestellt werden, indem man von zwei auf einem Kegel zweiter Ordnung S liegenden kubischen Raumkurven k_1^3 und k_2^3 ausgeht. Das Ebenenpaar, welches den Punkt S mit den beiden stets reellen gemeinsamen Bisekanten dieser Kurven verbindet, kann als ein zweiter zerfallender Kegel zweiter Ordnung aufgefaßt werden. Durch die beiden Kegel ist ein Kegelbüschel oder ein Büschel polarer Bündel $[S]$ eindeutig bestimmt.

Im folgenden wird nun umgekehrt ein beliebiger Kegelbüschel $[S]$ und in dem einen stets reellen Ebenenpaare des Büschels das Paar gemeinsamer Bisekanten der beiden kubischen Kurven als gegeben angenommen. Der Büschel bestimmt dann auf diesen Bisekanten die Involutionen, deren Doppelpunkte die Doppelpunkte der Fläche F^3 sind. Jeder Kegel des Büschels enthält ∞^1 Kurven dritter Ordnung, die durch die gegebenen Doppelpunkte gehen. Durch zwei beliebige derartige Kurven eines Kegels ist stets eine Fläche F^3 eindeutig bestimmt; zu dem Büschel $[S]$ gehören also noch ∞^2 Flächen F^3 mit den gegebenen Doppelpunkten. Eine beliebige dieser Flächen kann z. B. dadurch eindeutig bestimmt werden, daß außer dem Büschel $[S]$ noch die im Punkte S an die Fläche zu legende Tangentialebene τ gegeben wird; diese schneidet nämlich jeden Kegel des Büschels in zwei Strahlen, den Tangenten derjenigen beiden kubischen Kurven, in denen die Fläche dritter Ordnung von dem Kegel geschnitten wird.

Den verschiedenen Arten der Kegelbüschel entsprechen nun, wie in diesem Teile ausgeführt werden soll, die verschiedenen Arten der Flächen F^3. Der Kegelbüschel $[S]$ wird durch irgendeine nicht durch S gehende Ebene in einem Büschel polarer Felder geschnitten; bei der Einteilung der Kegelbüschel und der Flächen F^3 kann daher diejenige der Büschel polarer Felder zugrunde gelegt werden. Die hier durchgeführte Klassifizierung geht auf diejenige zurück, die vom Verfasser in der zweiten der oben erwähnten beiden Arbeiten gegeben worden ist.[1]) Es werden fünf Typen (A—E) unterschieden, die in Klassen (I,

1) Siehe S. 289, Anm. 3.

Digitized by Google

II, ...) eingeteilt werden. Zu jeder Klasse von Kegelbüscheln gehören gewisse Flächen F^3, die nötigenfalls auf Grund der verschiedenen möglichen Lagen der Tangentialebene τ in Unterabteilungen $(a, b, \ldots)$ eingeteilt werden können.

A. Der Kegelbüschel $[S]$ ist hyperbolisch.

Das Hauptdreikant xyz ist vollständig reell. F^3 enthält also drei reelle, in einer Ebene δ liegende gerade Linien x_0, y_0 und z_0. Die fünf Klassen dieses Typus unterscheiden sich durch die Beschaffenheit der Hauptinvolutionen.

I. Die drei Hauptinvolutionen sind hyperbolisch.

Die reellen Doppelebenen $\xi_1\xi_2$, $\eta_1\eta_2$ und $\zeta_1\zeta_2$ der Hauptinvolutionen schneiden sich zu je drei in vier reellen, sich selbst konjugierten Strahlen, den „Grundstrahlen" des Büschels. Die drei Hauptstrahlen sind die Diagonalstrahlen des vollständigen Vierkants der Grundstrahlen. Alle Inzidenzkegel des Büschels rufen in jeder Doppelebene einer Hauptinvolution eine und dieselbe Involution konjugierter Strahlen hervor; die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Grundstrahlen des Büschels. Die Grundstrahlen schneiden daher die in den Doppelebenen liegenden Geraden x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 in den Doppelpunkten der auf diesen Geraden liegenden Involutionen konjugierter Punkte, d. h. in den Doppelpunkten von F^3. *Die Fläche F^3 hat also vier reelle, voneinander verschiedene Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 und D_4.* Diese bilden die Ecken eines vollständigen räumlichen Vierecks mit den Gegenseitenpaaren x_1x_2, y_1y_2 und z_1z_2. Je zwei Gegenseiten dieses Vierecks werden von der entsprechenden Seite des Dreiecks $x_0y_0z_0$ geschnitten.

a) *τ gehe durch keinen Doppelpunkt.* x_0, y_0 und z_0 schneiden die andern Geraden nicht in den Doppelpunkten. Die Fläche enthält nur die neun reellen geraden Linien $x_1x_2x_0y_1y_2y_0z_1z_2z_0$.

b) *τ gehe durch einen Doppelpunkt D_1.* Von den Geraden x_0, y_0 und z_0 geht jede durch einen der drei anderen Doppelpunkte; die Ebene δ fällt also mit der Ebene $(D_2D_3D_4)$ zusammen. Die Involution $S(\tau)$ ist parabolisch, SD_1 ist ein Strahl jedes Paares von $S(\tau)$. Von den beiden kubischen Kurven, in denen F^3 jeden Kegel von $[S]$ schneidet, zerfällt stets die eine in SD_1 und einen Kegelschnitt k^2, der SD_1 schneidet und durch die drei reellen Punkte D_2, D_3 und D_4 geht. Die sämtlichen Kegelschnitte k^2 bilden den Kegelschnittbüschel, in welchem die Ebene $(D_2D_3D_4)$ von dem Kegelbüschel $[S]$ geschnitten wird. Da durch jeden Punkt dieser Ebene ein Kegelschnitt des Büschels geht,

Digitized by Google

so gehört jeder Punkt der Ebene der Fläche F^3 an. *F^3 zerfällt in die Ebene $D_2D_3D_4$ und eine Fläche zweiter Ordnung F^2*, welche jeden Kegel von $[S]$ in SD_1 und einer nicht zerfallenden Kurve schneidet.

c) $\tau \equiv (SD_1D_2) \equiv (Sx_1)$. Da τ sowohl durch SD_1 als auch durch SD_2 geht, so *zerfällt F^3 in die Ebenen $(D_2D_3D_4)$, $(D_1D_3D_4)$ und (SD_1D_2).*

II. Zwei Hauptinvolutionen sind elliptisch und die dritte ist hyperbolisch.

Die Hauptinvolution x sei hyperbolisch. Ihre reellen Doppelebenen ξ_1 und ξ_2 enthalten die reellen, windschiefen Geraden x_1 und x_2 der Fläche. Hätte der Büschel reelle Grundstrahlen, so würden je zwei derselben in den Doppelebenen der beiden anderen Hauptinvolutionen liegen; diese Hauptinvolutionen sind aber elliptisch, besitzen also keine reellen Doppelebenen. Daher hat der Kegelbüschel keine reellen Grundstrahlen. Die in den Ebenen ξ_1 und ξ_2 liegenden Involutionen konjugierter Strahlen sind also beide elliptisch; *die Fläche F^3 hat folglich zwei Paare konjugiert-imaginärer Doppelpunkte.* Die Geraden y_1, y_2, z_1 und z_2 sind imaginär.

a) *τ schneide x_1 und x_2 in je einem Punkte.* Die Fläche besitzt nur fünf reelle gerade Linien, nämlich x_0, y_0, z_0 und die beiden zueinander windschiefen, x_0 schneidenden Geraden x_1 und x_2.

b) *Ist $\tau \equiv (Sx_1)$, so zerfällt F^3 in die reelle Ebene (Sx_1) und die konjugiert-imaginären Doppelebenen derjenigen Ebeneninvolution, welche die Achse x_2 besitzt und x_1 in den Punktpaaren der Involution $J(x_1)$ schneidet* (vgl. A I b).

III. Zwei Hauptinvolutionen sind parabolisch und die dritte ist hyperbolisch.

Die Hauptinvolution x sei hyperbolisch. Ihre reellen, voneinander verschiedenen Doppelebenen ξ_1 und ξ_2 enthalten die beiden reellen, windschiefen Geraden x_1 und x_2 der Fläche. Sie werden von den in der Hauptebene ξ zusammenfallenden Doppelebenen der parabolischen Hauptinvolutionen y und z in je einem Paare zusammenfallender Grundstrahlen geschnitten. *Von den vier reellen Doppelpunkten der Fläche fallen je zwei in die Punkte X_1 und X_2*, in denen die Geraden x_1 und x_2 die Ebene ξ schneiden. Die Inzidenzkegel des Büschels $[S]$ berühren sämtlich die Ebenen ξ_1 und ξ_2 längs den Strahlen SX_1 und SX_2, bilden also einen Büschel mit reeller Doppelberührung. In der Geraden X_1X_2 fallen die vier Geraden y_1, y_2, z_1 und z_2 der Fläche zusammen. Da jeder gemeinsame Punkt von y_1 und z_1 ein Doppelpunkt

Digitized by Google

von F^3 ist, so ist *jeder* Punkt der Geraden X_1X_2 ein Doppelpunkt der Fläche.

a) τ *gehe nicht durch* X_1 *oder* X_2. Jede durch X_1X_2 gelegte Ebene schneidet F^3 außer in der Doppelgeraden X_1X_2 noch in einer dritten Geraden, die den Schnittpunkt der Ebene und der Geraden x_0 enthält. *Die Fläche* F^3 *ist also eine Regelfläche; die Geraden* X_1X_2 *und* x_0 *sind die Leitgeraden der kubischen Regelschar.* Durch jeden Punkt von X_1X_2 gehen zwei Strahlen der Regelschar. Die durch X_1 und X_2 gehenden Strahlenpaare fallen in x_1 und x_2 zusammen; (x_0x_1) und (x_0x_2) sind also die beiden reellen *Cuspidalebenen*[1]) von F^3.

b) *Geht* τ *durch* SX_1, *so zerfällt die Regelfläche* F^3 *in die Ebene* (X_1x_2) *und eine Regelfläche zweiter Ordnung* F^2. F^2 hat mit jedem Kegel von $[S]$ die Gerade SX_1 und eine im allgemeinen nicht zerfallende kubische Kurve gemein. Ebenso zerfällt F^3, wenn τ durch SX_2 geht (vgl. A I a).

c) *Ist insbesondere* $\tau \equiv \xi$, *so zerfällt* F^3 *in die drei Ebenen* (X_1x_2), (X_2x_1) *und* ξ (vgl. A I b).

IV. Zwei Hauptinvolutionen sind parabolisch und die dritte ist elliptisch.

Die Hauptinvolution x sei elliptisch; die Doppelebenen ξ_1 und ξ_2 sind imaginär, daher auch die Geraden x_1 und x_2 der Fläche F^3. Die Doppelebenen der Hauptinvolutionen y und z fallen (wie bei III) in der Hauptebene ξ zusammen. Der Kegelbüschel ist ein Büschel mit imaginärer Doppelberührung. Die Kegel sind teils reell, teils imaginär; den Übergang von den reellen zu den imaginären Kegeln bilden die reelle Ebene ξ und das imaginäre Ebenenpaar $\xi_1\xi_2$ mit der reellen Achse x. Die vier Geraden y_1, y_2, z_1 und z_2 fallen in eine einzige Gerade der Ebene ξ zusammen. In derselben Geraden vereinigen sich auch die beiden Hauptbisekanten h_1^ξ und h_2^ξ. *Jeder Punkt der Geraden* y_1 *ist ein Doppelpunkt von* F^3 (siehe III).

a) $\tau \neq \xi$. Jede durch y_1 gelegte Ebene schneidet F^3 außer in der Doppelgeraden y_1 noch in einer reellen Geraden, die den Schnittpunkt der Ebene und der reellen Geraden x_0 enthält. *Die Fläche* F^3 *ist demnach eine kubische Regelfläche, deren Regelschar die Leitgeraden* y_1 *und* x_0 *besitzt.* Die Cuspidalebenen von F^3 sind konjugiert imaginär (vgl. III a).

b) *Ist* $\tau \equiv \xi$, *so zerfällt* F^3 *in die reelle Ebene* ξ *und das imaginäre Ebenenpaar* (X_1x_2) *und* (X_2x_1) (vgl. III c).

---

1) Reye, a. a. O., 1. Abt., 5. Aufl., S. 131.

Digitized by Google

V. Zwei Hauptinvolutionen sind parabolisch und die dritte ist unbestimmt.

Die Hauptinvolution x sei unbestimmt und die beiden andern seien parabolisch. Der Kegelbüschel $[S]$ besteht aus den Ebenenpaaren, welche die Hauptebenen η und ζ harmonisch trennen. Die Doppelebenen η_1 und η_2 fallen in der Hauptebene ζ und die Doppelebenen ζ_1 und ζ_2 in der Hauptebene η zusammen. Die vier Grundstrahlen vereinigen sich in dem Hauptstrahle x. y_1 und z_1 schneiden sich in einem Punkte D von x. Da $y_1 \equiv y_2$ und $z_1 \equiv z_2$ ist, so *vereinigen sich in diesem Punkte D alle vier Doppelpunkte von* F^3.

a) τ *gehe nicht durch D.* Die Tangentialebene τ schneidet η und ζ in zwei Geraden t_η und t_ζ. η schneidet F^3 in der Geraden z_1 und einem Kegelschnitt. Dieser muß durch die beiden auf z_1 liegenden, hier in D zusammenfallenden Doppelpunkte und durch den Punkt (zz_2) gehen und t_η in S berühren. Der Kegelschnitt zerfällt, weil der Punkt (zz_2) auf z_1 liegt, in die Geraden z_1 und t_η. Ebenso schneidet F^3 die Ebene ζ in der Doppelgeraden y_1 und der Geraden t_ζ. Jedes durch η und ζ harmonisch getrennte Ebenenpaar $\xi_1 \xi_2$ wird von τ in zwei Geraden t_1 und t_2 geschnitten. ξ_1 schneidet F^3 in einer durch D gehenden Geraden x_1 und in einem Kegelschnitt, der aus ähnlichen Gründen wie die Kegelschnitte der Ebenen η und ζ in die Geraden x_1 und t_1 zerfällt. ξ_1 kann aber jede beliebige durch x gehende Ebene sein. Jede Ebene dieses Büschels schneidet also F^3 in einer durch D gehenden Doppelgeraden und einer zugleich in τ liegenden Geraden. F^3 *zerfällt demnach in die Ebene* τ *und die Doppelebene* $(y_1 z_1)$.

b) τ *gehe durch D.* η schneidet F^3 in der Doppelgeraden z_1 und der Geraden x, ζ in der Doppelgeraden y_1 und der Geraden x. Jede andere durch x gehende Ebene ξ_1 gehört einem durch η und ζ harmonisch getrennten Ebenenpaare $\xi_1 \xi_2$ an. Die beiden Ebenen dieses Paares enthalten zunächst je eine durch D gehende Gerade x_1 bezw. x_2. ξ_1 schneidet F^3 außerdem in einem Kegelschnitt, der durch die beiden auf x_1 liegenden, hier in D zusammenfallenden Doppelpunkte und durch den Punkt (xx_2) geht und x in S berührt. Dieser Kegelschnitt muß, da $(xx_2) \equiv D$ ist, in x und eine andere durch D gehende Gerade zerfallen, die im allgemeinen nicht mit x_1 identisch ist. Jede von η und ζ verschiedene Ebene des Ebenenbüschels x schneidet also F^3 in drei verschiedenen durch D gehenden geraden Linien, zu denen x gehört. *Die Fläche* F^3 *ist demnach eine kubische Kegelfläche mit der Spitze D, die von den Ebenen* η, ζ *und* τ *in den Strahlen* z_1, y_1 *und* x *berührt wird.*

Digitized by Google

B. Der Kegelbüschel [S] ist elliptisch.

Der Kegelbüschel besitzt nur einen reellen Hauptstrahl x und eine nicht mit x inzidierende Hauptebene ξ. Von dem Dreieck der Ebene δ sind nur die Seite x_0 und die Gegenecke X reell. Alle Kegel des Büschels schneiden ξ in reellen Strahlenpaaren.

I. Die Hauptinvolution x ist hyperbolisch.

Die Doppelebenen $\xi_1\xi_2$ der Hauptinvolution x sind reell. Die Kegel des Büschels schneiden die eine Doppelebene, z. B. ξ_1, in zwei reellen, die andere in zwei konjugiert-imaginären Grundstrahlen. Die Geraden x_1 und x_2 sind reell, y_1, y_2, z_1 und z_2 imaginär. *Auf x_1 liegen zwei reelle und auf x_2 zwei konjugiert-imaginäre Doppelpunkte.* Die reellen Doppelpunkte seien D_1 und D_2.

a) τ *gehe nicht durch D_1 oder D_2.* x_0 schneidet x_1 in einem von D_1 und D_2 verschiedenen Punkte. *F^3 besitzt nur die drei reellen geraden Linien x_1, x_2 und x_0.*

b) *Geht τ durch den Doppelpunkt D_1,* so *zerfällt F^3 in die Ebene (D_2x_2) und eine Fläche zweiter Ordnung F^2,* welche jeden Kegel des Büschels [S] in der Geraden SD_1 und einer im allgemeinen nicht zerfallenden kubischen Kurve schneidet.

c) *Ist $\tau \equiv (Sx_1)$,* so *zerfällt F^3 in die drei reellen Ebenen (D_1x_2), (D_2x_2) und (Sx_1).* (vgl. AIa, b).

d) *Ist $\tau \equiv (Sx_2)$,* so *zerfällt F^3 in die reelle Ebene (Sx_2) und die konjugiert-imaginären Doppelebenen der zu $J(x_2)$ perspektiven Ebeneninvolution mit der Achse x_1.*

II. Die Hauptinvolution x ist unbestimmt.

Die Kegel des Büschels [S] sind die Ebenenpaare der elliptischen Involution, welche die konjugiert-imaginären Doppelebenen η und ζ besitzt. Der Büschel hat vier reelle, in x zusammenfallende Grundstrahlen.

a) τ *gehe nicht durch x.* τ schneidet ξ in t_ξ. Man bestimme die Ebene ξ_0, welche die drei Ebenen τ, ξ und $(t_\xi x)$ zu einem harmonischen Quadrupel ergänzt und τ zugeordnet ist. Irgend ein Ebenenpaar $\xi_1\xi_2$ der elliptischen Involution $x(\eta\zeta)$ werde von τ in t_1 und t_2, von ξ_0 in t_1' und t_2' geschnitten und enthalte die gemeinsamen Bisekanten x_1 und x_2. *Von den vier Doppelpunkten der Fläche fallen je zwei in den Punkten (xx_1) und (xx_2) zusammen.* Die Verbindungslinie der Punkte (x_1t_1') und (x_2t_2') ist die der Fläche angehörende Gerade x_0. Die Gerade x enthält die vier Doppelpunkte, gehört also auch der Fläche an. Das Ebenenpaar $\xi_1\xi_2$ enthält, als Kegel des Büschels [S], zwei kubische

Digitized by Google.

Kurven k_1^3 und k_2^3 der Fläche F^3. k_1^3 zerfällt in x_1 und den Kegelschnitt, der durch (xx_1) geht, mit x_2 zwei in (xx_2) zusammenfallende Punkte und mit t_2 zwei in S zusammenfallende Punkte gemein hat. Dieser Kegelschnitt reduziert sich offenbar auf die Doppelgerade x. Ebenso zerfällt k_2^3 in x_2 und die Doppelgerade x. Jede andere durch x gehende Ebene schneidet F^3 in der Doppelgeraden x und in einer x und x_0 treffenden Geraden. *F^3 ist also eine kubische Regelfläche mit den Leitgeraden x und x_0.*

b) *τ gehe durch x.* Die Punkte $(x_1 t_1')$ und $(x_2 t_2')$ fallen mit den Punkten (xx_1) und (xx_2) zusammen; x_0 vereinigt sich also mit x. *F^3 ist eine kubische Regelfläche, deren Leitgeraden in x zusammengefallen sind.*

C. Der Kegelbüschel [S] ist parabolisch.

Von den drei reellen Hauptstrahlen fallen zwei, z. B. y und z, zusammen; die entsprechenden Hauptebenen η und ξ vereinigen sich in der Ebene (xy). Alle Kegel des Büschels berühren die Ebene η in dem Strahle y. Von den beiden Doppelebenen der Hauptinvolution x fällt die eine, z. B. ξ_1, mit η zusammen. In y vereinigen sich zwei reelle Grundstrahlen des Büschels.

I. Die Hauptinvolution $y(\equiv z)$ ist hyperbolisch.

1. *Man nehme in ξ_1 und ξ_2 die beiden windschiefen gemeinsamen Bisekanten x_1 und x_2 beliebig an.* x_1 schneidet y in zwei zusammenfallenden Doppelpunkten von F^3. Die reellen Doppelebenen η_1 und η_2 der Hauptinvolution y schneiden ξ_2 in zwei reellen, voneinander verschiedenen Grundstrahlen des Büschels $[S]$. x_2 schneidet diese Grundstrahlen in zwei verschiedenen reellen Doppelpunkten von F^3. *Die Fläche F^3 besitzt zwei zusammenfallende und zwei nicht zusammenfallende reelle Doppelpunkte* (Grenzfall von A I). Die beiden nicht zusammenfallenden Doppelpunkte seien D_1 und D_2, der Punkt, in welchem die beiden andern Doppelpunkte sich vereinigen, sei D_3. Dann ist $D_1 D_3 \equiv y_1 \equiv z_1$ und $D_2 D_3 \equiv y_2 \equiv z_2$.

a) *τ gehe nicht durch einen der Doppelpunkte.* Dann ist x_0 windschief zu y; dagegen müssen y_0 und z_0, da η (bezw. ξ) mit y (bezw. z) inzidiert, durch y gehen. x_0 schneidet η in dem Punkte $(x_0 x_1) \equiv Y \equiv Z$. Da y_0 und z_0 sich einerseits in dem Punkte X der Ebene ξ schneiden und andrerseits y_1 und y_2 treffen müssen, so ist $X \equiv D_3$ und $y_0 \equiv z_0 \equiv D_3 Y \equiv x_1$. Jede durch x_1 gelegte Ebene schneidet F^3 in der Geraden x_1 und einem Kegelschnitt, der mit x_1 zwei in D_3 zusammenfallende Punkte gemein hat. In der Ebene $(x_0 x_1)$ zerfällt dieser Kegel-

Digitized by Google

schnitt in die beiden Geraden x_0 und y_0 ($\equiv x_1$), in den Ebenen (D_1x_1) und (D_2x_1) in die Doppelgeraden y_1 und y_2.

b) *τ gehe durch D_1. F^3 zerfällt in die Ebene (D_2x_1) und eine Fläche zweiter Ordnung,* welche jeden Kegel von $[S]$ in dem Strahle SD_1 und einer im allgemeinen nicht zerfallenden kubischen Kurve schneidet.

c) *τ gehe durch y (D_3), aber nicht durch x_1. F^3 zerfällt in die Ebene (D_3x_2) und eine Fläche zweiter Ordnung.*

d) *$\tau \equiv \eta$. F^3 zerfällt in die Doppelebene (D_3x_2) und die Ebene η.*

e) *$\tau \equiv \xi_2$. F^3 zerfällt in die drei Ebenen (D_1x_1), (D_2x_1) und ξ_2.*

f) *$\tau \equiv \eta_1$. F^3 zerfällt in die drei Ebenen (D_2x_1), (D_3x_2) und η_1.*

2. *Man nehme in η_1 und η_2 die beiden windschiefen Bisekanten y_1 und y_2 beliebig an.* Diese schneiden ξ_2 in den Doppelpunkten D_1 und D_2, durch welche x_2 bestimmt wird, und y in zwei verschiedenen Doppelpunkten D_3 und D_4. Die Gerade x_1 fällt also mit y zusammen. *F^3 hat vier verschiedene reelle Doppelpunkte* (siehe A I).

II. Die Hauptinvolution $y(\equiv z)$ ist elliptisch.

F^3 besitzt zwei reelle, in $(x_1y) \equiv D$ zusammenfallende und zwei auf x_2 liegende konjugiert-imaginäre Doppelpunkte (Grenzfall von B I).

a) *τ gehe nicht durch D.* x_0 ist windschief zu y und schneidet η in dem auf x_1 liegenden Punkte Y. y_0 und z_0 fallen in der Geraden DY zusammen (siehe I 1a).

b) *τ gehe durch D, aber nicht durch x_1. F^3 zerfällt in die Ebene (Dx_2) und eine Fläche zweiter Ordnung.*

c) *$\tau \equiv \eta$. F^3 zerfällt in die Doppelebene (Dx_2) und die Ebene η.*

d) *$\tau \equiv \xi_2$. F^3 zerfällt in die reelle Ebene ξ_2 und die konjugiert-imaginären Doppelebenen der zu $J(x_2)$ perspektiven Ebeneninvolution mit der Achse y.*

III. Die Hauptinvolution $y(\equiv z)$ ist parabolisch.

Fallen die Doppelebenen η_1 und η_2 beide mit ξ zusammen, so ergibt sich der Fall A III. Fallen η_1 und η_2 mit η zusammen, so ist jeder durch S gehende Strahl der Ebene $\eta \equiv \xi_1$ ein Grundstrahl des Büschels. Alle Kegel des Büschels $[S]$ reduzieren sich dann entweder auf die Doppelebene η oder auf die Ebenenpaare, die aus der Ebene η und je einer beliebigen durch x gehenden Ebene ξ_2 bestehen.

1. Im ersten Falle besitzt die Fläche F^3 keinen außerhalb der Ebene η liegenden Punkt, *reduziert sich also auf die dreifach zu zählende Ebene η.*

Digitized by Google

2. Besteht der Büschel $[S]$ aus den Ebenenpaaren $\eta\xi_2$, so müssen alle kubischen Kurven von F^3 in gerade Linien und Kegelschnitte zerfallen. Man nehme in η die Bisekante x_1 und in irgendeiner von η verschiedenen Ebene ξ_2 die zu x_1 windschiefe Bisekante x_2 beliebig an. Die beiden Doppelpunkte von x_1 fallen in dem Punkte $(xx_1) \equiv D_1$ zusammen. Auf der Geraden x_2 kann jeder Punkt als Doppelpunkt angesehen werden. Die Geraden y_1, y_2, z_1 und z_2 fallen mit x_2 zusammen.

a) τ *gehe nicht durch* D_1. x_0 ist windschief zu x und schneidet η im Punkte $(x_0x_2) \equiv Y \equiv Z$, ξ in dem auf t_ξ liegenden Punkte X_0. Der Punkt $Y_0 \equiv Z_0$, der Mittelpunkt des Bisekantenbüschels von η oder ξ, muß auf der Bisekante x_2 liegen und die Punkte (xx_2), Y, (yx_2) zu einem harmonischen Wurfe ergänzen. Die Geraden y_0 und z_0 fallen also mit x_2 zusammen. Die Geraden y_1 und y_2 der Ebene η müssen durch D_1 gehen und x_2 schneiden.

α) y_1 *und* y_2 *sind beide von* x *verschieden.* Die Ebene η hat mit F^3 außer drei Geraden noch den nicht auf einer von diesen liegenden Punkt S gemein. F^3 *zerfällt also in die Ebene* η *und eine Fläche zweiter Ordnung.*

β) $y_1 \equiv x, y_2$ *von* x *verschieden.* Die Schnittkurve von η und F^3 besteht aus den drei geraden Linien x_2, y_1 und y_2. t_η soll aber zwei in S zusammenfallende Punkte mit dieser Schnittkurve gemein haben. F^3 *zerfällt also gleichfalls in die Ebene* η *und eine Fläche zweiter Ordnung.*

γ) $y_1 \equiv y_2 \equiv x$. Die Ebene η hat mit F^3 die Doppelgerade x und die Gerade x_2 gemein. Jede durch x gelegte Ebene hat mit F^3 außer x eine Gerade gemein, welche x_0 schneidet. F^3 *ist eine kubische Regelfläche mit den Leitgeraden* x *und* x_0.

b) τ *gehe durch* D_1, *aber nicht durch* x_1. F^3 *zerfällt in die Ebene* $(D_1x_2) \equiv \eta$ *und eine Fläche zweiter Ordnung.*

c) $\tau \equiv \xi_1$. F^3 *zerfällt in die Doppelebene* η *und die einfache Ebene* ξ_1.

IV. Die Hauptinvolution $y(\equiv z)$ ist unbestimmt.

Die Kegel des Büschels $[S]$ zerfallen in die Ebenenpaare, welche ξ und η harmonisch trennen (siehe A V).

D. Der Kegelbüschel $[S]$ hat einen dreifachen Hauptstrahl.

Die drei Hauptebenen ξ, η und ζ fallen in einer Ebene ξ und die drei Hauptstrahlen x, y und z in einem mit ξ inzidierenden Strahle x zusammen. Alle Kegel sind reell und berühren ξ in der Geraden x. Die drei Hauptinvolutionen fallen in eine zusammen; ξ ist eine reelle Doppelebene derselben.

Digitized by Google

I. Die Hauptinvolution ist hyperbolisch.

Die zweite Doppelebene ξ_2 ist von ξ verschieden. In x fallen zwei reelle Grundstrahlen des Büschels zusammen. ξ und ξ_2 enthalten außerdem noch je einen reellen Grundstrahl g und g_2.

1. $g \not\equiv x, g_2 \not\equiv x$. Sämtliche Kegel des Büschels reduzieren sich auf die beiden Ebenenpaare ξ, ξ_2 und $\xi, (gg_2)$. *Die Fläche F^3 zerfällt in die drei Ebenen ξ, ξ_2 und (gg_2).*

2. $g \equiv x, g_2 \not\equiv x$. In ξ und ξ_2 wähle man die windschiefen gemeinsamen Bisekanten x_1 und x_2 beliebig aus. Die beiden Doppelpunkte von x_1 fallen in dem Punkte (xx_1) zusammen. Die beiden andern Doppelpunkte sind (xx_2) und (g_2x_2). *F^3 besitzt zwei zusammenfallende und zwei voneinander verschiedene reelle Doppelpunkte* (siehe C I).

3. $g \not\equiv x, g_2 \equiv x$. Die beiden Doppelpunkte von x_1 sind (gx_1) und (xx_1). Die Doppelpunkte von x_2 fallen in dem Punkte (xx_2) zusammen (siehe 2.).

4. $g \equiv g_2 \equiv x$. *F^3 besitzt zwei in (xx_1) und zwei in (xx_2) zusammenfallende reelle Doppelpunkte* (siehe B II).

II. Die Hauptinvolution ist parabolisch.

Die zweite Doppelebene ξ_2 fällt mit ξ zusammen.

1. *Nicht alle Grundstrahlen fallen in x zusammen.* Sämtliche Kegel des Büschels reduzieren sich auf die Doppelebene ξ. *F^3 ist die dreifach zu zählende Ebene ξ* (siehe C III 1.).

2. *Alle vier Grundstrahlen fallen in x zusammen.* Eine beliebig in ξ angenommene Gerade x_1 wird von x in dem *vierfachen Doppelpunkte von F^3* geschnitten (siehe A V).

III. Die zweite Doppelebene ξ_2 der Hauptinvolution ist unbestimmt.

Die Kegel des Büschels sind die sämtlichen Ebenenpaare $\xi\xi_2$ (siehe C III 2.).

E. Der Kegelbüschel $[S]$ hat drei zusammenfallende Hauptebenen.

Die Hauptstrahlen x, y und z liegen in einer einzigen Hauptebene $\xi (\equiv \eta \equiv \zeta)$. Alle Kegel des Büschels sind Ebenenpaare, und eine Ebene jedes Paares ist ξ. Jede durch S gehende Gerade der Ebene ξ ist ein Grundstrahl des Büschels. Von den Doppelebenen der drei Hauptinvolutionen fällt je eine mit ξ zusammen.

Digitized by Google

I. Die Hauptinvolutionen sind hyperbolisch.

Die von ξ verschiedenen Doppelebenen der drei Hauptinvolutionen schneiden sich in einem reellen nicht mit ξ inzidierenden Grundstrahle g. Jeder Kegel des Büschels zerfällt in die Ebene ξ und eine Ebene des Ebenenbüschels g. In den Ebenen $\xi_1 \equiv \xi$ und $\xi_2 \equiv (xg)$ nehme man zwei windschiefe gemeinsame Bisekanten x_1 und x_2 beliebig an. Die beiden Doppelpunkte von x_2 sind $(xx_2) \equiv D_1$ und $(gx_2) \equiv D_2$ Die Ebene ξ_2 schneidet F^3 in der Geraden x_2 und einem Kegelschnitt, der die Gerade (τ, ξ_2) in S berührt und durch die Punkte (xx_1), D_1 und D_2 geht. Da dieser Kegelschnitt mit x drei verschiedene Punkte gemein hat, so muß er in die Geraden x und g zerfallen. Auf der Geraden x_1 ist jeder Punkt als Doppelpunkt anzusehen. Jede durch x_1 gelegte Ebene ε schneidet demnach F^3 in der Doppelgeraden x_1 und einer im allgemeinen von x_1 verschiedenen Geraden; diese Gerade ist die Verbindungslinie der Punkte (εx_2) und (εg), gehört also der Ebene ξ_2 an. *F^3 zerfällt folglich in die Ebene ξ_2 und eine Fläche zweiter Ordnung.* Die Fläche zweiter Ordnung kann bei besonderen Lagen von τ in zwei Ebenen zerfallen.

II. Die Hauptinvolutionen sind parabolisch.

Der Grundstrahl g fällt in die Hauptebene ξ hinein. Jeder Kegel des Büschels $[S]$ besteht aus ξ und einer Ebene des Ebenenbüschels g (siehe C III 2.).

Zusammenfassung:

Sieht man von den Ausartungen (den kubischen Regel- und Kegelflächen und den zerfallenden Flächen) ab, so gibt es folgende Arten von kubischen Flächen mit vier Doppelpunkten:

1. Die Fläche mit vier verschiedenen reellen Doppelpunkten (A I a).

2. Die Fläche mit zwei verschiedenen reellen und zwei konjugiert-imaginären Doppelpunkten (B I a).

3. Die Fläche mit vier paarweise konjugiert-imaginären Doppelpunkten (A II a).

4. Die Fläche mit vier reellen Doppelpunkten, von denen zwei in einem Punkte zusammenfallen. Übergang zwischen 1. und 2. (C I 1 a).

5. Die Fläche mit zwei reellen zusammenfallenden und zwei konjugiert-imaginären Doppelpunkten. Übergang zwischen 2. und 3. (C II a).

Mit der Zurückführung auf die verschiedenen Arten der Kegelbüschel ist für jede Flächenart die Möglichkeit ihrer Konstruktion gegeben.

Digitized by Google

IV. Die Polarentheorie der kubischen Flächen mit vier Doppelpunkten. Das Sylvestersche Pentaeder. Die „römische" Fläche Steiners.

Jeder Punkt P des Raumes hat bekanntlich in bezug auf eine Fläche dritter Ordnung eine quadratische Polarfläche P^2; diese enthält die Berührungspunkte aller durch P gehenden Tangenten und Berührungsebenen und insbesondere alle Doppelpunkte der kubischen Fläche. Liegt P auf dieser selbst, so geht die quadratische Polarfläche P^2 durch P hindurch und schneidet jede durch P gehende Gerade in demjenigen Punkte, der von P durch die beiden andern Schnittpunkte der Fläche und der Geraden harmonisch getrennt wird.

Ist P ein von $P_{x1} \equiv (x_0 x_1)$ und $P_{x2} \equiv (x_0 x_2)$ verschiedener Punkt von x_0, so fallen die von P verschiedenen Schnittpunkte der Fläche und jeder durch P gehenden Geraden der Ebene (Px_1) in einem Punkte von x_1 zusammen. Die quadratische Polarfläche P^2 enthält also die Gerade x_1. Dasselbe gilt von x_2. Die Gerade x_0 hat daher mit P^2 die drei Punkte P, P_{x1} und P_{x2} gemein; sie gehört demnach auch der Fläche P^2 an. Die Ebene δ schneidet F^3 in der reellen Geraden x_0 und den (reellen oder konjugiert-imaginären) Geraden y_0 und z_0 mit dem reellen Schnittpunkte X. Jede durch P gehende Gerade der Ebene δ hat daher mit P^2 den Punkt P und einen Punkt des zu XP konjugierten Strahls der Involution $X(y_0, z_0)$ gemein. Dieser Strahl, der x_0 in P' schneide, liegt daher auch auf P^2. *Die Polare P^2 eines auf x_0 liegenden Punktes P ist also eine Regelfläche, welche die Geraden x_0, x_1, x_2 und XP' enthält und demnach mit der Ebene δ zwei sich in P' schneidende Geraden gemein hat.* Sind die Geraden y_0 und z_0 reell, so gilt das Entsprechende von den quadratischen Polarflächen ihrer Punkte.

Eine durch X gehende Gerade der Ebene δ hat mit F^3 zwei in X zusammenfallende Punkte und einen Punkt von x_0 gemein. Der vierte harmonische, X zugeordnete Punkt fällt also mit X selbst zusammen. Auf den Geraden y_0 und z_0 kann jeder Punkt als Punkt der quadratischen Polarfläche X^2 angesehen werden. *Die quadratische Polarfläche X^2 von X berührt also die Ebene δ in dem reellen Punkte X und hat mit δ die beiden Geraden y_0 und z_0 gemein.*

Ist P ein von den Doppelpunkten und von P_{x1} verschiedener Punkt von x_1, so bestimmt jede durch P gehende Gerade g eine Ebene (gx_1), welche F^3 in x_1 und einem Kegelschnitt k^2 schneidet, der auf x_1 die Involution $J(x_1)$ erzeugt. Dreht sich g in dieser Ebene um P, so durchläuft der von P durch die beiden andern Schnittpunkte von g und F^3 harmonisch getrennte Punkt die Polare von P bezüglich k^2.

Digitized by Google

Diese schneidet x_1 in dem zu P konjugierten Punkte Q der Involution $J(x_1)$. Die quadratische Polarfläche P^2 hat also mit jeder durch x_1 gelegten Ebene eine durch Q gehende gerade Linie gemein. Fällt die Ebene (gx_1) insbesondere mit der Ebene (x_0x_1) zusammen, so löst sich k^2 in die Geraden x_0 und x_1 auf. Die Polare von P bezüglich dieses Geradenpaares ist x_1. *P^2 ist demnach eine Kegelfläche mit der Spitze Q, welche die Ebene (x_0x_1) längs x_1 berührt und auf x_2 die Involution $J(x_2)$ erzeugt. Die ebene Polare von P,* d. h. die Polarebene von P in bezug auf P^2, *ist die Ebene* (x_0x_1).

Jede durch P_{x1} gehende Gerade der Ebene (x_0x_1) schneidet F^3 in drei in P_{x1} zusammenfallenden Punkten. Der von P_{x1} durch die beiden andern Schnittpunkte harmonisch getrennte Punkt wird unbestimmt; P^2_{x1} enthält also die ganze Ebene (x_0x_1). Die Ebene (x_0x_2) schneidet F^3 in x_0 und in der doppelt zählenden Geraden x_2. Jede durch P_{x1} und einen Punkt von x_2 gehende Gerade schneidet daher P^2_{x1} in ihrem Schnittpunkte mit x_2. P^2_{x1} enthält also die Gerade x_2. Jede durch x_1 gelegte, nicht mit (x_0x_1) zusammenfallende Ebene schneidet P^2_{x1} in einer durch Q_{x1}, den zu P_{x1} konjugierten Punkt von $J(x_1)$, und einen Punkt von x_2 gehenden Geraden. Die Ebene $(Q_{x1}x_2)$ gehört also auch ganz der Fläche P^2_{x1} an. *P^2_{x1} zerfällt also in die Ebenen (x_0x_1) und $(Q_{x1}x_2)$, die sich in der Geraden $Q_{x1}P_{x2}$ schneiden. Die ebene Polare von P_{x1} ist die Ebene* (x_0x_1). Ebenso zerfällt die quadratische Polare des Punktes P_{x2} in ein Ebenenpaar. Dasselbe gilt von den quadratischen Polarflächen der Punkte $P_{y1} \equiv (y_0y_1)$, $P_{y2} \equiv (y_0y_2)$, $P_{z1} \equiv (z_0z_1)$ und $P_{z2} \equiv (z_0z_2)$; doch sind diese Ebenenpaare nur dann reell, wenn die Punkte reell sind, deren Polarflächen sie darstellen.

Der Ort der Punkte, deren quadratische Polarflächen in bezug auf eine Fläche dritter Ordnung Kegel sind, ist bekanntlich eine Fläche vierter Ordnung, *die Hessesche Fläche H^4*; diese enthält auch die Spitzen der Polarkegel und wird von den ebenen Polaren ihrer Punkte bezüglich der Fläche dritter Ordnung eingehüllt.[1]) Da nun die quadratischen Polarflächen aller Punkte von x_1 und x_2 Kegel sind, deren Spitzen ebenfalls auf x_1 und x_2 liegen, und die ebenen Polaren dieser Punkte in den Ebenen (x_0x_1) und (x_0x_2) zusammenfallen, *so enthält die Hessesche Fläche H^4 einer Fläche F^3 stets die beiden reellen geraden Linien x_1 und x_2 und zwei durch diese gehende reelle Tangentialebenen (x_0x_1) und (x_0x_2)*. Sind die vier andern Geraden y_1, y_2, z_1 und z_2 reell, so liegen sie gleichfalls auf H^4. Die Ebenen (x_0x_1) und (x_0x_2) berühren auch F^3 längs x_1 und x_2. In diesen Geraden berühren sich

1) Reye, a. a. O. III, S. 113 u. 114.

Digitized by Google

also F^3 und H^4. Dasselbe gilt von y_1, y_2, z_1 und z_2. Der vollständige Durchschnitt der Flächen F^3 und H^4 ist von der zwölften Ordnung. Daraus folgt: *Die Hessesche Fläche H^4 einer Fläche F^3 hat mit dieser außer den sechs Geraden x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2, in denen sie F^3 berührt, und von denen zwei stets reell sind, keinen Punkt gemein.*

Es gibt bekanntlich zehn (reelle oder paarweise imaginäre) Punkte, deren quadratische Polarflächen in bezug auf eine Fläche dritter Ordnung in Ebenenpaare zerfallen. Sie sind die Doppelpunkte der Hesseschen Fläche H^4 und bilden die Ecken des *Sylvesterschen Pentaeders.* Durch jede Ecke gehen drei Ebenen des Pentaeders; die beiden andern schneiden sich in der Gegenkante jener Ecke. In jeder Ebene des Pentaeders liegen sechs Ecken, sie liegen zu je dreien in vier geraden Linien, den Schnittlinien mit den vier andern Pentaederebenen. In jeder der zehn Kanten liegen drei Ecken, die Schnittpunkte mit den in der Gegenecke zusammenstoßenden Ebenen. Da jede Kante somit drei Doppelpunkte von H^4 enthält, so liegen alle Kanten auf H^4. Die beiden Ebenen, welche die quadratische Polarfläche einer Pentaederecke bilden, schneiden sich in der Gegenkante dieser Ecke, und die ebene Polare einer Ecke berührt die Hessesche Fläche längs ihrer Gegenkante.[1]) Da nun die quadratischen Polarflächen von P_{x1} und P_{x2} Ebenenpaare mit den Schnittlinien $P_{x2}Q_{x1}$ und $P_{x1}Q_{x2}$ sind, *so sind P_{x1} und P_{x2} zwei reelle Pentaederecken und $P_{x2}Q_{x1}$ und $P_{x1}Q_{x2}$ die reellen Gegenkanten derselben.*[2]) *Die Hessesche Fläche von F^3 enthält also die reellen Geraden $P_{x2}Q_{x1}$* und *$P_{x1}Q_{x2}$ und berührt längs diesen die Ebenen (x_0x_1) und (x_0x_2).*

Jede Ebene besitzt eine *kubische Polfläche* in bezug auf eine Fläche dritter Ordnung; diese ist der Ort derjenigen Punkte, deren quadratische Polarflächen die Ebene in Geradenpaaren schneiden.[3]) Die Schnittkurve der Ebene δ und ihrer kubischen Polfläche Δ^3 ist dem-

1) Reye, a. a. O. III, S. 131 u. 132.

2) Rodenberg (Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten, Diss. Göttingen 1874) beweist analytisch, daß auf jeder Verbindungslinie zweier Doppelpunkte eine Pentaederecke liegt, die von dem Schnittpunkte jener Verbindungslinie und der Gegenkante des Pentaeders durch die betr. Doppelpunkte harmonisch getrennt wird.

3) Reye, a. a. O. III, S. 121—122, definiert die Fläche als den Ort der Punkte, deren quadratische Polarflächen die Ebene „berühren". Sturm sagt a. a. O., S. 118: „Die Fläche wird erzeugt durch diejenigen Punkte des Raumes, deren quadratische Polarflächen durch die Ebene ε in einem Geradenpaare geschnitten werden, also dieselbe berühren". Die Worte „also dieselbe berühren" treffen aber nicht zu für diejenigen Punkte, die zu quadratischen Polarflächen Kegel haben, deren Spitzen in der Ebene liegen, und die daher im allgemeinen die Ebene in Geradenpaaren *schneiden,* aber nicht *berühren.*

Digitized by Google

nach der Ort solcher Punkte von δ, deren quadratische Polarflächen δ in Geradenpaaren schneiden. Diese Schnittkurve besteht nach den obigen Ergebnissen aus den Geraden x_0, y_0 und z_0, von denen x_0 stets reell ist. *Die Fläche Δ^3 hat also mit F^3 die Geraden x_0, y_0 und z_0 gemein.*

Zu den Ecken des Pentaeders F^3 gehören außer P_{x1} und P_{x2} die entweder reellen oder konjugiert-imaginären Punktpaare $P_{y1}P_{y2}$ und $P_{z1}P_{z2}$. Sie liegen alle in der stets reellen Ebene δ. *Das Pentaeder einer Fläche F^3 besitzt also immer eine reelle Ebene δ.*

Die quadratischen Polarflächen der Punkte einer Geraden bilden einen zu der Punktreihe projektiven Büschel von Flächen zweiter Ordnung.[1]) Da die Gerade $P_{x1}Q_{x2}$ der Hesseschen Fläche H^4 angehört, so sind die quadratischen Polarflächen ihrer Punkte sämtlich Kegelflächen. Durch die beiden Flächen P_{x1}^2 und Q_{x2}^2 ist der Büschel eindeutig bestimmt. P_{x1}^2 ist das Ebenenpaar (x_0x_1) und $(Q_{x1}x_2)$ und Q_{x2}^2 ist eine Kegelfläche mit der Spitze P_{x2}, welche die Ebene (x_0x_2) längs x_2 berührt und auf x_1 die Involution $J(x_1)$ erzeugt. (x_0x_1) schneidet Q_{x2}^2 in $P_{x2}D_1$ und $P_{x2}D_2$, $(Q_{x1}x_2)$ in der reellen Geraden x_2 und einer zweiten durch P_{x2} gehenden reellen Geraden g. Die quadratischen Polarflächen der Punkte von $P_{x1}Q_{x2}$ bilden also einen Kegelbüschel mit dem Mittelpunkte P_{x2} und den Grundstrahlen x_2, g, $P_{x2}D_1$ und $P_{x2}D_2$, von denen die beiden ersten stets reell sind.

Da der Mittelpunkt des Kegelbüschels in der Ebene δ liegt, so wird diese von allen Flächen des Büschels in Geradenpaaren geschnitten. *Die Punkte der Geraden $P_{x1}Q_{x2}$ liegen also sämtlich auf Δ^3. Dasselbe gilt natürlich von der Geraden $P_{x2}Q_{x1}$ und den beiden entsprechenden Geradenpaaren, die aber auch konjugiert-imaginär sein können.* Die Polfläche einer Ebene berührt bekanntlich die Hessesche Fläche H^4 längs einer Raumkurve sechster Ordnung.[2]) Diese zerfällt, wie man sieht, bei der Fläche Δ^3 in sechs gerade Linien, von denen zwei, $P_{x1}Q_{x2}$ und $P_{x2}Q_{x1}$, stets reell sind. H^4 berührt längs $P_{x1}Q_{x2}$ die Ebene (x_0x_2) und längs $P_{x2}Q_{x1}$ die Ebene (x_0x_1). Dies sind also auch zugleich die Ebenen, die von Δ^3 in denselben Geraden berührt werden. Die Ebene (x_0x_1) hat also mit Δ^3 die einfache Gerade x_0 und die doppelt zählende Gerade $P_{x2}Q_{x1}$ und die Ebene (x_0x_2) die einfache Gerade x_0 und die doppelt zählende Gerade $P_{x1}Q_{x2}$ gemein. Die kubische Polfläche einer Ebene gehört zu den Flächen dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten.[3]) Die Doppelpunkte einer Fläche F^3 liegen paarweise auf den stets reellen, windschiefen Geraden x_1 und x_2, die von der reellen Geraden x_0 ge-

1) Reye, a. a. O. III, S. 110.
2) Reye, a. a. O. III, S. 122.
3) Reye, a. a. O. III, S. 123.

Digitized by Google

schnitten werden. Die Gerade x_0 behält für Δ^3 dieselbe Bedeutung wie für F^3, während die Rolle der Geraden x_1 und x_2 hier von $P_{x1}Q_{x1}$ und $P_{x2}Q_{x1}$ übernommen wird. *Die Doppelpunkte von Δ^3 liegen also paarweise auf diesen beiden Geraden.* Sie sind daran kenntlich, daß ihre Polarkegel δ in je einer Geraden berühren.[1])

Die Polarkegel der auf $P_{x1}Q_{x2}$ liegenden beiden Dopppelpunkte von Δ^3 gehören dem oben betrachteten Kegelbüschel an. Dieser ist zu der Punktreihe $P_{x1}Q_{x2}$ projektiv, d. h. vier harmonischen Kegeln entsprechen vier harmonische Punkte. Vier Kegel des Büschels heißen harmonisch, wenn sie irgend einem Punkte des Raumes vier harmonische Polarebenen zuordnen.[2]) Vier Kegel sind also insbesondere harmonisch, wenn ihre durch einen Grundstrahl gehenden Tangentialebenen harmonisch sind. Zerfällt ein Kegel des Büschels in ein Ebenenpaar, so fällt die durch einen Grundstrahl gehende Tangentialebene mit der durch diesen Strahl gehenden Ebene des Paars zusammen. Die Ebenen, welche einen Grundstrahl mit den drei andern verbinden, sind also die Tangentialebenen der drei zerfallenden Kegel des Büschels. Die vier Ebenen (x_2x_0), (x_2Q_{x1}), (x_2D_1) und (x_2D_2) sind demnach die Tangentialebenen von vier Kegeln des Büschels, nämlich des nicht zerfallenden Kegels Q^2_{x2}, des reellen Ebenenpaares P^2_{x1} und der beiden andern Ebenenpaare. Diese vier Ebenen schneiden aber x_1 in vier harmonischen Punkten. Also sind die zugehörigen Kegel und damit auch die Punkte von $P_{x1}Q_{x2}$, deren quadratische Polarflächen sie darstellen, harmonisch. *Die beiden Punkte D_1' und D_2', deren quadratische Polarflächen die beiden von P^2_{x1} verschiedenen Ebenenpaare des Kegelbüschels bilden, trennen also die Punkte P_{x1} und Q_{x2} harmonisch. Dasselbe gilt von den entsprechenden Punkten D_3' und D_4' der Geraden $P_{x2}Q_{x1}$.*

Die drei windschiefen Geraden x_0, y_1 und y_2, von denen die erste stets reell ist, bestimmen eindeutig eine Regelfläche zweiter Ordnung R^2, zu deren einer Leitschar sie gehören. Da $D_1P_{x1}D_2Q_{x1} \barwedge D_3P_{x2}D_4Q_{x2}$ ist, so gehört $Q_{x1}Q_{x2}$ derselben Leitschar an. Zu der zweiten Leitschar von R^2 gehören die Geraden x_1, x_2 und y_0. $Q_{x1}Q_{x2}$ muß also y_0 schneiden. Ebenso kann man zeigen, daß $Q_{x1}Q_{x2}$ die Gerade z_0 schneiden muß. Da nun $Q_{x1}Q_{x2}$ nicht der Ebene δ angehört, so geht $Q_{x1}Q_{x2}$ durch den Punkt $X \equiv (y_0, z_0)$. Die Ebene $(Q_{x1}x_2)$ schneidet also F^3 in x_2 und einem Kegelschnitt, der auf x_2 die Involution $J(x_2)$ hervorruft und $Q_{x1}Q_{x2}$ in Q_{x1} und X schneidet. Die quadratische Polarfläche Q^2_{x2} schneidet also die Ebene $(Q_{x1}x_2)$ in x_2 und derjenigen reellen Geraden g, welche von x_2 durch die Geraden $P_{x2}X$ und $P_{x2}Q_{x1}$

1) Reye, a. a. O. III, S. 123.

2) Jolles, a. a. O., 75.

Digitized by Google

harmonisch getrennt wird. Die drei Ebenenpaare des Kegelbüschels bilden die Seiten eines vollständigen Vierkants. Aus den harmonischen Eigenschaften eines solchen folgt, daß die Ebene, welche die Schnittkanten zweier Ebenenpaare verbindet, durch die Grundstrahlen des Büschels von der Schnittkante des dritten Ebenenpaares harmonisch getrennt wird. Die Schnittkante des reellen Ebenenpaares ist $P_{x_2}Q_{x_1}$. Diese wird durch x_2 und g von $P_{x_2}X$ und durch $P_{x_2}D_1$ und $P_{x_2}D_2$ von x_0 harmonisch getrennt. Die Schnittkanten der beiden andern Ebenenpaare liegen also in der Ebene $(x_0, P_{x_2}X) \equiv \delta$. Diese beiden Ebenenpaare sind die quadratischen Polarflächen $D_1'^2$ und $D_2'^2$. Diese Polarflächen sind also zerfallende Kegel, welche mit der Ebene δ je eine Gerade gemein haben. Daraus folgt einerseits, daß D_1' und D_2' und ebenso natürlich auch D_3' und D_4' die gesuchten Doppelpunkte von Δ^3 sind, und andrerseits, daß diese Doppelpunkte Ecken des Pentaeders sind. *Die vier nicht der reellen Pentaedrebene δ angehörenden Ecken des Sylvesterschen Pentaeders von F^3 sind also die (reellen oder paarweise konjugiert-imaginären) Doppelpunkte der kubischen Polfläche der Ebene δ.*[1])

Die Doppelpunkte von Δ^3 sollen im Folgenden so bezeichnet werden, daß die Verbindungslinien gleich bezeichneter Doppelpunktpaare von F^3 und von Δ^3 sich in je einem der sechs Punkte P von δ schneiden. Die beiden Doppelpunkttetraeder $D_1D_2D_3D_4$ und $D_1'D_2'D_3'D_4'$ stehen dann in folgenden Beziehungen zueinander: Je zwei entsprechende Kanten (z. B. D_1D_2 und $D_1'D_2'$) schneiden sich in einem Punkte (P_{x_1}) der Ebene δ. Je zwei entsprechende Ebenen (z. B. $D_1D_2D_3$ und $D_1'D_2'D_3'$) schneiden sich in einer Geraden $(P_{x_1}P_{y_1}P_{z_2})$ der Ebene δ. Je zwei entsprechende Begrenzungsdreiecke der beiden Tetraeder sind also perspektiv in bezug auf eine Gerade der Ebene δ als Achse; die Verbindungslinien entsprechender Ecken der beiden Dreiecke gehen also durch einen Punkt. Da dies von allen vier Paaren entsprechender Dreiecke gilt, so schneiden sich die vier Geraden D_1D_1', D_2D_2', D_3D_3' und D_4D_4' in einem Punkte M. Da $D_1P_{x_1}D_2Q_{x_1} \curlywedge D_1'P_{x_1}D_2Q_{x_2}$ ist, so geht auch $Q_{x_1}Q_{x_2}$ durch M. Dasselbe gilt von $Q_{y_1}Q_{y_2}$ und $Q_{z_1}Q_{z_2}$. x_1, $Q_{z_1}Q_{z_2}$, x_2 und z_0 sind vier Strahlen derjenigen Regelschar, deren Leitschar durch die drei Geraden z_1, z_2 und x_0 bestimmt ist. Diese vier Strahlen schneiden die Gerade z_1 in den Punkten $D_1Q_{z_1}D_4P_{z_1}$ und die Gerade $Q_{x_1}Q_{x_2}$, die der Leitschar (z_1, z_2, x_0) angehört, in $Q_{x_1}MQ_{x_2}X$. Da nun die vier genannten Punkte von z_1 einen harmonischen Wurf bilden, so wird auch $Q_{x_1}Q_{x_2}$ durch M und X harmonisch geteilt. Ebenso wird bewiesen, daß M und Y die Strecke

1) Reye, a. a. O., III. 131 beweist dies für eine Fläche ohne Doppelpunkte und für den Fall der vollständigen Realität des Pentaeders.

Digitized by Google

$Q_{y1}Q_{y2}$ und M und Z die Strecke $Q_{z1}Q_{z2}$ harmonisch teilen. Aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks $D_1D_2D_1'D_2'$ folgt sodann, daß sich D_1D_2' und D_2D_1' im Punkte X schneiden. Dasselbe gilt aus entsprechendem Grunde von D_3D_4' und D_4D_3'. Ebenso beweist man, daß sich D_1D_3', D_3D_1', D_2D_4' und D_4D_2' in Y und D_1D_4', D_4D_1', D_2D_3' und D_3D_2' in Z schneiden. *Die beiden Doppelpunkttetraeder von* F^3 *und* Δ^3 *liegen also vierfach perspektiv, und ihre Perspektivitätszentren sind* M, X, Y *und* Z. Wie bei der Perspektivität in bezug auf M die entsprechenden Kanten der beiden Tetraeder sich in Punkten der Ebene XYZ schneiden, so schneiden sich bei den drei andern perspektiven Zuordnungen die entsprechenden Kanten jedes Mal in derjenigen Ebene des Tetraeders $XYZM$, die das Zentrum der Perspektivität nicht enthält.

Durch das Doppelpunkttetraeder und das Dreieck XYZ ist die Fläche F^3 eindeutig bestimmt. Geht man umgekehrt von der Fläche Δ^3 aus, die durch ihr Doppelpunkttetraeder und das Dreieck XYZ ebenfalls eindeutig bestimmt ist, so *findet man als kubische Polfläche der Ebene* δ *in bezug auf* Δ^3 *die Fläche* F^3 *und als Pentaeder von* Δ^3 *die Ebene* δ *und das Doppelpunkttetraeder von* F^3.

Liegen zwei Tetraeder vierfach perspektiv, so liegt das Tetraeder der Perspektivitätszentren vierfach perspektiv zu jedem der beiden ersten Tetraeder in bezug auf die Ecken des andern als Zentren. Drei durch diese gegenseitige Lagenbeziehung miteinander verknüpfte Tetraeder sind von Herrn Stephanos „desmische" Tetraeder genannt worden.[1]) Aus den vorstehenden Ergebnissen folgt: *Jedes von drei desmischen Tetraedern bestimmt mit einer Ebene* δ *eines zweiten eindeutig eine Fläche* F^3. *Die Ebene* δ *des zweiten Tetraeders bildet mit dem dritten das Sylvestersche Pentaeder von* F^3. *Das dritte Tetraeder bestimmt mit der Ebene* δ *eine zweite Fläche* Δ^3, *deren Pentaeder aus* δ *und dem ersten Tetraeder besteht. Jede der beiden kubischen Flächen ist die Polfläche der Ebene* δ *in bezug auf die andere Fläche.* Da δ jede Ebene jedes der drei Tetraeder sein kann, so sind mit drei desmischen Tetraedern zwölf Flächenpaare $F^3\Delta^3$ verbunden.

Die Fläche F^3 ist zu der von Steiner entdeckten Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse, die gewöhnlich als die *„römische" Fläche Steiners* bezeichnet wird, dual.[2]) Diese Fläche tritt auf, wenn man jeder Fläche eines F^2-Gebüsches die Polarebene eines gegebenen Punktes P zuordnet. Die Flächen des Gebüsches sind dann projektiv auf den Ebenenraum bezogen. Jeder Kurve oder Fläche im Raume des Ge-

1) K. Stephanos, Darboux Bull. (1879), sér. 2, III, 424.

2) Reye, a. a. O., III, 124.

Digitized by Google

büsches entspricht dann in dem Ebenenraume ebenfalls eine Kurve oder Fläche. Insbesondere entspricht einer im Raume des Gebüsches angenommenen Ebene in dem Ebenenraume jene Steinersche Fläche 4. Ordnung F^{4} [1]), die zu F^{3} dual ist.

Infolge dieser Dualität entspricht einem beliebigen Punkte S von F^{3} eine Berührungsebene σ von F^{4}. Dem durch S gehenden Kegelbüschel $[S]$ entspricht in der Ebene σ eine Kegelschnittschar $\{\sigma\}$. Diese enthält ein reelles Punktepaar X_1 und X_2 (entsprechend dem Ebenenpaar $\xi_1 \xi_2$) mit der reellen Verbindungslinie x (entsprechend der Schnittgeraden der Ebenen ξ_1 und ξ_2). In X_1 und X_2 rufen die Kegelschnitte der Schar die Strahleninvolutionen $J(X_1)$ und $J(X_2)$ hervor. Mit X_1 inzidiert die Gerade x_1 und mit X_2 die Gerade x_2 von F^{3}; beide liegen nicht in σ, sind zueinander windschief und entsprechen den ebenso benannten windschiefen Geraden von F^{3}. $J(X_1)$ erzeugt die zu ihr perspektive Ebeneninvolution $J(x_1)$, $J(X_2)$ die Ebeneninvolution $J(x_2)$ (entsprechend den ebenso benannten Involutionen von F^{3}). Die (reellen oder konjugiert-imaginären) Doppelebenen dieser Involutionen sind *die singulären Berührungsebenen von* F^{4}, von denen die Fläche in den Punkten je eines Kegelschnitts berührt wird. Durch σ und die genannten Doppelebenen sind ∞^2 kubische Ebenengewinde bestimmt, von denen je ∞^1 einen Kegelschnitt der Schar $\{\sigma\}$ berühren (entsprechend den ∞^2 kubischen Raumkurven, die durch S und die Doppelpunkte von F^{3} gehen, und von denen je ∞^1 auf einem Kegel des Büschels $[S]$ liegen). Durch den Berührungspunkt T von F^{4} und σ — der der Tangentialebene τ von F^{3} entspricht — gehen zwei Tangenten t_1 und t_2 eines Kegelschnitts k^2 von $\{\sigma\}$. Die Tangenten bestimmen zwei kubische Ebenengewinde $\varkappa_1^{3}$ und $\varkappa_2^{3}$, welche zu den den Kegelschnitt k^2 berührenden Gewinden gehören. Durchläuft k^2 die ganze Schar $\{\sigma\}$, so durchlaufen $\varkappa_1^{3}$ und $\varkappa_2^{3}$ eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Gewinden, die F^{4} einhüllen und die Ebene σ sowie die vier singulären Berührungsebenen enthalten (entsprechend den auf F^{3} liegenden, durch S und die Doppelpunkte gehenden kubischen Raumkurven). Der reellen Ebene δ, welche F^{3} in den drei Geraden x_0, y_0 und z_0 schneidet, entspricht *ein stets reeller, dreifacher Punkt* D *von* F^{4}, in dem sich die drei geraden Linien x_0, y_0 und z_0 der Fläche schneiden, von denen mindestens eine reell ist.

Berlin, im März 1911.

1) Reye, a. a. O., III, 149 ff.

Digitized by Google

The Differential Equation of Curves of Normal Stresses in a Plane.

By ARNOLD EMCH in Urbana, Illinois.

The stresses around a point (x_1, y_1) of a plane field are determined if the stresses acting upon any two sections through the point are known.

Assuming any analytic curve

$$y - y_1 = f(x - x_1)$$

through (x_1, y_1) referred to Cartesian coordinates the stress $\boldsymbol{P}$ at the point (x_1, y_1) acting upon a section tangent to the curve at this point will be a continuous function of the coordinates and the slope:

$$P = \Phi\left(x_1, y_1, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

Designating the slope of $\boldsymbol{P}$ by $\frac{dy'}{dx'}$, it is known that the directions of corresponding sections and stresses form an involutoric pencil[1]), so that

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{a\frac{dy}{dx} + b}{c\frac{dy}{dx} - a}, \tag{2}$$

where a, b, c are functions of x_1 and y_1 determined by the conditions of the field.

In order that corresponding sections and stresses are perpendicular to each other we have the condition

$$p \cdot p' = -1, \quad \left(p' = \frac{dx'}{dy'}\right)$$

or

$$p \cdot \frac{ap + b}{cp - a} = -1.$$

Solving for p we get

$$p_{1,2} = \frac{-b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 4a^2}}{2a}$$

and the product of the two roots is plainly $p_1 \cdot p_2 = -1$. Thus the solution of the two differential equations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a^2}}{2a}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-b - c - \sqrt{(b + c)^2 + 4a^2}}{2a} \tag{3}$$

1) Arnold Emch: *An introduction to projective geometry and and its applications;* pp. 224—239. John Wiley & Sons, New York.

Digitized by Google

leads to the system of orthogonal trajectories representing the curves of normal stresses.[1])

The purpose of this article is to determine those among these curves which when considered as perfectly flexible and of constant length (inelastic) remain in equilibrium under the sole action of the normal stresses. If this shall be the case, the curve must be a funicular polygon of the normal stresses. Suppose that

$$y = f(x) \tag{4}$$

be such a curve and ds an element of this curve. Then the stress at the point (x, y) along the element $\left(ds, \frac{dy}{dx}\right)$ is

$$\lambda \cdot \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) ds \tag{5}$$

where λ is constant depending upon the nature of the field. If we designate the limits of s corresponding to the arc AB of the curve by s_0 and s, the sum of the stresses from A to B over the curve is

$$\sigma = \lambda \int_{s_0}^{s} \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) ds, \tag{6}$$

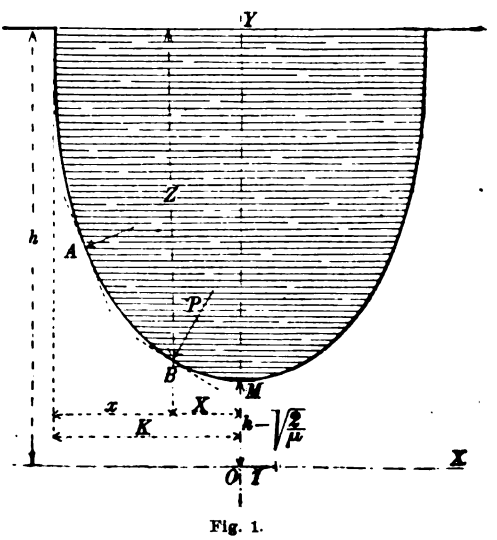


Fig. 1.

Fig. 1. Construct now in a uv-plane the force-curve (polygon) of all stresses as represented by (6) and on the same scale. In this manner, in Fig. 2, an arc $A'B'$ in the uv-plane is obstained, so that

$$A'B' = \lambda \int_{s_0}^{s} \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) ds \tag{7}$$

and which represents a part of the force-curve

$$v = g(u). \tag{8}$$

According to the requirements of the problem this curve must be such that the funicular polygon constructed by means of this curve is identical with (4). Hence, connecting B' with the pole O, OB' must have the same direction as the tangent at B and as the stress P is perpendicular to the tangent at B, OB' is also perpendicular to the

1) See also Ritter: *Graphische Statik*, Vol. I, pp 1—46, Meyer & Zeller, Zürich.

Digitized by Google

tangent at B' to the curve $v = g(u)$. The latter is therefore a circle. In fact

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}$$

and from this $u^2 + v^2 = r^2$.

(9) From Fig. 2 $A'B' = r\left(\arctan\frac{v}{u} - \arctan\frac{v_0}{u_0}\right)$, $(u_0 v_0)$ designating the coordinates of A'. But $\frac{v}{u} = -1/\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$. Substituting this in (9) and replacing $A'B'$ by its expression in (7), there is

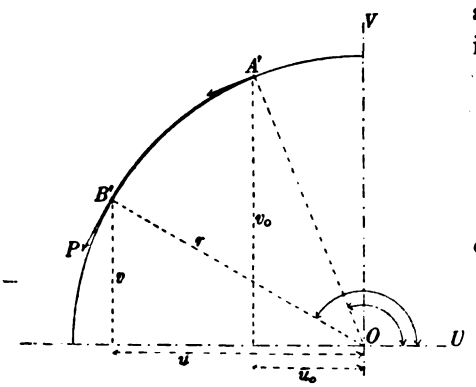


Fig. 2.

$$\lambda\int_{s_0}^{s}\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)ds = r\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) - \arctan\frac{v_0}{u_0}\right),$$

or

$$\lambda\int_{x_0}^{x}\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = r\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) - \arctan\frac{v_0}{u_0}\right).$$

Differentiating with respect to x, we get

$$(10)\qquad \lambda\,\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = r\cdot\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Putting again $\frac{dy}{dx} = p$, this reduces to

$$(11)\qquad \frac{dp}{dx}(1+p^2)^{-\frac{3}{2}} = \mu\,\Phi(x, y, p)\,^1),$$

in which $\mu = \frac{\lambda}{\gamma}$. (11) is the required differential equation which may be solved when the particular form of Φ is known.

2. We shall solve the equation for the case of a field represented by the pressures in a vertical plane through a fluid. Assume the coordinate-axes in a horizontal and vertical position in this plane and let h be the distance of the level of the fluid above the x-axis. The pressure pro unit length at any point (x, y) is proportional to the head $(h - y)$ and is the same for all values of p. The expression for Φ is therefore simply

$$(12)\qquad P = \lambda(h - y).$$

1) It will be noticed that the left hand side of (11) represents the reciprocal of the radius of curvature.

Digitized by Google

Putting $h - y = z$, so that $\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$ and designating now by p the derivative $\frac{dz}{dx}$, then $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{dp}{dx} = -\frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -p\cdot\frac{dp}{dz}$. But as $dz = -dy$, $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dz = -\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\cdot dz$, the transformation $h - y = z$ changes the sign of the radical. We have therefore from (11):

$$\frac{dp}{dz}p(1+p^2)^{-\frac{3}{2}} = \mu z, \tag{13}$$

or

$$\mu z\,dz = \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrating, we get

$$\mu z^2 = \frac{-2}{\sqrt{1+p^2}} + \nu$$

and solving for $p = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{4 - \nu^2 + 2\mu\nu z^2 - \mu^2 z^4}}{\mu z^2 - \nu}, \tag{13'}$$

and

$$x = \int \frac{(\mu z^2 - \nu)\,dz}{\sqrt{4 - \nu^2 + 2\mu\nu z^2 - \mu^2 z^4}} + \varrho. \tag{14}$$

We shall determine the first constant of integration such that $\frac{dz}{dx} = 0$ for $z = +\sqrt{\frac{2}{\mu}}$, or $y = h - \sqrt{\frac{2}{\mu}}$. This is the case when $\nu = 0$, and (14) becomes, taking limits from z to $+\sqrt{\frac{2}{\mu}}$,

$$X = \int_z^{\sqrt{\frac{2}{\mu}}} \frac{\mu z^2\,dz}{\sqrt{4 - \mu^2 z^4}}. \tag{15}$$

This elliptic integral may be resolved into the difference of an elliptic integral of the first and second kind by the substitution $\frac{2}{\mu} - z^2 = \frac{2}{\mu}t^2$, with the corresponding limits t and 0. Thus (15) may by resolved into

$$X = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^t \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}}. \tag{16}$$

Putting further $t = \operatorname{sn} v$, (16) may be written in the form

$$X = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left\{v - \int_0^v \operatorname{sn}^2 v\,dv\right\}. \tag{17}$$

Digitized by Google

This result may also be expressed by Weierstrassian σ-functions. For this purpose, write $v = \sqrt{e_1 - e_2}\cdot u$; with $e_\alpha = \wp(w_\alpha)$; then

$$\int_0^v \mathrm{sn}^2 v\,dv = \sqrt{e_1 - e_2}\int_0^u \frac{e_1 - e_2}{\wp u - e_2}\,du.$$

But $\dfrac{e_1 - e_2}{\wp u - e_2} = \dfrac{1}{e_3 - e_2}\,\wp(u + w_2) - \dfrac{e_2}{e_3 - e_2}$, hence

$$\sqrt{e_1 - e_2}\int_0^u \frac{e_1 - e_2}{\wp u - e_2}\,du = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_3 - e_2}\left\{\int_0^u \wp(u + w_2)\,du - e_2 u\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_3 - e_2}\left\{-\frac{\sigma'(u + w_2)}{\sigma(u + w_2)} + \frac{\sigma' w_2}{\sigma w_2} - e_2 u\right\}.$$

Now $\dfrac{\sigma'(u + w_2)}{\sigma(u + w_2)} = \dfrac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \eta_2$, where $\eta_2 = \zeta(w_2) = \dfrac{\sigma' w_2}{\sigma w_2}$,

hence

$$\int_0^v \mathrm{sn}^2\,dv = -\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_3 - e_2}\left\{\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + e_2 u\right\}$$

and (17) becomes

$$X = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{(e_3 - e_2)\sqrt{\mu}}\left\{\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + e_3 u\right\}. \tag{18}$$

The reduction of (17) to this form does not lead to the most simple numerical computation for the coordinates of the curve. With this end in view, the integrand of (15) may be developed into a series and then integrated term by term within limits for which the series is absolutely convergent. The integrand of (15) becomes infinite for the upper limit. But as

$$\lim_{z \doteq \sqrt{\frac{1}{\mu}}}\left\{\frac{z^2\left(\sqrt{\frac{2}{\mu}} - z\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\mu}\right)^2 - z^4}}\right\} = \lim_{z \doteq \sqrt{\frac{2}{\mu}}}\left\{\frac{z^2}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{\mu}} + z\right)\left(\frac{2}{\mu} + z^2\right)}}\right\}$$

is clearly finite, integral (15) is convergent. If $z = 0$, $y = h$, which corresponds to the initial point of the curve in the fluid-level. The lowest point of the curve is obtained for $z = \sqrt{\frac{2}{\mu}}$. The ordinate z may therefore vary between 0 and $\sqrt{\frac{2}{\mu}}$ and y between h and $h - \sqrt{\frac{2}{\mu}}$. To expand the integrand, we write

$$\int_0^z \frac{\mu z^2\,dz}{\sqrt{4 - \mu^2 z^4}} = \frac{\mu}{2}\int_0^z \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4} z^4}}.$$

Digitized by Google

Now $z^2\left(1-\frac{\mu^2 z^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\mu^{2n}}{4^n}\cdot\frac{z^{4n+2}}{4n+2}$,

consequently by integration

$$(19)\quad x = \int_0^z \frac{\mu z^2\,dz}{\sqrt{4-\mu^2 z^4}} = \frac{\mu}{2}\left\{\frac{z^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\frac{\mu^{2n}}{4^n}\cdot\frac{z^{4n+3}}{4n+3}\right\}.$$

This series is absolutely convergent for all values of $|z| < \sqrt{\frac{2}{\mu}}$. Applying Raabe's test, it is found that it also converges for the limit $z = \sqrt{\frac{2}{\mu}}$.

For this value of z (19) becomes

$$(20)\quad K = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\left\{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(4n+3)}\right\}.$$

Designating the general term of this series by T_n, then

$$\lim_{n=\infty}\left\{n\left(\frac{T_n}{T_{n+1}}-1\right)\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{n\,\frac{(2n+2)(4n+7)}{(2n+1)(4n+3)} - 1\right\}$$
$$= \lim_{n=\infty}\left\{n\,\frac{12n+11}{(2n+1)(4n+3)}\right\}$$
$$= \lim_{n=\infty}\frac{12+\frac{11}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)} = \frac{3}{2} > 1;$$

which shows that the series is convergent.

The relation between x, X and K is given by

$$x = \int_0^z = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\mu}}} - \int_z^{\sqrt{\frac{2}{\mu}}},$$

or

$$(21)\quad x = K - X.$$

Choosing the Y-axis through the lowest point M of the curve, then we have as abscissa from (21) and from the fact that according to (13′) for every value of z there are two slopes of opposite sign:

$$X = \pm(K - x),$$

or ultimately, replacing X by x,

$$(22)\quad x = \pm\left\{K - \frac{\mu}{2}\cdot\frac{(h-y)^3}{3} - \frac{\mu}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\left(\frac{\mu}{2}\right)^{2n}\frac{(h-y)^{4n+3}}{4n+3}\right\}.$$

Digitized by Google

Fig. 1 represents this curve. The unit of measurement is indicated on the X-axis. The constant $\frac{2}{\mu}$ has been assumed as 100 units.

The expansion of (15) into a series for numerical computation might be avoided by introducing the Legendrean normal integrals $F(k, \varphi)$ and $E(k, \varphi)$. There is

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-\frac{1}{2}t^2)}} = F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi),$$

$$\int_0^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-\frac{1}{2}t^2)}} = 2\{F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi) - E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi)\},$$

so that (16) reduces to

$$X = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\{E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi) - \tfrac{1}{2}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi)\}. \tag{23}$$

By means of the „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven", Leipzig 1909, B. G. Teubner, by E. Jahnke and F. Emde, pp. 46—64, (23) may easily be plotted and leads to the same graph as shown in fig. 1.

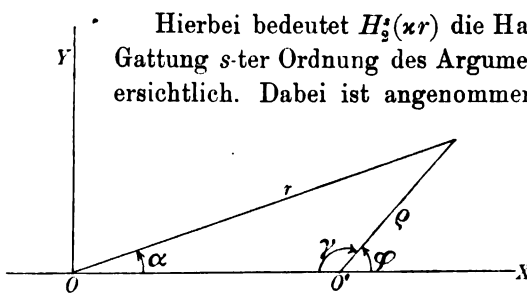
Illinois, May 18, 1911.

Über die Reihenentwicklungen mit Zylinderfunktionen.

Von W. v. IGNATOWSKY in Berlin.

Wir nehmen an, die Funktion F sei gegeben durch die Reihe

$$F = A_0 H_2^0(\varkappa r) + \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s H_2^s(\varkappa r) \cos s\alpha + \sum_{s=1}^{s=\infty} B_s H_2^s(\varkappa r) \sin s\alpha. \tag{1}$$



Hierbei bedeutet $H_2^s(\varkappa r)$ die Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Gattung s-ter Ordnung des Argumentes $\varkappa r$; α und r sind aus der Figur ersichtlich. Dabei ist angenommen, daß F durch die Reihe (1) dargestellt ist außerhalb eines Kreises vom Radius r_1. Ist $OO' > r_1$, so ist F im Punkte O' endlich und durch (1) definiert. Falls wir annehmen, daß für $OO' = b$

$$\varrho \leqq b - r_1 \tag{2}$$

ist, muß sich F um den Punkt O' herum in eine Reihe

$$F = D_0 J_0(\varkappa\varrho) + \sum_1^\infty D_n J_n(\varkappa\varrho) \cos n\varphi + \sum_1^\infty E_n J_n(\varkappa\varrho) \sin n\varphi \tag{3}$$

entwickeln lassen. $J_n(\varkappa\varrho)$ ist die Zylinderfunktion erster Art.

Digitized by Google

Wir wollen nun im folgenden die Koeffizienten D_n und G_n mit Hilfe von A_s und B_s bestimmen.

Zu dem Zweck gehen wir von der bekannten Entwicklung[1]) aus

$$H_2^0(\varkappa r) = H_2^0(\varkappa b) J_0(\varkappa \varrho) + 2\sum_1^\infty H_2^n(\varkappa b) J_n(\varkappa \varrho) \cos n\gamma, \tag{4}$$

die gültig ist, falls

$$b > \varrho \tag{5}$$

angenommen wird. Da $\gamma = \pi - \varphi$ ist, so erhalten wir statt (4)

$$H_0(\varkappa r) = H_0(\varkappa b) J_0(\varkappa \varrho) + 2\sum_1^\infty (-1)^n H_2^n(\varkappa b) J_n(\varkappa \varrho) \cos n\varphi. \tag{6}$$

Weiter haben wir

$$r = \sqrt{b^2 + \varrho^2 + 2b\varrho\cos\varphi} \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \frac{b + \varrho\cos\varphi}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{\varrho\sin\varphi}{r}. \tag{8}$$

$$\frac{\partial r}{\partial b} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\frac{b\varrho\sin\varphi}{r} = -b\sin\alpha. \tag{9}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial H_2^0(\varkappa r)}{\partial \varphi} = -\varkappa H_2^1(\varkappa r)\frac{\partial r}{\partial \varphi} = b\varkappa H_2^1(\varkappa r)\sin\alpha \tag{10}$$

und demnach aus (6)

$$H_2^1(\varkappa r)\sin\alpha = -\frac{2}{\varkappa b}\sum_1^\infty (-1)^n n H_2^n(\varkappa b) J_n(\varkappa\varrho)\sin n\varphi. \tag{11}$$

Bei der Integration nach φ von $-\pi$ bis $+\pi$ erhalten wir aus (5) und (11)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} H_2^0(\varkappa r)\, d\varphi = 2\pi H_2^0(\varkappa b) J_0(\varkappa\varrho) \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} H_2^0(\varkappa r)\cos n\varphi\, d\varphi = 2\pi(-1)^n H_2^n(\varkappa b) J_n(\varkappa\varrho) \tag{13}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} H_2^0(\varkappa r)\sin n\varphi\, d\varphi = 0 \tag{14}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} H_2^1(\varkappa r)\sin\alpha\cos n\varphi\, d\varphi = 0 \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} H_2^1(\varkappa r)\sin\alpha\sin n\varphi\, d\varphi = -\frac{2\pi n}{\varkappa b}(-1)^n H_2^n(\varkappa b) J_n(\varkappa\varrho). \tag{16}$$

---

1) Siehe z. B. N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Leipzig, B. G. Teubner, 1904, S. 280.

Digitized by Google

Für eine beliebige Zylinderfunktion Z_n mit dem Argumente x ist bekanntlich, falls Z_n', Z_n'' usw. die erste, zweite usw. Derivierte von Z_n nach dem Argumente bedeuten:

$$Z_n' = \frac{n}{x} Z_n - Z_{n+1} \tag{17}$$

$$Z_n' = Z_{n-1} - \frac{n}{x} Z_n \tag{18}$$

$$(-1)^n Z_n = Z_{-n}. \tag{19}$$

Aus (17 und (18) folgt

$$2 Z_n' = Z_{n-1} - Z_{n+1} \tag{20}$$

$$\frac{2nZn}{x} = Z_{n-1} + Z_{n+1}. \tag{21}$$

Durch sukzessive Differentiation von (20) unter ständiger Anwendung derselben Formel (20) gewinnen wir

$$\begin{cases} 4Z_n'' + 2Z_n = Z_{n-2} + Z_{n+2} \\ 8Z_n''' + 6Z_n' = Z_{n-3} - Z_{n+3} \\ 16Z_n'''' + 16Z_n'' + 2Z_n = Z_{n-4} + Z_{n+4} \\ \text{usw.} \end{cases} \tag{22}$$

Ebenso erhalten wir aus (21), falls wir die linke Seite davon mit G_n bezeichnen:

$$\begin{cases} 2G_n' = Z_{n-2} - Z_{n+2} \\ 4G_n'' + G_n = Z_{n-3} + Z_{n+3} \\ 8G_n''' + 4G_n' = Z_{n-4} - Z_{n+4} \\ 16G_n'''' + 12G_n'' + G_n = Z_{n-5} + Z_{n+5} \\ \text{usw.} \end{cases} \tag{23}$$

Aus den bekannten Reihenentwicklungen für $\cos s\alpha$ ergibt sich unter Berücksichtigung von (20), (8) und (9)

$$\begin{cases} \frac{\partial H_0^2(\varkappa r)}{\partial b} = -\varkappa H_2^1(\varkappa r) \frac{\partial r}{\partial b} = -\varkappa H_2^1(\varkappa r) \cos\alpha \\ \frac{\partial H_2^1(\varkappa r)\cos\alpha}{\partial b} = \frac{\varkappa}{2}\{H_2^0(\varkappa r) - H_2^2(\varkappa r)\cos 2\alpha\} \\ \frac{\partial H_2^2(\varkappa r)\cos 2\alpha}{\partial b} = \frac{\varkappa}{2}\{H_2^1(\varkappa r)\cos\alpha - H_2^3(\varkappa r)\cos 3\alpha\} \end{cases} \tag{24}$$

und endlich allgemein

$$\frac{\partial H_2^s(\varkappa r)\cos s\alpha}{\partial b} = \frac{\varkappa}{2}\{H_2^{s-1}(\varkappa r)\cos(s-1)\alpha - H_2^{s+1}(\varkappa r)\cos(s+1)\alpha\}. \tag{25}$$

Führen wir nun die Bezeichnungen

$$H_2^s(\varkappa r)\cos s\alpha = Ms, \qquad \varkappa b = x \tag{26}$$

Digitized by Google

ein, so fließt aus (24) und (25)

$$(27)\quad \begin{cases} M_1 = -\frac{\partial M_0}{\partial x}; \quad M_2 = 2\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + M_0 \\ M_3 = -4\frac{\partial^3 M_0}{dx^3} - 3\frac{\partial M_0}{\partial x}; \quad M_4 = 8\frac{\partial^4 M_0}{\partial x^4} + 8\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + M_0 \\ M_5 = -16\frac{\partial^5 M_0}{\partial x^5} - 20\frac{\partial^3 M_0}{\partial x^3} - 3\frac{\partial M_0}{\partial x} \end{cases}$$

usw.

Ganz analog ergibt sich, falls wir die Reihenentwicklungen für $\sin s\alpha$ berücksichtigen:

$$(28)\quad \frac{\partial H_2^1(xr)\sin\alpha}{\partial b} = -\frac{x}{2} H_2^2(xr)\sin 2\alpha$$

und allgemein

$$(29)\quad \frac{\partial H_2^s(xr)\sin s\alpha}{\partial b} = \frac{x}{2}\{H_2^{s-1}(xr)\sin(s-1)\alpha - H_2^{s+1}(xr)\sin(s+1)\alpha\}.$$

Führen wir ferner die Bezeichnung

$$(30)\quad H_2^s(xr)\sin s\alpha = N_s$$

ein, so folgt aus (28) und (29) ($xb = x$)

$$(31)\quad \begin{cases} N_0 = 0; \quad N_1 = N_1; \quad N_2 = -2\frac{\partial N_1}{\partial x} \\ N_3 = 4\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + N_1; \quad N_4 = -8\frac{\partial^3 N_1}{\partial x^3} - 4\frac{\partial N_1}{\partial x} \\ N_5 = 16\frac{\partial^4 N_1}{\partial x^4} + 12\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + N_1 \end{cases}$$

usw.

Aus (13) finden wir dann durch sukzessive Differentiation nach $x = xb$, infolge von (27) und (22):

$$(32)\quad \int_{+\pi}^{-\pi} H_2^s(xr)\cos s\alpha\cos n\varphi\, d\varphi = \pi(-1)^n(-1)^s J_n(x\varrho)\{H_2^{n-s}(xb) + (-1)^s H_2^{n+s}(xb)\}$$

und aus (14)

$$(33)\quad \int_{+\pi}^{-\pi} H_2^s(xr)\cos s\alpha\sin n\varphi\, d\varphi = 0.$$

Weiter folgt aus (16) unter Berücksichtigung von (31) und (23)

$$(34)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} H_2^s(xr)\sin s\alpha\sin n\varphi\, d\varphi = \pi(-1)^n(-1)^s J_n(x\varrho)\{H_2^{n-s}(xb) - (-1)^s H_2^{n+s}(xb)\}$$

und aus (15)

$$(35)\quad \int_{-\pi}^{+\pi} H_2^s(xr)\cos s\alpha\sin n\varphi\, d\varphi = 0.$$

Digitized by Google

Mit Hilfe von (32)—(35) erhalten wir sofort aus (1) und (3), durch entsprechende Integration nach φ von $-\pi$ bis $+\pi$, die gesuchten Koeffizienten D_n und E_n, und zwar findet sich

$$D_0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s H_2^s(\varkappa b) \tag{36}$$

$$D_n = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s (-1)^s \{ H_2^{n-s}(\varkappa b) + (-1)^s H_2^{n+s}(\varkappa b) \} \tag{37}$$

und

$$E_n = (-1)^n \sum_{s=1}^{s=\infty} B_s (-1)^s \{ H_2^{n-s}(\varkappa b) - (-1)^s H_2^{n+s}(\varkappa b) \}. \tag{38}$$

Wir können im Vorhergehenden statt der Hankelschen Zylinderfunktion H eine beliebige andere setzen, ohne daß sich die Resultate ändern. Setzen wir im speziellen Fall J statt H, so fällt die Bedingung (5) weg.

Um eine physikalische Anwendung der vorigen Entwicklungen zu zeigen, betrachten wir den Fall m paralleler äquidistanter Drähte vom gleichen Durchmesser, also ein Gitter. Senkrecht auf dasselbe falle eine ebene Welle. Die Z-Koordinate soll parallel zu den Achsen der Drähte gehen. Es ist dann von Z alles unabhängig. Für die Gesamtheit R der reflektierten Wellen für einen Punkt P in der XY-Ebene können wir den Ausdruck

$$R = \sum_{p=1}^{p=m} F_p \tag{39}$$

annehmen, wobei jedes F durch (1) gegeben ist und die entsprechenden r die Entfernungen von P bis zu den Mittelpunkten der betreffenden Drähte bedeuten.

Wir legen nun den Anfang des Koordinatensystems z. B. in die Achse des zweiten Drahtes. Dann können wir alle F_p, außer F_2, um den zweiten Draht herum, nach den Zylinderfunktionen J entwickeln und erhalten dann für die so gebildete Summe den Wert R_2. Demnach ergibt sich an der Oberfläche des zweiten Drahtes für den Wert der reflektierten Wellen der Ausdruck

$$R = R_2 + F_2. \tag{40}$$

Hieraus können wir nun, zusammen mit der gegebenen einfallenden Welle, die konstanten Koeffizienten bestimmen, um den Grenzbedingungen zu genügen.

Haben wir eine endliche Anzahl von Drähten, so müssen wir diese Bestimmung für jeden Draht ausführen; bei zwei Drähten aber nur für einen Draht, da sich hierbei beide Drähte gleich verhalten. Im Falle

Digitized by Google

unendlich vieler Drähte genügt es auch, die Grundbedingungen für nur einen Draht zu bestimmen, da in diesem Falle sich alle Drähte gleich verhalten. Formal läßt sich also die gestellte Aufgabe mit Hilfe der vorhergehenden Reihenentwicklung lösen. Was aber die wirkliche Auswertung der Koeffizienten anbelangt, so stellen sich hierbei große Schwierigkeiten ein. Wir kommen später noch einmal darauf zurück.

Berlin, den 13. Mai 1911.

Über lamellare Rotationsbewegung viskoser Flüssigkeiten.

Von KARL MENGES in Mainz.

Der Raum zwischen zwei sich nicht schneidenden konachsialen Rotationsflächen sei von einer viskosen Flüssigkeit erfüllt. Die eine der Flächen werde durch einen Motor in gleichförmiger Rotation um ihre Achse erhalten. Infolge der inneren Reibung der Flüssigkeit wird dabei auf die andere Fläche nach Eintritt des stationären Zustands ein konstantes Drehmoment ausgeübt, das durch eine passende Vorrichtung gemessen werden kann. Theoretische Formeln für die Größe dieses Drehmoments sind bisher abgeleitet worden für die drei Fälle, daß die Grenzflächen 1. konachsiale unendlich lange Zylinder[1]), 2. konzentrische Kugeln[2]), 3. konfokale Ellipsoide[2]) sind, und zwar für jeden Fall durch eine besondere, geeignete Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen. Doch haben die drei Integrale den Umstand gemeinsam, daß die von ihnen dargestellten Bewegungen der Flüssigkeit lamellar sind, d. h., daß die ganze Flüssigkeit in unendlich dünne Schichten zerfällt, die die Gestalt von Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse haben und die sich während der Bewegung einzeln wie starr verhalten. Im Folgenden soll eine bei allen solchen Flüssigkeitsbewegungen gültige allgemeine Formel für jenes Drehmoment abgeleitet werden.

Jede Bewegung einer inkompressiblen, der Reibung unterworfenen Flüssigkeit gehorcht den Grundgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+X \\ \sigma\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+Y \\ \sigma\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+Z \end{cases}$$

1) M. Margules, Sitzungsberichte d. Ak. d. Wiss. Wien. Bd. 83. Abt. 2. S. 588. (1881.)

2) Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26. Vorl.

Digitized by Google

und der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Hierbei bedeuten x, y, z die Koordinaten eines Punkts innerhalb der Flüssigkeit, bezogen auf ein willkürliches, aber festes, rechtwinkliges Koordinatensystem; u, v, w die nach den Koordinatenachsen genommenen Komponenten der Geschwindigkeit, p den Druck in diesem Punkt zur Zeit t; X, Y, Z die nach den Koordinatenachsen genommenen Komponenten der zur Zeit t in (x, y, z) wirkenden äußeren Kräfte, bezogen auf die Masseneinheit; σ die Dichte, η den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit.

Für unser Problem setzen wir die gemeinsame Achse der Grenzflächen und der Flüssigkeitslamellen vertikal voraus und wählen sie zur z-Achse mit der positiven Richtung nach oben. Dann ist zunächst, wenn als äußere Kraft nur die Schwere wirkt, wie wir annehmen wollen:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g\sigma, \tag{3}$$

wo g die Erdbeschleunigung bedeutet. Die Rotationsflächen, in denen nach der gemachten Annahme der lamellaren Bewegung die Winkelgeschwindigkeit konstant sein soll, mögen die Gleichung haben:

$$\lambda = f(\varrho, z), \tag{4}$$

wo $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und λ ein Parameter ist; $\lambda = \lambda_1$ möge die feste, $\lambda = \lambda_2$ die bewegte Grenzfläche definieren. Bezeichnet weiter φ die Winkelgeschwindigkeit im Punkt (x, y, z), so ist zu setzen:

$$u = -y \cdot \varphi, \quad v = x \cdot \varphi, \quad w = 0. \tag{5}$$

φ ist Funktion von λ und soll vorläufig im Interesse der Allgemeinheit noch von der Zeit t abhängen.

Die Kontinuitätsbedingung (2) wird durch den Ansatz (5) identisch erfüllt, ohne der Größe φ besondere Bedingungen aufzuerlegen. Die Grundgleichungen (1) gehen infolge von (3) und (5) der Reihe nach über in:

$$\begin{cases} \sigma\left(-y\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - x\varphi^2\right) = -\eta \cdot y \cdot F - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \sigma\left(\ x\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - y\varphi^2\right) = \ \ \eta \cdot x \cdot F - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \qquad\qquad 0 \ = \qquad\qquad -\dfrac{\partial p}{\partial z} - g\sigma, \end{cases} \tag{6}$$

wo zur Abkürzung

$$F = \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} + \left[\frac{3}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \tag{7}$$

Digitized by Google

gesetzt ist. Aus Symmetriegründen ist p nur von $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und z abhängig, sodaß

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{x}{\varrho}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{y}{\varrho} \tag{8}$$

ist. Multipliziert man die erste der Gleichungen (6) mit $-y$, die zweite mit x, sodann die erste mit x, die zweite mit y und addiert jedesmal unter Rücksicht auf (8), so erhält man statt des Gleichungssystems (6) das ihm gleichwertige System:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a)} \quad F - \frac{\sigma}{\eta}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial p}{\partial \varrho} = \sigma \varrho \varphi^2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\sigma, \end{array}\right. \tag{9}$$

welches neben größerer Einfachheit den Vorteil hat, daß die eine Gleichung (nämlich 9a) die nicht weiter interessierende Größe p nicht enthält. Da nun

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

ist, so folgt aus (9b):

$$\frac{\partial(\sigma \varrho \varphi^2)}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

und da ϱ unabhängige Variable und σ von z ebenfalls unabhängig ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

d. h. φ und folglich auch λ muß von z unabhängig sein, oder: *Die Zylinderflächen sind die einzigen, denen sich die partikularen Integrale* (5) *anpassen lassen, sowohl bei stationärer als nichtstationärer Bewegung.*

Will man die gemachten Annahmen auch noch durchführen, wenn (4) keine Zylinderflächen sind, so muß man auf Strenge verzichten und sich mit einer angenäherten Erfüllung der Gleichung (10) begnügen. Die Annäherung wird offenbar um so vollkommener, 1. je weniger die Flächen (4) von Zylinderflächen abweichen, 2. je kleiner alle in der Flüssigkeit vorkommenden Geschwindigkeiten sind. Für das Folgende sei die Voraussetzung gemacht, daß (10) genau oder in hinreichender Annäherung erfüllt ist. Dann ist (9a) die einzige noch zu befriedigende Gleichung. — Auf (9a) als einzige Bedingung für φ führt die Rechnung auch, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, von vornherein in den Grundgleichungen (1) die Glieder $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $v\frac{\partial u}{\partial y}$, ... vernachlässigt. Kirchhoff geht bei Behandlung der eingangs erwähnten Fälle, daß die Grenzflächen Kugeln oder Ellipsoide sind, in der Tat so vor und rechtfertigt es durch die Voraussetzung, daß die vorkommenden Geschwindigkeiten unendlich klein sind. Daß aber überdies

Digitized by Google

die gemachte Vernachlässigung um so berechtigter ist, je weniger die Flächen (4) von Zylinderflächen abweichen, bleibt unbemerkt.

Für den Fall der stationären Bewegung, den wir jetzt betrachten wollen, geht (9a) über in:

$$(11) \qquad F \equiv \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} + \left[\frac{3}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0.$$

Es sei zur Abkürzung:

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = P, \quad \frac{3}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = Q$$

gesetzt. Da φ allein von λ abhängt, so muß es nach (11) auch der Quotient $\frac{P}{Q}$ tun. (11) hat das allgemeine Integral:

$$(13) \qquad \varphi = \int_b^{\lambda} e^{a \int_{\cdot}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda,$$

wo a und b willkürliche Konstanten sind. Zu ihrer Bestimmung müssen die folgenden an der Begrenzung der Flüssigkeit gültigen *Grenzbedingungen* herangezogen werden:

$$(14) \qquad \begin{cases} 0 = \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - E_1\varphi & \text{für } \lambda = \lambda_1 \\ 0 = \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - E_2(\varphi - \psi) & \text{für } \lambda = \lambda_2, \end{cases}$$

wo E_1 und E_2 die Koeffizienten der äußeren Reibung an der festen bzw. bewegten Grenzfläche, ψ die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Fläche, n die in die Flüssigkeit gerichtete Normale der Grenzfläche bedeuten. Nun ist:

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdot\dfrac{\partial\lambda}{\partial n} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\cos(n,x) + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\cos(n,y) + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\cos(n,z)\right) \\ = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdot\dfrac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\sqrt{P}. \end{cases}$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu bestimmen, daß $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ für $\lambda = \lambda_1$ positiv, für $\lambda = \lambda_2$ negativ wird. Wir schreiben also statt (15) genauer:

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \pm\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\sqrt{P} & \text{für } \lambda = \lambda_1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \mp\dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\sqrt{P} & \text{für } \lambda = \lambda_2, \end{cases}$$

Digitized by Google

wo die Wurzeln absolut zu nehmen sind und die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem λ beim Übergang von λ_1 durch die Flüssigkeit bis λ_2 wächst oder fällt. Durch Benutzung von (13) und (16) gewinnen die Gleichungen (14) die Form:

$$(17)\quad \begin{cases} 0 = \pm\, \gamma_1 \sqrt{P_{\lambda_1}} \cdot e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P} d\lambda} - \int_b^{\lambda_1} e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} -\frac{Q}{P} d\lambda} d\lambda \\ 0 = \mp\, \gamma_2 \sqrt{P_{\lambda_2}} \cdot e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda_2} -\frac{Q}{P} d\lambda} - \int_b^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda} -\frac{Q}{P} d\lambda} d\lambda + \psi, \end{cases}$$

wo $\gamma_1 = \frac{\eta}{E_1}$, $\gamma_2 = \frac{\eta}{E_2}$ ist. Durch die Gleichungen (5), (13), (17) ist die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit festgelegt.

Um jetzt das Moment zu berechnen, das infolge der Reibung auf die feste Fläche ausgeübt wird, zerlege man diese durch ein System von Meridiankurven und ein System von Parallelkreisen in Elemente von der Größe $\varrho d\alpha ds$, wo ds das Bogenelement des Meridians, $d\alpha$ der Winkel zweier unendlich benachbarter Meridianebenen ist. Das Moment der Reibung auf ein solches Element ist:

$$dM_1 = \varrho \cdot E_1 \varrho \varphi_{\lambda_1} \cdot \varrho d\alpha ds = E_1 \varphi_{\lambda_1} \cdot \varrho^3 d\alpha ds$$

oder infolge der ersten Gleichung (14) und der ersten von (16):

$$dM_1 = \pm\, \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1} \cdot \sqrt{P_{\lambda_1}} \varrho^3 d\alpha ds = \pm\, \eta \sqrt{P_{\lambda_1}} \cdot e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P} d\lambda} \varrho^3 d\alpha ds.$$

Das Moment auf die ganze Fläche wird daher:

$$(18)\quad M_1 = \pm\, \eta e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P} d\lambda} \iint \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_1}} ds d\alpha = \pm 2\pi \cdot \eta e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P} d\lambda} \int \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_1}} ds,$$

wo das letzte Integral über den einfachen Meridian der festen Fläche zu erstrecken ist. In (18) tritt nur die Konstante a, nicht aber b auf. Aus (17) folgt durch Subtraktion:

$$0 = \pm \left(\gamma_1 \sqrt{P_{\lambda_1}} e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P} d\lambda} + \gamma_2 \sqrt{P_{\lambda_2}} e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda_2} -\frac{Q}{P} d\lambda} \right) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda} -\frac{Q}{P} d\lambda} d\lambda - \psi$$

Digitized by Google

und hieraus:

$$(19)\qquad \psi = \pm\, e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P}\,d\lambda} \left\{ \gamma_1 \sqrt{P_{\lambda_1}} + \gamma_2 \sqrt{P_{\lambda_2}}\, e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} -\frac{Q}{P}\,d\lambda} \pm \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda \right\}.$$

Mit Hilfe von (19) wird jetzt aus (18):

$$(20)\qquad M_1 = \frac{2\pi\eta\psi \cdot \int \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_1}}\, ds}{\gamma_1 \sqrt{P_{\lambda_1}} + \gamma_2 \sqrt{P_{\lambda_2}} \cdot e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} -\frac{Q}{P}\,d\lambda} \pm \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda}.$$

Für das Drehmoment M_2, das die Flüssigkeit auf die *bewegte* Grenzfläche im Sinne der Drehung ausübt, erhält man auf analoge Weise (unter Benutzung der zweiten Gl. (14) und der von (16)) die Formel:

$$(21)\qquad M_2 = -\frac{2\pi\eta\psi \cdot \int \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_2}}\, ds}{\gamma_1 \sqrt{P_{\lambda_1}} \cdot e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} -\frac{Q}{P}\,d\lambda} + \gamma_2 \sqrt{P_{\lambda_2}} \pm \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda}.$$

Das Integral des Zählers in (21) ist über den einfachen Meridian der bewegten Grenzfläche zu erstrecken.

Wird $E_1 = E_2 = \infty$ oder $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, d. h. haftet die Flüssigkeit an dem festen Material der Grenzflächen, so geht (20) über in

$$(20')\qquad M_1' = \frac{2\pi\eta\psi \int \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_1}}\, ds}{\pm \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda}$$

und (21) in:

$$(21')\qquad M_2' = -\frac{2\pi\eta\psi \int \varrho^3 \sqrt{P_{\lambda_2}}\, ds}{\pm \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\int_{\lambda_2}^{\lambda} -\frac{Q}{P}\,d\lambda}\, d\lambda}.$$

Zu den Formeln (20), (20′) und (21), (21′) sind noch einige Bemerkungen nötig:

1. Sie gelten nur streng, wenn die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit Zylinder sind, in den übrigen Fällen um so besser, je weniger die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit von Zylindern abweichen und je kleiner die auftretenden Geschwindigkeiten sind.

Digitized by Google

2. Es war vorausgesetzt worden, daß $\frac{Q}{P}$ nur von λ abhängt. P und Q selbst durften außer von λ auch noch von ϱ oder z abhängen. Sowie nun P von dieser seiner Freiheit Gebrauch macht, werden die Gleichungen (20) und (21) unsinnig, (20′) und (21′) dagegen nicht; denn die zwei ersten Glieder im Nenner von (20) und (21) enthalten dann noch die Variabeln ϱ und z. Die Formeln (20) und (21) sind also nur dann brauchbar, wenn P Funktion der einzigen Variablen λ ist. Der Grund hierfür liegt darin, daß in dem Fall, wo P nicht Funktion von λ allein ist, die Grenzbedingungen (17) nur erfüllbar sind, wenn $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ist. — Eine Flächenschar $\lambda = f_{(\varrho,z)}$, für die $P = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2$ als Funktion von λ allein darstellbar ist, ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, daß je zwei ihrer Flächen auf den rechtwinkligen Trajektorien der Schar gleiche Stücke abschneiden.

Es mögen hier einige leicht auffindbare Spezialfälle der vorstehenden allgemeinen Entwicklung angeführt werden, und zwar zunächst die drei eingangs erwähnten Fälle, dann drei weitere. Die Grenzflächen und die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit seien:

1. *Konachsiale Zylinder:* $\lambda = \varrho$. Gleichungen (12) ergeben hier $P = 1$, $Q = \frac{3}{\lambda}$. Für die Winkelgeschwindigkeit folgt nach (13):

$$\varphi = A + \frac{B}{\lambda^2} = A + \frac{B}{\varrho^2},$$

wo A und B Konstanten sind. Führt man die Integrale in (20) und (21) aus, nennt R_1 und R_2 die Radien des inneren bezw. äußeren Grenzzylinders und H die Flüssigkeitshöhe, so erhält man:

$$(22) \qquad \begin{cases} M_1 = \dfrac{4\pi\eta\psi H}{2\left(\dfrac{\gamma_1}{R_1^3} + \dfrac{\gamma_2}{R_2^3}\right) + \left(\dfrac{1}{R_1^2} - \dfrac{1}{R_2^2}\right)}, & M_1' = \dfrac{4\pi\eta\psi H}{\dfrac{1}{R_1^2} - \dfrac{1}{R_2^2}}, \end{cases}$$

$$(22') \qquad M_2 = -M_1, \qquad M_2' = -M_1'.$$

(22a) Für $R_2 = \infty$ wird $M_2 = -\dfrac{4\pi\eta\psi H}{2\dfrac{\gamma_1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_1^2}}$, $M_2' = -4\pi\eta\psi H R_1^2$.

Damit also ein Zylinder vom Radius R_1 in einer unendlich ausgedehnten, in der Unendlichkeit ruhenden Flüssigkeit stationär um seine Achse rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ψ, muß auf ihn dauernd für jede Einheit seiner Länge ein Drehmoment $+\dfrac{4\pi\eta\psi}{2\dfrac{\gamma_1}{R_1^3} + \dfrac{1}{R_1^2}}$ oder $+4\pi\eta\psi R_1^2$ ausgeübt werden, je nachdem die Flüssigkeit an dem Zylinder gleitet oder haftet.

Digitized by Google

2. *Konzentrische Kugeln:* $\lambda = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$. Es wird hier nach (12): $P = 1$, $Q = \frac{4}{\lambda}$ und die Winkelgeschwindigkeit nach (13):

$$\varphi = A + \frac{B}{\lambda^3}, \text{ wo } A \text{ und } B \text{ wieder Konstanten sind.}$$

Ist R_1 der Radius der inneren, R_2 der Radius der äußeren Grenzkugel, so erhält man die Drehmomente:

$$(23) \qquad M_1 = \frac{8\pi\eta\psi}{3\left(\frac{\gamma_1}{R_1^4} + \frac{\gamma_2}{R_2^4}\right) + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)}, \qquad M_1' = \frac{8\pi\eta\psi}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}},$$

$$(23') \qquad M_2 = -M_1, \qquad M_2' = -M_1'.$$

(23a) Für $R_2 = \infty$ wird $M_2 = -\frac{8\pi\eta\psi}{3\frac{\gamma_1}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^3}}$, $M_2' = -8\pi\eta\psi R_1^3$.

Damit also eine Kugel vom Radius R_1 in einer unendlich ausgedehnten, in der Unendlichkeit ruhenden Flüssigkeit stationär um einen Durchmesser rotiert, muß auf sie ein Drehmoment $+\frac{8\pi\eta\psi}{3\frac{\gamma_1}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^3}}$ oder $+8\pi\eta\psi R_1^3$ wirken, je nachdem die Flüssigkeit an der Kugel gleitet oder haftet.

3. *Konfokale Ellipsoide:* Schreibt man die für diesen Fall spezialisierte Gleichung (4) in der Form $\frac{\varrho^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1$, wo a eine Konstante ist, so wird nach (12):

$$P = 4\lambda^2 \frac{a^2+\lambda}{a^2z^2+\lambda^2}, \quad Q = 2\lambda \frac{a^2+5\lambda}{a^2z^2+\lambda^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit wird nach (13):

$$\varphi = A\int \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{\lambda}}.$$

Hier ist wohl $\frac{Q}{P}$, aber nicht P Funktion von λ allein. Daher sind die Formeln (20) und (21) unbrauchbar; dagegen spezialisieren sich (20') und (21') zu:

$$(24) \qquad M_1' = \frac{\frac{16}{3}\pi\eta\psi}{\pm\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{\lambda}}} = \frac{\frac{16}{3}\pi\eta\psi}{\pm\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{a^2(a^2+\lambda)} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}}$$ [1])

$$(24') \qquad M_2' = -M_1'.$$

1) Das Integral $\int \varrho^3\sqrt{P_{\lambda_1}}\,ds$ wird in diesem Fall: $2\lambda_1\sqrt{a^2+\lambda_1}\int \frac{\varrho^3 ds}{\sqrt{a^2z^2+\lambda_1^2}}$. Zur Auswertung setzt man zweckmäßig $\varrho = \sqrt{a^2+\lambda_1}\cos v$, $z = \sqrt{\lambda_1}\sin v$, also $ds = dv\sqrt{\left(\frac{d\varrho}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}$.

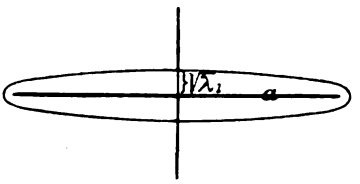
Digitized by Google

Es möge das rotierende Grenzellipsoid $\lambda = \lambda_2$ in eine unendlich dünne Scheibe vom Radius a ausarten oder, was dasselbe ist, $\lambda_2 = 0$ werden (vgl. Fig.). Man erhält dann:

$$M_1' = \frac{\frac{16}{3}\pi\eta\psi}{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{a^2(a^2+\lambda_1)} + \frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\lambda_1}}{a}}. \tag{24a}$$

Setzt man $\sqrt{\lambda_1}$ sehr klein gegen a voraus, so wird hieraus in erster Annäherung:

$$M_1' = \frac{8}{3}\pi\eta\psi\cdot\frac{a^4}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad M_2' = -M_1'. \tag{24b}$$



Gl. (24′) möge noch dahin spezialisiert werden, daß die Flüssigkeit als unendlich ausgedehnt und in der Unendlichkeit ruhend gedacht wird. Man hat dann $\lambda_1 = \infty$ zu setzen und erhält:

$$M_2' = \frac{\frac{16}{3}\pi\eta\psi}{\frac{\sqrt{\lambda_2}}{a^2(a^2+\lambda_2)} + \frac{1}{a^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\lambda_2}}{a} - \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{24c}$$

Dieses Drehmoment erfährt also das stationär um seine Achse rotierende Ellipsoid $\frac{\varrho^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{z^2}{\lambda_2} = 1$ in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit.

Wird in (24c) noch $\lambda_2 = 0$, so geht das rotierende Ellipsoid in eine rotierende unendlich dünne Scheibe vom Radius a über, und das Moment der Flüssigkeit auf diese Scheibe wird

$$M_2' = -\frac{32}{3}\eta\psi a^3. \tag{24d}$$

Auch in diesem Fall sind die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit in der Flüssigkeit konfokale Rotationsellipsoide, die einander und die Scheibe umschließen.

4. *Rotierende ähnliche Kegelschnitte:* Versucht man den Ansatz $\lambda = \frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, wo a und b Konstanten sind, so wird $P = 4\left(\frac{\varrho^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}\right)$, $Q = \frac{8}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. P wird nur dann als Funktion von λ darstellbar, wenn $a = b$, d. i. der Fall der konzentrischen Kugeln. $\frac{Q}{P}$ kann als Funktion von λ aufgefaßt werden, wenn $Q = 0$ oder $\frac{a^2}{b^2} = -4$ ist. Also den Rotationshyperboloiden $\lambda = \frac{\varrho^2}{4} - \frac{z^2}{1}$ läßt sich die oben durchgeführte Berechnungsweise anpassen, und man erhält nach (13), (20′), (21′):

$$\varphi = A\lambda + B,$$

Digitized by Google

wo A und B wieder Konstanten sind,

$$(25) \qquad M_1' = \frac{2\pi\eta\psi\int\varrho^3\sqrt{P_{\lambda_1}}\,ds}{\pm(\lambda_2-\lambda_1)}, \quad M_2' = -\frac{2\pi\eta\psi\int\varrho^3\sqrt{P_{\lambda_2}}\,ds}{\pm(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

5. *Kegel mit gemeinsamer Spitze und Achse:* $\lambda = \frac{z}{\varrho}$. Es wird hier

$$P = \frac{1}{\varrho^2}(\lambda^2+1), \quad Q = -\frac{1}{\varrho^2}\lambda,$$

und folglich nach (13):

$$\varphi = A\int\sqrt{1+\lambda^2}\,d\lambda + B,$$

wo A und B wieder Konstanten sind. (20) und (21) sind ungültig; dagegen liefern (20′) und (21′)

$$(26) \qquad M_1' = \frac{\frac{2}{3}\pi\eta\psi S_1^3}{\pm\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{1+\lambda^2}\,d\lambda}, \quad M_2' = -\frac{\frac{2}{3}\pi\eta\psi S_2^3}{\pm\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{1+\lambda^2}\,d\lambda},$$

wo S_1 und S_2 die benetzten Seitenlinien des festen bzw. rotierenden Kegels sind.

6. *Parallele Ebenen* $\lambda = z$: Eine horizontale Scheibe ($z = \lambda_2 = 0$) vom Radius R rotiert stationär um ihre (vertikale) Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ψ. Senkrecht über ihr und parallel zu ihr im Abstand d ist eine gleichgroße Scheibe ($z = \lambda_1 = d$) fest aufgehängt. Der Zwischenraum ist mit Flüssigkeit ausgefüllt. Die Spezialisierung der allgemeinen Entwicklung ergibt: $P = 1$, $Q = 0$

$$\varphi = Az + B,$$

wo die Konstanten A und B infolge der Grenzbedingungen (14) werden:

$$A = -\frac{\psi}{\gamma_1+\gamma_2+d}, \quad B = \frac{\gamma_1+d}{\gamma_1+\gamma_2+d}\psi.$$

Das Drehmoment, das die feste Scheibe infolge der Reibung erfährt, wird nach (20) bzw. (20′):

$$(27) \qquad M_1 = \frac{2\pi\eta\psi\int_0^R\varrho^3 d\varrho}{\gamma_1+\gamma_2+d} = \frac{\frac{1}{2}\pi\eta\psi R^4}{\gamma_1+\gamma_2+d}, \quad M_1' = \frac{\frac{1}{2}\pi\eta\psi R^4}{d}.$$

Das Drehmoment der Flüssigkeit auf die rotierende Scheibe im Sinne der Drehung wird nach (21) bzw. (21′):

$$(27\,a) \qquad M_2 = -\frac{\frac{1}{2}\pi\eta\psi R^4}{\gamma_1+\gamma_2+d}, \quad M_2' = -\frac{\frac{1}{2}\pi\eta\psi R^4}{d}.$$

Befindet sich auf *jeder* Seite der rotierenden Scheibe eine feste Scheibe im Abstand d von ihr, so nähert man sich dem Fall (24b), wenn d klein gegen R ist. Während aber hier die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit parallele Ebenen sind und so vorgegangen wird, als ob nur der zylindrische Raum zwischen den Scheiben von Flüssigkeit er-

Digitized by Google

füllt wäre, so sind in jenem Fall die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit Ellipsoide, die zwar sehr flach sind, aber die rotierende Scheibe völlig umschließen. Die Formeln (27) und (27a) für M_1' und M_2', die sich nur auf eine Seite der rotierenden Scheibe beziehen, stimmen bis auf den Zahlenfaktor mit den Formeln (24b) überein.

Mainz, den 3. Februar 1911.

Tafeln der Besselschen Funktionen $J_{\pm\frac{1}{3}}$ und $J_{\pm\frac{2}{3}}$.

Von A. Dinnik in Nowotscherkask (Süd-Rußland).

Viele Aufgaben der mathematischen Physik und Mechanik führen zu den bekannten Besselschen oder Zylinderfunktionen, welche der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

genügen. Umfangreiche Tafeln dieser Funktionen findet man in den „Funktionentafeln" von E. Jahnke und F. Emde (Berlin 1909, B. G. Teubner).

Bei der Untersuchung einiger Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie gelangte ich zu den Besselschen Funktionen von der Ordnung $n = \pm\frac{1}{3}$ und $n = \pm\frac{2}{3}$:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Pi(\frac{1}{3})}\left\{1 - \frac{3}{1\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 7}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + (-1)^m \frac{3^m}{m!\,4\cdot 7\cdots(3m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(\frac{1}{3})} F_{\frac{1}{3}}(x) = J_{\frac{1}{3}}(x), \qquad \text{wo} \quad \Pi(\tfrac{1}{3}) = 0{,}89298.$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\Pi(-\frac{1}{3})}\left\{1 - \frac{3}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 5}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + (-1)^m \frac{3^m}{m!\,2\cdot 5\cdot 8\cdots(3m-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(-\frac{1}{3})} F_{-\frac{1}{3}}(x) = J_{-\frac{1}{3}}(x), \text{ wo } \Pi(-\tfrac{1}{3}) = 1{,}35412.$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\Pi(\frac{2}{3})}\left\{1 - \frac{3}{1\cdot 5}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + (-1)^m \frac{3^m}{m!\,5\cdot 8\cdots(3m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} - \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(\frac{2}{3})} F_{\frac{2}{3}}(x) = J_{\frac{2}{3}}(x), \qquad \text{wo} \quad \Pi(\tfrac{2}{3}) = 0{,}90275.$$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\Pi(-\frac{2}{3})}\left\{1 - \frac{3}{1\cdot 1}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3^2}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + (-1)^m \frac{3^m}{m!\,1\cdot 4\cdot 7\cdots(3m-2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} - \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{\Pi(-\frac{2}{3})} F_{-\frac{2}{3}}(x) = J_{-\frac{2}{3}}(x), \text{ wo } \Pi(-\tfrac{2}{3}) = 2{,}67893.$$

Digitized by Google

Da für diese Ordnungen bis jetzt leider keine Tafeln vorhanden waren, unternahm ich die Berechnung der beigefügten Tafeln bis zu $x = 8$. Bei größeren Argumenten empfiehlt es sich, die bekannten asymptotischen Formeln zu benutzen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meiner Frau J. Dinnik für die rechnerische Hilfe meinen Dank auszusprechen.

x	$F_{\frac{1}{3}}$	$F_{-\frac{1}{3}}$	$F_{\frac{2}{3}}$	$F_{-\frac{2}{3}}$	x	$F_{\frac{1}{3}}$	$F_{-\frac{1}{3}}$	$F_{\frac{2}{3}}$	$F_{-\frac{2}{3}}$
0	0,0000	∞	0,0000	∞	4,2	−0,3348	−0,3739	−0,2574	−0,2363
0,2	0,4607	2,1222	0,2142	4,5029	4,4	−0,3384	−0,2859	−0,2930	−0,0296
0,4	0,5674	1,6086	0,3339	2,5783	4,6	−0,3289	−0,1907	−0,3157	+0,1691
0,6	0,6251	1,2975	0,4243	1,6490	4,8	−0,3062	−0,0910	−0,3252	0,3560
0,8	0,6514	1,0468	0,4923	1,0097	5,0	−0,2736	+0,0059	−0,3224	0,5156
1,0	0,6527	0,8218	0,5398	0,5046	5,2	−0,2312	0,0999	−0,3070	0,6522
1,2	0,6327	0,6115	0,5678	+0,0822	5,4	−0,1813	0,1867	−0,2803	0,7593
1,4	0,5942	0,4129	0,5770	−0,2767	5,6	−0,1263	0,2626	−0,2440	0,8317
1,6	0,5401	0,2264	0,5683	−0,5795	5,8	−0,0683	0,3258	−0,1994	0,8703
1,8	0,4729	+0,0538	0,5394	−0,8285	6,0	−0,0095	0,3741	−0,1486	0,8739
2,0	0,3955	−0,1026	0,5028	−1,0242	6,2	+0,0477	0,4063	−0,0937	0,8435
2,2	0,3110	−0,2402	0,4494	−1,1666	6,4	0,1012	0,4216	−0,0369	0,7813
2,4	0,2222	−0,3569	0,3851	−1,2561	6,6	0,1491	0,4198	+0,0195	0,6908
2,6	0,1321	−0,4509	0,3123	−1,2942	6,8	0,1898	0,4017	−0,0735	0,5761
2,8	+0,0438	−0,5209	0,2337	−1,2829	7,0	0,2218	0,3683	−0,1231	0,4423
3,0	−0,0402	−0,5663	0,1520	−1,2259	7,2	0,2442	0,3215	−0,1665	0,2951
3,2	−0,1171	−0,5871	+0,0701	−1,1275	7,4	0,2565	0,2633	−0,2023	+0,1404
3,4	−0,1849	−0,5842	−0,0095	−0,9933	7,6	0,2583	0,1963	−0,2292	−0,0156
3,6	−0,2418	−0,5591	−0,0841	−0,8300	7,8	0,2500	0,1234	−0,2464	−0,1669
3,8	−0,2862	−0,5138	−0,1516	−0,6442	8,0	0,2320	0,0474	−0,2535	−0,3079
4,0	−0,3174	−0,4511	−0,2099	−0,4438					

Es sind die kleinsten Wurzeln

von $J_{\frac{1}{3}}(x)$

$$\alpha_1 = 2{,}90, \qquad \alpha_2 = 6{,}03,$$

von $J_{-\frac{1}{3}}(x)$

$$\alpha_1 = 1{,}88^{1}), \qquad \alpha_2 = 4{,}99, \qquad \alpha_3 = 8{,}12,$$

von $J_{\frac{2}{3}}(x)$

$$\alpha_1 = 3{,}38, \qquad \alpha_2 = 6{,}53,$$

von $J_{-\frac{2}{3}}(x)$

$$\alpha_1 = 1{,}25, \qquad \alpha_2 = 4{,}43 \qquad \alpha_3 = 7{,}58.$$

Nowotscherkask, 14. Juli 1911.

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 106.

Digitized by Google

Rezensionen.

B. G. Teubner 1811—1911.

Geschichte der Firma, in deren Auftrag herausgegeben von Friedrich Schulze. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Mit berechtigtem Stolz konnte die Firma am 22. Februar dieses Jahres auf ein Jahrhundert ihres Bestehens zurückblicken. Der Begründer Benediktus Gotthelf Teubner bietet ein lebendiges Beispiel des seine Ziele unentwegt und unbeirrt verfolgenden Idealismus, der ihn in schweren Tagen den Mut finden läßt, sich auf eigene Füße zu stellen. Sein Wirken ist für die Nachfolger vorbildlich gewesen.

Es war ein Akt schöner Pietät, den die heutigen Inhaber gegen ihren Großvater und Urgroßvater übten, zur Feier des Jubiläums eine Darstellung der Anfänge und der Entwicklung der Firma, vor allem des mehr und mehr anwachsenden Verlags, schreiben zu lassen. Diese Geschichte der Leipziger Firma bietet zugleich ein Stück Kulturgeschichte, sie liefert wertvolle Beiträge zur Geschichte der mathematischen Zeitschriften Deutschlands im besonderen und der mathematischen Literatur aus den Jahren 1811—1911 im allgemeinen.

Wer sie anfängt zu lesen, wird mehr und mehr gefangen genommen von dem Zauber, den die Persönlichkeit Teubners ausstrahlt. Hochinteressant sind die Dokumente, die einen Einblick gewähren in die strenge Innungszucht aus dem Anfange des 19. Jahrhunderts, in das Zeitungswesen der vormärzlichen Zeit, in die allmähliche Überleitung des handwerksmäßigen Betriebes einer Druckerei zum maschinenmäßigen Groß- und Schnellbetrieb.

Die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik brachte ihre Glückwünsche in Form einer Adresse dar, die folgenden Wortlaut hat:

„Die Firma B. G. Teubner hat sich um die Förderung der mathematischen Wissenschaften unvergängliche Verdienste erworben, deren die Geschichte dankbar eingedenk bleiben wird.

Insbesondere hat sie es verstanden, die Wünsche nach mathematischen Zeitschriften der verschiedensten Richtungen zu befriedigen.

Das Archiv der Mathematik und Physik, das in Gefahr war, sein Erscheinen einstellen zu müssen, dankt dem tatkräftigen Eingreifen der weitblickenden Firma die Möglichkeit, seine Existenzberechtigung vor aller Welt zu beweisen. Seit seiner Neuorganisation im Jahre 1901 durfte es sich unter Teubners Flagge zu neuem Ansehen entfalten; und demnächst wird es unter ihrem Schutze auf eine zehnjährige Blütezeit zurückblicken können.

Die Archivredaktion hält es daher für ihre Ehrenpflicht, an dem heutigen Jubeltage Zeugnis abzulegen von der vornehmen und opferwilligen Gesinnung, von dem verständnisvollen Entgegenkommen, wodurch Herr Hofrat Dr. Ackermann als Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung des Verlags ein leuchtendes Vorbild gegeben hat, sowie von der wirksamen Unterstützung, die die Wünsche und Bestrebungen der Redaktion bei Ihren Mitarbeitern, hochverehrter Herr Hofrat, jederzeit gefunden haben.

Unsere aufrichtigen Glückwünsche begleiten den Verlag auf dem Weg ins neue Jahrhundert, auf dem Wege zu neuem Ruhm und neuer Ehr'!

Die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik."

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

Verlagskatalog von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig 1786-1911. Braunschweig 1911, Fr. Vieweg u. Sohn.

Der vorliegende Band will ein vollständigstmögliches Verzeichnis der Werke geben, die in der Zeit vom 1. April 1786 bis Ende Februar 1911 als zum Viewegschen Verlag gehörig nachgewiesen werden können. Seine Herausgabe erfolgte zur Feier des 125jährigen Bestehens der Firma. Am 1. April 1786 hat Friedrich Vieweg im Sassischen Hause in der Brüderstraße zu Berlin seine Buchhandlung eröffnet. Der interessante Werdegang dieses hervorragenden Mannes und der von ihm gegründeten und zu hoher Blüte geführten Firma wird in einem Geleitwort geschildert, dem eine ganze Reihe von Bildnissen beigegeben sind.

Berlin. E. Jahnke.

Madame **P. Curie. Traité de Radioactivité.** In 2 Bänden. Paris 1911, Gauthier-Villars. Frcs. 30,—.

Das sich immer weiter ausdehnende Gebiet der Radioaktivität hat in den letzten Jahren eine große Anzahl von Bearbeitungen gefunden, die in mehr oder weniger populärer Form die Resultate der Forschung wiedergeben. Keine dieser Bearbeitungen hat an Ausführlichkeit oder Klarheit an das klassische Werk von Rutherford, das Anfang 1907 in deutscher Übersetzung herausgekommen ist, heranzureichen vermocht. Seitdem sind mehr als 4 Jahre vergangen, und das Gebäude der Radioaktivität ist inzwischen beträchtlich stattlicher geworden. Der Mangel an einem modernen ausführlichen Lehrbuch der Radioaktivität war dadurch schon seit einiger Zeit recht fühlbar geworden.

Es ist daher mit großer Freude zu begrüßen, daß durch das vorliegende Werk der Frau Curie von berufenster Seite ein Handbuch geschaffen wurde, das den derzeitigen Erkenntnissen in vollem Maße Rechnung trägt. Die ganze Anlage und Durchführung des Buches läßt deutlich erkennen, wie sehr die Verfasserin über dem behandelten Stoff steht, die ja durch die Entdeckung des Radiums die Grundlage für die Erschließung des ganzen Gebietes gegeben hat und noch bis heute in hervorragender Weise an der Fortentwicklung beteiligt ist.

Das Werk umfaßt zwei Bände von je etwa 500 Seiten.

Der Behandlung der radioaktiven Vorgänge im engeren Sinn ist eine Darlegung der Ionisationserscheinungen in Gasen vorangestellt.

Die Kathoden-, Kanal- und Röntgenstrahlen werden als unerläßliche Grundlage für das Verständnis der später behandelten Tatsachen in ihren wichtigsten Erscheinungskomplexen besprochen.

Daran schließt sich eine ausführliche Darlegung der gebräuchlichsten Meßmethoden.

Das Gebiet der eigentlichen Radioaktivität wird durch eine Beschreibung der Entdeckung und Darstellung der radioaktiven Substanzen eingeleitet. Eine Ergänzung findet dieser Abschnitt im zweiten Band, wo die während der Fertigstellung des Werkes neu dargestellten Substanzen genauer beschrieben werden.

Nach einer eingehenden Behandlung der Emanation und des aktiven Niederschlags der bekannten drei radioaktiven Zerfallsreihen wird die Theorie

Digitized by Google

der radioaktiven Umwandlungen, wie sie zuerst von Rutherford und Soddy entwickelt wurde, dargelegt; die Verfasserin hat auch für den allgemeinsten Fall, daß eine beliebige Zahl aufeinander folgender Umwandlungen stattfindet, die mathematischen Ausdrücke abgeleitet.

Der zweite Band bringt eine sehr eingehende Besprechung der einzelnen Strahlengattungen und ihrer Wirkungen mit allem einschlägigen Zahlenmaterial. Die gewonnenen Resultate werden dann für die einzelnen radioaktiven Familien spezialisiert. Den Schluß des Werkes bilden die Kapitel über die Radioaktivität des Erdbodens und der Atmosphäre.

Gegenüber allen bisherigen Büchern über Radioaktivität ist das vorliegende dadurch ausgezeichnet, daß die einschlägigen chemischen Fragen und Methoden in ausführlicher Weise Berücksichtigung gefunden haben, ohne daß dabei der physikalische Teil verkürzt worden wäre. Für den Chemiker besonders reizvoll lesen sich die Abschnitte über die Entdeckung der radioaktiven Elemente und ihre allmählich erreichte Reindarstellung.

Von großem Interesse ist auch das Kapitel über die Emanationen, in dem besonders die Radiumemanation, die in letzter Zeit hauptsächlich Gegenstand bedeutender Untersuchungen gewesen ist, ausführlich behandelt wird.

Das Buch enthält tatsächlich alles, was in der Radioaktivität geleistet worden ist, und wird für jeden, der an dem Gebiet unmittelbar interessiert ist, ein unentbehrliches Lehrbuch und Nachschlagewerk sein.

Der Referent möchte aber gerade in bezug auf die Bedeutung des Buches als Nachschlagewerk auf einen störenden Mangel aufmerksam machen. Es fehlt nämlich jederlei Register, so daß einem nicht ganz mit dem Gebiet Vertrauten die Orientierung oft schwer fallen wird. Desgleichen wäre eine Ergänzung der Literaturangaben durch Anführung der Seitenzahlen erwünscht.

Diese kleinen Mängel könnten bei einer Neuauflage oder bei der deutschen Übersetzung, die bereits im Gange ist, leicht beseitigt werden, wobei auch einige falsch geschriebenen Eigennamen verbessert werden könnten.

Jedenfalls sind wir Frau Curie für das Werk zu großem Dank verpflichtet.

Berlin. Otto Hahn.

Wellisch. Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. Zweiter Band: Probleme der Ausgleichungsrechnung. Mit Fig. XI u. 217 S. 8. Wien-Leipzig 1910, Karl Fromme. Geh. *M* 7,50.

Dem ersten Bande, welcher die *Elemente* der Ausgleichungsrechnung enthält, ist seit etwa Jahresfrist der zweite Band gefolgt.

Während der erste Band die Theorie der wahren und scheinbaren Beobachtungsfehler und der kleinsten Fehlerquadratsummen auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung in wissenschaftlich gründlicher und dabei anschaulicher Weise behandelt und in die Grundgesetze der Ausgleichungsrechnung hineinführt, ist der *zweite* Band ein ausgezeichnetes Handbuch der eigentlichen Ausgleichungsrechnung für den ausübenden Vermessungstechniker. Daneben aber bietet er besonders in dem *ersten* Abschnitte über die Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume auch dem Theoretiker reiche Anregung.

Der *zweite* Abschnitt behandelt zuerst in umfassender Weise die Ausgleichung sämtlicher Richtungs- und Winkelmessungen, dabei auch die unvoll-

Digitized by Google

ständigen Richtungssätze nach strenger Methode und durch Näherung beleuchtend. Sodann wird die Punkt- und Netzausgleichung bis ins einzelne erschöpfend dargestellt und durch eine Fülle schöner und praktisch gewählter Beispiele erläutert.

Der *dritte* Abschnitt befaßt sich mit der Aufstellung einiger empirischen Formeln, wie Ausgleichungskurve und Interpolationsformel, und schließt unter Anfügung eines Beispieles aus der französischen Gradmessung mit der Bestimmung der Erdgestalt nach den kritisch näher behandelten Ausgleichungsprinzipien von Walbeck und Bessel. Es findet somit der Vermessungstechniker für alle Fragen der Praxis ausgiebige Antwort in diesem zweiten Bande; das Studium des ersten Bandes sollte aber vorangehen.

Die Ausstattung des Werkes ist vorzüglich. Ein Druckfehler im zweiten Bande ist nicht berichtigt: Seite 90, 10. Zeile von oben ist 173 statt 137 zu setzen.

Halensee. FUHRMANN.

H. Poincaré. Leçons de Mécanique céleste. Tome I: Théorie générale des perturbations planétaires. Volume de VI et 367 p. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Der Verfasser erklärt im Vorwort, daß das vorliegende Buch weder vom Studium der „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste" noch von der Lektüre des Tisserandschen „Traité de mécanique céleste" befreien wird. In den Leçons verfolgt Poincaré das Ziel, auf kürzestem Wege zu der Form der Reihen zu gelangen, die in der Astronomie im Gebrauch sind. Die Konvergenzfrage der formal hergestellten Reihen bleibt unberücksichtigt. In den „Méthodes" hat sie eine eingehende und umfassende Behandlung gefunden. Die Bände des Tisserandschen „Traité" aber geben Aufschluß über den weiten Weg, den die Mechanik des Himmels historisch gegangen ist.

Die Darstellung der Unbekannten wird mit der Methode der Variation der Konstanten durchgeführt. Sie werden so nach Potenzen der Zeit, eines kleinen Parameters μ und nach den sin und cos gewisser Winkelargumente entwickelt, wobei von den Integrationskonstanten als Anfangswerten ausgegangen wird.

Poincarés Streben geht nun dahin, die Approximationen soweit als möglich zu treiben, und die Resultate, die bereits aus den ersten Approximationen für das materielle System bekannt waren, in dieser Richtung zu verallgemeinern. Natürlich sind die erhaltenen Formeln in der gegebenen Form für die numerische Rechnung nicht brauchbar. Ihre Bedeutung liegt auf analytischem Boden. Zum ersten Male ist hier mit aller Strenge ein klarer Einblick in die Komposition der Lagrangeschen Approximationen beliebiger Ordnung gegeben. Vor diesem Ziele mußte die Präparation der Formeln zur numerischen Berechnung in den Hintergrund treten. Es ist notwendig, dies zu betonen, weil von anderer Seite hervorgehoben wurde, daß Poincaré seine Formeln mit numerischen Beispielen sozusagen nicht illustriert habe.

Die mathematischen Hilfsmittel, deren Poincaré sich bedient, sind stets von größter Einfachheit. Das Buch kann der mathematisch vorgebildete Anfänger am besten sofort in die Hand nehmen. Für den Vorgeschrittenen aber ist es ein Exempel mathematischer Ästhetik.

Digitized by Google

Das I. Kapitel ist unter dem Gesichtspunkte geschrieben, eine Bedingungsgleichung für den Fall zu erhalten, daß bei einem Übergang zu neuen Variablen die Differentialgleichungen kanonisch verbleiben. Hat man auf irgend eine Weise ein Lösungssystem x_i, y_i der vorgelegten Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

erhalten, und werden die x_i, y_i als Funktionen der Zeit und der $2n$ Integrationskonstanten α_i dargestellt, so ist das Gleichungssystem

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\sum x \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{d\alpha_k}\sum x \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, \cdots 2n)$$

mit dem System (1) völlig äquivalent.

An dieser Gleichung zeigt Poincaré, daß der Übergang zu neuen Variablen x_i', y_i' stets kanonisch bleibt, wenn

$$(3) \qquad \sum x' \cdot dy' - \sum x \cdot dy = dS$$

ein vollständiges Differential ist, daß die Integration des Systems (1) mit der Integration der Jacobischen partiellen Differentialgleichung identisch ist, und daß die Lagrangeschen Klammern $[a_h, a_k]$ von der Zeit unabhängig sind.

Das II. Kapitel gibt eine erste Auseinandersetzung des Problems der drei Körper. Koordinaten und Massen der drei Körper haben in numerischer Folge die Bezeichnung A: x_1, x_2, x_3; $m_1 = m_2 = m_3$; B: $x_4, \cdots$; $m_4 = \cdots$; C: $x_7 \cdots$; $m_7 = \cdots$. Die Bewegung ist durch (1) definiert, wo $F = T + U$ ist. U ist als reine Entfernungsfunktion von Zeit und Achsensystem unabhängig. Hieraus folgen durch Lagenänderung des materiellen Systems die Schwerpunkts- und Flächenintegrale. Den drei reellen Körpern A, B, C werden drei fiktive A', B', C' zugeordnet, an die der Bewegungsvorgang durch geeignete Koordinatentransformationen angeschlossen wird. Zwischen den Koordinaten sollen lineare Relationen bestehen, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind. Für diese Koordinaten behalten die Flächensätze ihre Gültigkeit, der Schwerpunkt ist eliminierbar. Weiter zeigt die Existenz der Gleichung (2), daß die Differentialgleichungen in den neuen Koordinaten kanonisch bleiben. Ein spezielles System von dieser Beschaffenheit sind die kanonischen relativen Koordinaten. Diese Koordinaten haben aber den Nachteil, daß die Geschwindigkeitskomponenten y_i' den $\frac{dx_i'}{dt}$ nicht proportional sind, sondern um Größen von der Ordnung der störenden Massen von ihnen differieren. Diesen Nachteil besitzt das Jacobische Koordinatensystem nicht, für das $y_i' = m_i' \cdot \frac{dx_i'}{dt}$ direkt zur Forderung erhoben ist.

Bei dieser Transformation, für die der jeweilige Schwerpunkt Koordinatenanfang ist, erhalten die fiktiven Massen die Werte:

$$m_1' = \frac{m_1 \cdot m_7}{m_1 + m_7}, \quad m_4' = \frac{m_4 \cdot (m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7}, \quad m_7' = m_1 + m_4 + m_7.$$

Der Wert von F bleibt unverändert. Nur sind in T die reellen Massen durch die fiktiven zu ersetzen. In U behalten alle Größen ihren ursprünglichen

Digitized by Google

Wert. Die Funktion U wird für die weitere Betrachtung in folgende Teile zerlegt: $U = (U_1 + U_2) + U_3$, wo

$$U_1 + U_2 = -\frac{m_1 \cdot m_7}{AC} - m_4 \cdot \frac{(m_1 + m_7)}{BD};$$

$$U_3 = m_1 \cdot m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 \cdot m_7 \cdot \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

In unserem Sonnensystem sind die Massen der Planeten im Verhältnis zur Sonnenmasse als kleine Größen I. Ordnung zu betrachten. Der Punkt D wird also dem Punkte C sehr nahe liegen, so daß CD und $BC - BD$ kleine Größen I. Ordnung sind. Hieraus folgt, daß $U_1 + U_2$ von der I. und U_3 von der II. Ordnung ist. Wird $F = F_0 + \mu F_1$ gesetzt, so gibt $F_0 = T + U_1 + U_2$ die intermediäre Bahn und ist von der I. Ordnung.

$$\mu F_1 = m_1 \cdot m_4 \cdot \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{A'B'}\right) + m_1 \cdot m_7 \cdot \left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 \cdot m_7 \cdot \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

ist die Störungsfunktion des Problems und von der II. Ordnung. Das erste Glied heißt ihr Hauptteil, weil mit dessen Entwickelung — und zwar ganz speziell mit der der fiktiven reziproken Distanz — die Entwicklungskoeffizienten der vollständigen Störungsfunktion bekannt sind. Nach dieser eingehenden Behandlung der Jacobischen Transformation gibt Poincaré am Schluß noch die Ausdrücke für die Kräfte, die der kanonisch relativen entsprechen. Außerdem streift er kurz die relative Bewegung der beiden Massen in bezug auf den Zentralkörper.

Von dieser Methode, die gewöhnlich in der Störungsrechnung angewandt wird, macht er nirgends Gebrauch. Einmal verlieren die Differentialgleichungen bei dieser Transformation ihren kanonischen Charakter, und dann behalten auch die Flächenintegrale nicht ihre einfache Gestalt.

Das III. Kapitel behandelt das Zweikörperproblem. Die Differentialgleichungen sind in relativ kanonischen Koordinaten angesetzt. Ihre Integration wird mittels der Jacobischen Methode durchgeführt. Ausgedrückt durch die elliptischen Elemente der Bahn und der Bahnlage haben die kanonischen Integrationskonstanten die Werte:

I. $L = m \cdot \sqrt{M} \cdot \sqrt{a}$	II. L	III. L
$g = L \cdot \sqrt{1 - e^2}$	$\varrho_1 = L - G$	$\xi_1 = \sqrt{2\varrho_1} \cdot \cos \omega_1$
$\Theta = G \cdot \cos i$	$\varrho_2 = G - \Theta$	$\xi_2 = \sqrt{2\varrho_2} \cdot \cos \omega_2$
l mittlere Anomalie	$\lambda = \lambda + g + \theta$	λ
g Perihelabstand	$\omega_1 = -g - \theta$	$\eta_1 = \sqrt{2\varrho_1} \cdot \sin \omega_1$
θ Knotenlänge	$\omega_2 = -\theta$	$\eta_2 = \sqrt{2\varrho_2} \cdot \sin \omega_2$.

II und III nehmen auf die Größenverhältnisse Rücksicht, die für Exzentrizität und Neigung im materiellen System bestehen. II ist in bezug auf e und i von der II. Ordnung, III von der I. l ist die einzige Größe, die proportional mit der Zeit wächst. Die Reihen, durch die sich die rechtwinkligen Koordinaten des Körpers darstellen lassen, haben die Form:

$$x_i = \sum A \cdot \cos(p_0 \lambda + h) \cdot M = \sum B \cdot \varrho_1^{q_1} \cdot \varrho_2^{q_2} \cdot \cos(p_0 \lambda + p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2 + h),$$

p_0 bedeutet eine ganze Zahl. A und h sind Konstante, die nur von L abhängen. M ist ein ganzes Monom in bezug auf ξ und η. Die p sind positive

Digitized by Google

oder negative ganze Zahlen. $2q_i$ ist positiv oder Null und von derselben Parität wie p_i und zwar ist $2q_i > |p_i|$. Symmetrie und Homogenitätsbetrachtungen ergeben schließlich für die Koordinaten die endgültige Form.

Das IV. Kapitel setzt nun die Lagrangesche Methode auseinander, mit der die Differentialgleichungen approximativ integriert werden. Die Betrachtung ist an den Jacobischen Koordinaten durchgeführt. Wo Poincaré andere Systeme wählt, dort werden die zugehörigen entsprechenden Verhältnisse nur skizziert. Zunächst wird der für die Integration wesentliche Begriff der oskulierenden Ellipse definiert. Als Variable werden die Elemente der oskulierenden Ellipsen der beiden fiktiven Körper A', B' gewählt. Jedes der Elementensysteme II und III des III. Kapitels genügt dem Kanonizitätskriterium, so daß die Differentialgleichungen für jedes derselben kanonisch sind. Die Funktion F hat die Gestalt $F = F_0 + \mu F_1$, wo F_0 nur von den L, also den großen Halbachsen abhängt. Für μF_1 ergeben sich die beiden Entwicklungen

$$\mu F_1 = \sum A \cdot \cos(k_1 \cdot \lambda_1 + k_2 \cdot \lambda_2 + h) \cdot M$$
$$= \sum A \cdot \varrho_1^{\eta_1} \cdot \varrho_2^{\eta_2} \cdot \varrho_3^{\eta_3} \cdot \varrho_4^{\eta_4} \cdot \cos\left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_i \omega_i + h\right).$$

M ist in bezug auf ξ und η ein ganzes Monom. A und h hängen ebenfalls nur von den L ab. Die k_i und p_i sind positive oder negative ganze Zahlen. $2q_i > |p_i|$. Die Ordnung des jeweiligen Gliedes in bezug auf Exzentrizität und Neigung wird durch $2\sum q$ gegeben. Auch hier geben Symmetrie- und Homogenitätsbetrachtungen μF_1 seine endgültige Form. Die Differentialgleichungen bekommen die Form:

$$\frac{dL}{dt} = -\mu \cdot \frac{dF_1}{d\lambda}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \mu \cdot \frac{dF_1}{d\varrho}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu \cdot \frac{dF_1}{dt},$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dF_0}{dL} + \mu \cdot \frac{dF_1}{dL}, \qquad \frac{d\varrho}{dt} = -\mu \cdot \frac{dF_1}{d\omega}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = -\mu \cdot \frac{dF_1}{d\eta}.$$

Durch die Methode der sukzessiven Approximationen ist es möglich, die Unbekannten in Reihen zu entwickeln, die nach Potenzen des Parameters μ fortschreiten. Der Fehler nach der $n$ten Approximation oder der Störung $n$ter Ordnung ist von der Ordnung μ^n.

Im V. Kapitel wird die Durchführung der Approximationen auch wirklich vorgenommen. Die zu integrierende trigonometrische Reihe für μF_1 fällt unter den Integraltyp:

$$\int A \cdot t^m \cdot \cos(\nu \cdot t + h)\, dt,$$

wo m jede beliebige ganze Zahl incl. der Null sein kann. Dieses Integral ist in eine trigonometrische Reihe entwickelbar, so daß die Approximationen bis zu jeder beliebigen Ordnung ausführbar sind. Für irgendeine der Unbekannten ergibt sich ein Ausdruck von der Form:

$$\sum \mu^\alpha \cdot A \cdot M_0 \cdot t^m \cdot \cos(\nu \cdot t + h)$$
$$= \sum \mu^\alpha \cdot A \cdot (\varrho_1^0)^{\eta_1} \cdot (\varrho_2^0)^{\eta_2} \cdot (\varrho_3^0)^{\eta_3} \cdot (\varrho_4^0)^{\eta_4} \cdot \varrho_1^{\eta_1} \cdot \varrho_2^{\eta_2} \cdot \varrho_3^{\eta_3} \cdot \varrho_4^{\eta_4} \cdot \cos\left(\lambda t + \sum p_i \omega_i^0 + h\right)$$
$$2q_i \equiv p_i \pmod 2 \quad 2q_i > |p_i|.$$

A und h hängen nur von L_i^0 und λ_i^0 ab, und M_0 ist ein ganzes Monom in bezug auf ξ_i^0 und η_i^0.

Digitized by Google

Durch die Integration wird der Faktor $\nu = k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2$ in den Nenner gebracht. k_1, k_2 sind ganze Zahlen und n_1, n_2 die Anfangswerte der mittleren Bewegungen. Für $\nu = 0$ wird somit die gesamte Betrachtung illusorisch. $k_1 = k_2 = 0$ und der Fall, daß n_1 und n_2 streng kommensurabel sind, werden ausgeschlossen. Wohl aber können n_1 und n_2 nahezu kommensurabel sein. Der Faktor ν würde dann als sogenannter kleiner Divisor einen ganz bedeutenden Einfluß auf die Koeffizienten erhalten. In der Praxis kann man sich aber auf einen einzigen kleinen Divisor beschränken.

Die Glieder der erhaltenen Reihe werden als rein- und gemischtsäkulare und rein periodische unterschieden. Außerdem werden sie nach ihren Exponenten klassifiziert. Die Ordnung eines Gliedes ist der Exponent α des Parameters μ. Der Grad ist durch das Monom M_0 gegeben, das wegen ξ_i^0, η_i^0 von der Ordnung der Exzentrizitäten und Neigung ist. Der Rang ist die Differenz der Exponenten von μ und t, also gleich $\alpha - \mu$.

Neu ist der Begriff der Klasse $\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$, wo m' den Exponenten des kleinen Divisors im Nenner bezeichnet. Bei den allgemeinen, weitschweifigen Entwicklungen, welche die Approximationsmethode notwendig mit sich führt, könnte man das Auftreten von Gliedern mit negativem Range befürchten. Hier beweist nun Poincaré die Sätze:

1. In der Entwicklung von $\xi_i, \eta_i, \delta\lambda_i, L_i$ gibt es keine Glieder mit negativem Range.
2. Es gibt keine gemischt säkularen Glieder vom Range Null.
3. In der Entwicklung von L_i existiert kein Glied vom Range Null.

Dieser letzte Satz ist eine ziemlich weitgehende Verallgemeinerung des Theorems von der Unveränderlichkeit der großen Halbachsen.

Das VI. Kapitel gibt eine Umformung der Reihenentwickelungen, die für das Folgende von fundamentaler Bedeutung ist. Werden in den Reihen für die Unbekannten die Variablen $t, n_1 \cdot t, n_2 \cdot t$ durch die Variablen τ, w_1, w_2 ersetzt, so erhalten dieselben die Form:

$$(I) \qquad L_i = \sum \mu^\alpha \cdot A \cdot \tau^m \cdot \cos(k_1 w_1 + k \cdot w_2 + h) \cdot M_0,$$

wo L_i irgend eine der Lösungen bezeichnet.

Sind dann die obigen Reihen für $\tau = t$, $w_1 = n_1 \cdot t$, $w_2 = n_2 \cdot t$ Lösungen der Differentialgleichungen, so bleiben sie Lösungen, wenn man in ihnen setzt:

$$\tau = t + c, \quad w_1 = n_1 \cdot t + \varepsilon_1, \quad w_2 = n_2 \cdot t + \varepsilon_2,$$

was auch die Werte der Konstanten c und ε sein mögen.

Weiter wird gezeigt, daß es keineswegs notwendig ist, als Integrationskonstante die Anfangswerte der Unbekannten zur Zeit $t = 0$ zu nehmen. Man wird auch bei beliebiger Definition derselben zu analogen Reihen geführt, z. B. falls die mittleren Werte der Unbekannten gewählt werden.

Das VII. Kapitel behandelt den Fall des „Problème restreint". Es ist die Bewegung eines Körpers zu untersuchen, dessen Masse verschwindend klein ist. Hauptkörper, dessen Bahn zur Kreisbahn vereinfacht wird, und störender Körper repräsentieren die wirkenden Kräfte. Der gesamte Bewegungsvorgang wird in die Ebene verlegt. Da die Koordinaten des störenden Körpers in diesem Falle bekannte Funktionen der Zeit sind, so ist die Funktion F von

Digitized by Google

der Zeit explizit abhängig. Wird ein bewegliches Koordinatensystem zugrunde gelegt, das mit dem störenden Körper verbunden ist, so wird die Funktion F von der Zeit explizit unabhängig.

Die Differentialgleichungen des Problems fallen unter den allgemeinen Typ

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dF}{dL_i} \qquad \begin{matrix}(F = F_0 + \mu F_1)\\ (i = 1, 2 \cdots n)\end{matrix}$$

F_0 soll nur von den L_i abhängen und zwar derartig, daß zwischen den $\frac{dF_0}{dL_i}$ keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten besteht. F_1 ist in den λ_i periodisch, also nach sin und cos von Vielfachen der λ_i entwickelbar. Die Entwicklungskoeffizienten hängen nur von den L ab. Mit der Lagrangeschen Approximationsmethode integriert, haben die Integralreihen die Form:

$$L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha \cdot A \cdot t^m \cdot \cos(\nu t + h) = L_i^0 + \sum \mu^\alpha \cdot A \cdot \tau^m \cdot \cos\left(\sum k_i w_i + h\right).$$

Diese Reihen haben einen bedeutend einfacheren Bau, als die früher aufgestellten. Das liegt daran, daß hier die den ξ und η analogen Variablen fehlen. Auf diese Reihen wird jetzt der Fundamentalsatz des vorigen Kapitels angewandt. Es gelingt so Poincaré, durch Einführung eines neuen kanonischen Variablensystems W_i, w_i, die säkularen Glieder aus den Lagrangeschen Reihen völlig zum Verschwinden zu bringen. W_i sind Konstante. $w_i = n_i' \cdot t + \omega_i$; $n_i' = n_i + \mu \cdot n_i^{(1)} + \mu^2 \cdot n_i^{(2)} + \cdots$.

Auf Grund der Identität der beiden partikulären Lösungen $\tau = t$, $w_i = n_i t$ und $\tau = 0$, $w_i = n_i' t$ zeigt Poincaré, wie bei der Lagrangeschen Methode mit der Kenntnis der periodischen und der rein säkularen Glieder auch die gemischt säkularen herstellbar sind. Die erhaltenen Resultate werden sodann für das Problème restreint spezialisiert.

Zum Schluß werden noch die periodischen Lösungen der I. Gattung eingeführt, die in Kapitel III der Méthodes nouvelles ausführlich behandelt sind.

In den Kapiteln VIII und IX entwickelt Poincaré die Theorie der säkularen Störungen. — Im VIII. die Störungen vom Range Null. Die Wichtigkeit dieser Störungsglieder liegt auf der Hand. Von ihnen hängt die Konfiguration des Systems für weite Zeiträume ab. Die Beschränkung der Funktion F auf die von λ_1 und λ_2 unabhängigen Glieder gibt den sog. säkularen Teil R der Störungsfunktion. Auch für diesen behalten die Differentialgleichungen der ξ und η, also die Differentialgleichungen für Exzentrizität und Neigungen, die kanonische Form.

Nach ihrer Integration werden die säkularen Störungen der mittleren Anomalien durch eine einfache Quadratur erhalten. Die Entwicklung der Funktion R enthält nur gerade Potenzen der ξ und η.

Für die Integration der Differentialgleichungen wird zunächst nur R_2 herangezogen. Es werden also bereits die 4. Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen vernachlässigt, so wie auch Lagrange das Problem gefaßt hatte. Die Differentialgleichungen lassen sich dann in zwei Gruppen spalten. Die I. Gruppe definiert die säkularen Störungen der Exzentrizitäts-, die II. die der Neigungsvariablen. Ihrem Charakter nach sind es lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Von der determinierenden Gleichung zeigt Poincaré, daß sie nur rein imaginäre Wurzeln besitzen kann. Die Form der Integrale erhält er durch einfache Betrachtungen an den Differential-

Digitized by Google

gleichungen selbst. Die Einführung einer Fläche II. Grades $S_2' = 1$ zeigt dann, daß die Lösung völlig bestimmt ist, wenn die Achsen dieser Fläche nach Größe und Richtung bekannt sind. Die Unbekannten ξ und η werden so, ohne jede Entwicklung nach Potenzen von μ, durch endliche trigonometrische Reihen in bezug auf die Zeit erhalten. Zum Schluß werden noch für die Exzentrizitäts- und Neigungsvariablen obere Grenzen hergeleitet.

IX. Kapitel. Hier wird nunmehr der gesamte Komplex der säkularen Glieder der Störungsfunktion zur Integration herangezogen. Die Funktion R wird mit der Funktion F des VII. Kapitels in völlige Analogie gebracht. Alle Sätze jenes Kapitels sind also auf das Differentialgleichungssystem mit der Funktion R übertragbar. Die Integration wird mit der Lagrangeschen Approximationsmethode durchgeführt, und die Reihen können auf Grund des Fundamentalsatzes von den säkularen Gliedern befreit werden.

Lagrange und Laplace hatten die Stabilität des Systems für R_2 dargelegt. Poincaré gibt eine Erweiterung des Resultats in dem Sinne, daß die säkularen Glieder überhaupt zum Verschwinden gebracht werden können.

Bei der Behandlung der säkularen Störungen der Neigungsvariablen ist eine Wurzel der determinierenden Gleichung Null. Diese Schwierigkeit wird durch den Übergang zu einem Achsensystem beseitigt, das mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Achse x_3 rotiert.

Zum Schluß werden die erhaltenen Resultate dahin verallgemeinert, daß die Funktion R nicht speziell eine homogene Funktion II. Grades in den ξ und η ist, sondern daß sie nach beliebigen Potenzen dieser Größen entwickelbar ist.

Poincaré kehrt im X. Kapitel zu den allgemeinen Reihen zurück, die in Kapitel VI für das Problem der drei Körper aufgestellt wurden. Er zeigt, wie auch aus diesen Entwicklungen die säkularen Glieder durch ein analoges Verfahren wie in Kapitel VII wegzuschaffen sind. Für den zu analysierenden Fall $\tau = 0$ lassen sich die $L_i, \cdots$ als Funktionen der Variablen $W_i, w_i, \xi_i^0, \eta_i^0$ darstellen. Die $W_i, \cdots \eta_i^0$ sind durch kanonische Differentialgleichungen definiert.

Die Reihen für die Unbekannten haben dann die Form:

$$\text{(II)} \qquad \sum \mu^\alpha \cdot B \cdot E_1^{q_1} \cdots E_{2n}^{q_{2n}} \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\sum k_i w_i'' + \sum p_i w_i' \right)$$

mit der Bedingung $q_i \equiv p_i \pmod 2$, $q_i \geqq |p_i|$.

Die B hängen nur von den Konstanten W_i ab. Die E_k sind Integrationskonstante.

$$w_i' = -\gamma_i' \cdot t + w_i, \quad (i = 1, 2, \cdots 2n) \qquad w_i'' = n_i' t + w_i \quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Die mittleren Bewegungen n' und γ' lassen sich nach Potenzen von μ und E entwickeln. Für $\mu = 0$ ist $\gamma' = 0$ und $n_i' = n_i$. Die γ' enthalten also μ als Faktor. Man kann sie als Bewegungskoeffizienten für Perihel und Knotenlänge bezeichnen.

Die beiden Reihensysteme (I) aus Kapitel VI und (II) für die Unbekannten werden im XI. Kapitel miteinander verglichen. Dieser Vergleich gibt einen klaren Einblick, wie die einzelnen Glieder bei der direkten Anwendung der Lagrangeschen Methode entstanden sind. Für den Rang eines Gliedes wird der Satz hergeleitet, daß derselbe wenigstens dem Exponenten α entspricht. Aus der letzten Feststellung ergibt sich sofort eine Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems.

Digitized by Google

Lagrange hatte die Unveränderlichkeit der großen Halbachsen für den Fall nachgewiesen, daß die Quadrate der Massen vernachlässigt werden.

Poisson hatte den Nachweis geführt, daß bei Vernachlässigung der Glieder in μ^3 in der Entwicklung der großen Achsen gemischt säkulare aber keine rein säkularen Glieder auftreten. Es gibt also keine Glieder der Form $\mu^2 \cdot t$.

Poincaré zeigt nun, daß in der allgemeineren Entwicklung der L_i rein säkulare Glieder vom Range eins nicht existieren. Wohl aber existieren Glieder der Form $\mu^3 \cdot t$.

Im XII. Kapitel werden die Entwicklungsreihen der Unbekannten aus Kapitel X wieder vorgenommen. Poincaré zeigt, daß für alle Glieder in L_k und λ_k zwischen den ganzen Zahlen k_j und p_j die Beziehung besteht $\sum k_j - \sum p_j = 0$, für die Terme in ξ und η aber $\sum k_j - \sum p_j = -1$.

Da weiter der heliozentrische Ort in rechtwinkligen wie in polaren Koordinaten, und die gegenseitigen Distanzen uniforme Funktionen der kanonischen Elemente sind, so sind auch diese Größen in Reihen von derselben Form entwickelbar. Es wird sodann noch die Anzahl der Argumente w festgestellt, von denen das allgemeine Problem, wie seine speziellen Fälle abhängen. Am Schluß wird eine Methode zur direkten Berechnung der Reihen auseinandergesetzt.

Das XIII. Kapitel behandelt den Fall der nahen Kommensurabilität, bei dem also durch die Integration kleine Divisoren in den Nenner eingeführt werden. Poincaré weist zunächst nach, daß für alle Reihenterme $\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} > 0$ ist. In δL_i, $\delta \xi_i$ und $\delta \eta_i$ ist aber das Minimum der Klasse wenigstens $\frac{1}{2}$. Zur Bestimmung der Störungen der Minimalklasse erhält er gleichfalls ein System kanonischer Differentialgleichungen mit der Bestimmungsfunktion $\Phi_0 + \mu(\Psi)_0$

$$\Phi_0 = C_0 + \sum n_i (L_i - L_i^0) + \tfrac{1}{2} \sum C_{ik} (L_i - L_i^0)(L_k - L_i^0).$$

Ψ bezeichnet die Gesamtheit aller Glieder der Störungsfunktion, die zur Minimalklasse einen Beitrag liefern, also die Säkularfunktion R und die Glieder vom Argument $\sum p_j \cdot \lambda_j$, die ein Multiplum des kleinen Divisors $\theta = \sum k_j \cdot \lambda_j$ sind.

Die Differentialgleichungen werden mit der Delaunayschen Methode integriert. Es wird die Hilfsvariable U durch die Gleichung definiert $L_i - k_i U = L_i^0$. Durch das Integral $\Phi_0 + \mu \Psi_0 = \text{const.}$, wo in Φ_0 die L_i zu substituieren sind, und vermittels $\frac{d\theta}{dt} = \sum k_j \cdot \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dU}$ ist t mit θ durch eine einfache Quadratur verbunden. θ, U und L_i folgen hieraus als Funktionen der Zeit, die ξ_i, η_i durch einfache Quadraturen.

Friedenau-Berlin. G. Respondek.

R. Gans. Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Zweite Auflage. Mit 35 Figuren. X u. 126 S. gr. 8. Leipzig 1909, B. G. Teubner. In Leinwand geb. ℳ 3,60.

Von dem vorliegenden Werkchen war die erste Auflage in 5 Jahren vergriffen. Das allein ist schon ein Beweis dafür, daß sein Inhalt zweckmäßig ausgewählt war und einem wirklichen Bedürfnis auf Seiten der Physiker ent-

Digitized by Google

gegenkam. Die vorliegende Auflage unterscheidet sich von der ersten im wesentlichen nur dadurch, daß der dritten in der Physik neben den Skalaren und den Vektoren vorkommenden Größenart, den Tensoren, ein besonderes Kapitel gewidmet ist. Diese Erweiterung ist nur zu loben, da die Tensoren eine nicht unwichtige Rolle in der ganzen Physik spielen.

Die Sprache ist knapp und klar, die Ausstattung gut. Das Buch sei, namentlich auch den Studierenden, bestens empfohlen.

Breslau. Cl. Schaefer.

A. Wangerin. Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Bd. I. Mit Fig. 255 S. 8. (Der Sammlung Schubert 58. Band.) Leipzig 1909, G. J. Göschen. Geb. ℳ 6,60.

Der vorliegende erste Band enthält im ersten Abschnitt die Ableitung der wichtigsten Eigenschaften des von räumlich oder flächenhaft verteilten Massen herrührenden Potentials.

Der zweite Abschnitt bringt folgende Erweiterungen: Erstens werden andere als das Newtonsche Kraftgesetz diskutiert, ferner wird das logarithmische und das Potential von Doppelbelegungen eingeführt. Im dritten Abschnitt endlich bringt der Verfasser die Theorie des Potentials homogener Ellipsoide. Obwohl es zahlreiche Bücher über Potentialtheorie gibt, wird sich das vorliegende doch seinen Platz erringen, denn es verbindet in glücklicher Weise mathematische Strenge und physikalische Anschaulichkeit. Zahlreiche Beispiele halten das Interesse auch des nicht mathematisch interessierten Lesers fest. Hoffentlich läßt der Verfasser, dem die Theorie des Potentials wertvolle Beiträge verdankt, den zweite nBand rasch folgen. In diesem soll die Theorie der Kugelfunktionen und der Randwertprobleme enthalten sein.

Breslau. Cl. Schaefer.

J. Carlebach. Lewi ben Gerson als Mathematiker. 238 S. Berlin 1910, Lamm. ℳ 5,—.

Vor 23 Jahren tauchte zum ersten Male bei der Herausgabe eines Verzeichnisses der Handschriften, welche Regiomontan besessen hatte, der Name eines „spanischen Juden" auf, von dem man bisher nichts wußte. Allmählich, besonders durch die Nachforschungen S. Günthers, stellte sich heraus, daß dieser in Wahrheit provenzalische Jude ein hervorragender Vertreter der Mathematik resp. der angewandten Mathematik im Mittelalter gewesen sei. Zunächst zeigte sich, daß der bis dahin Regiomontan zugeschriebene Jakobstab, wenn nicht eine Erfindung dieses Juden, so doch durch denselben im Abendlande bekannt geworden war. Dann förderte Steinschneiders Handschriften-Katalog der Münchener Bibliothek mehrere Handschriften mathematischen Inhaltes von diesem Lewi ben Gerson ans Licht, und der Herausgeber des gegenwärtig vorliegenden Buches stellte 1908 erstmalig die Übersetzung der Algebra Levis in seiner Dissertation den Mathematikern vor Augen. Wenn auch nicht in jenem Buche überwältigende Fortschritte gegenüber den anderen enthalten waren, so war doch der Inhalt und besonders die präzise Form, in welcher z. B. die Kombinationslehre, die Wurzelausziehung mit Sexagesimalbrüchen gehandhabt wurde, interessant genug, um den Wunsch zu rechtfertigen,

Digitized by Google

über den Mann genauere Angaben zu haben. Diesen Wunsch erfüllt der Verf. in gegenwärtigem Buche, welches in 2 Teile zerfällt.

Der erste Teil bietet Biographisches, der zweite enthält die erstmalige Herausgabe des kleinen Traktats über harmonische Zahlen und Proben aus der schon erwähnten Doktordissertation. Zunächst wird uns Heimat und Milieu geschildert, in welchem Levi gelebt hat, seine Persönlichkeit wird charakterisiert, und dann werden seine „astronomischen", besser astronomisch-optischen Leistungen, endlich seine mathematischen Verdienste gewürdigt. Den Schluß des ersten Buches bildet sein Tod und die Stellung, welche er in der Geschichte der Wissenschaft hat. Die astronomischen Erfindungen sind der Jakobstab, die Dunkelkammer. Mit diesen beobachtet er besonders die Bewegung des Mondes in einem besonderen Buche, darin lehrt er auch die Beweglichkeit der Apogäen sämtlicher Planeten. Dann wendet er sich in dem Buche Milchamoth zu einer allgemeinen Sternkunde. Von den mathematischen Leistungen interessiert am meisten die Behandlung der Trigonometrie, in welcher er die babylonisch-griechische Sehnenrechnung mit der durch die Araber ihm wohl bekannt gewordenen indischen Sinusrechnung verbindet. In der Geometrie übt er an Euklid meist wohlbegründete Kritik und fügt Ergänzungen hinzu, die auch heute noch brauchbar sind. Da Levi 1288 geboren ist, so sind das alles Leistungen, die ihn als einen hervorragenden Mathematiker des Mittelalters erscheinen lassen, und es ist ein unbestreitbares Verdienst des Herausgebers, auf Levi die Aufmerksamkeit gerichtet zu haben. Es wäre sehr zu wünschen, daß die uns noch erhaltenen mathematischen Arbeiten Levi ben Gersons, so wie „die Praxis des Rechnens" (Frankfurt a. M. 1909, L. Golde) bereits erschienen ist, in deutscher Übersetzung herausgegeben würden, und wir möchten den Verf. dazu gern ermuntern.

Niendorf. ——————— E. Hoppe.

J. B. Stallo. Die Begriffe und Theorien der modernen Physik. Nach der dritten Auflage des englischen Originals übersetzt von Dr. H. Kleinpeter. Mit einem Vorwort von E. Mach. 2. Aufl. XXIV u. 328 S. 8. Leipzig 1911, J. A. Barth. Geb. ℳ 8,—.

Es ist mit den Titeln von Büchern eine eigene Sache. Wer im Jahre 1911 ein Buch über die „Theorien der modernen Physik" kauft, wird darin Elektronentheorie, Relativitätsprinzip usw. erwarten. Davon ist in dem Buche aber mit keiner Silbe die Rede. Sein Titel war für die erste englische Ausgabe gedacht, und selbst damals würde schon manches vermißt sein, wenn man das „modern" wirklich hätte pressen wollen. Es stellt etwa die Ideen dar, welche in der Mitte der 80er Jahre des vorigen Jahrhunderts „das Neueste" waren, oder um mich gleich sachlich auszudrücken, es schließt ab mit Helmholtz' monozyklischer Wirbelbewegung. Das soll nun nicht etwa ein Vorwurf sein, der Übersetzer hatte nicht das Recht, nach dem Tode des Autors (1900) den Titel etwa zu ändern; aber ich will sagen, das Buch hat keine aktuelle Bedeutung, sondern im wesentlichen historische. Neben diesem historischen Wert wird man dem Buche freilich auch einen Gegenwartswert beimessen dürfen in bezug auf die philosophischen Auseinandersetzungen über die physikalischen Begriffe und die Erkenntnistheorien; wie weit, wird sich gleich zeigen.

Nach dieser allgemeinen Charakteristik versteht es sich von selbst, daß Stallo unter moderner Physik die *mechanische* Erklärung aller Naturerschei-

Digitized by Google

nungen versteht, d. h. er beackert dasselbe Feld, wie E. Mach es getan hatte, der diesem Stalloschen Buche eine Vorrede mit auf den Weg gegeben hat. Stallo will darin untersuchen, „ob die Gültigkeit der mechanischen Theorien des Weltalls in ihrer gegenwärtigen (1885) Form und mit ihren gewöhnlichen Annahmen in der Tat eine unbedingte ist". Zu dem Zwecke legt der Verf. zunächst die Grundprinzipien der mechanischen Weltanschauung dar. Dabei ist mir sehr störend gewesen, daß er Masse als qualitätslose Materie benutzt. Diesen Fehler, gegen welchen Ostwald sich mit Recht so entschieden wendet, haben auch zu jener Zeit Männer wie Kirchhoff bereits hinreichend bekämpft. Er wird natürlich Stallo auch verhängnisvoll. Solche Sätze wie den (S. 14): „Die Ureinheiten der *Masse* sind einfach und in jeder Beziehung untereinander gleich" hat keiner der bedeutenden Mechaniker am Ausgange des vorigen Jahrhunderts vertreten. Wie hat man sich 1881 auf dem internationalen Kongreß bemüht, den Begriff der Masse einwandfrei festzulegen! Es ist darum nicht eine Widerlegung der damaligen Mechanik, wenn Stallo den Nachweis vorbringt, daß die wirklichen Körper nicht aus solchen Einheiten aufgebaut sind. Wir sind wirklich seit mehr als 20 Jahren darüber durchaus orientiert, daß die Atomtheorie nicht etwa den Anspruch erhebt, das Rätsel des „Seins" gelöst zu haben, sondern daß es sich lediglich um eine Arbeitshypothese handelt, die uns gestattet, möglichst bequem und *vorstellbar* die Vorgänge der Wirklichkeit darzustellen. Es hat natürlich zu jener Zeit geradeso wie heute und wie immer Gelehrte gegeben, die solche Wahrheiten nicht erkannt hatten, aber wenn sich z. B. Stallo ziemlich ausführlich gegen die Spekulationen Spillers (S. 163 ff.) wendet, so ist solch ein Mann so wenig Vertreter der mechanischen Weltanschauung von 1880 gewesen, daß man heute kaum seinen Namen kennt. Auch Stallos Bemerkungen über die Thermochemie sind heute durch die einwandfreien Messungen vollständig überholt.

Wenn also auch kein moderner Physiker oder Naturforscher aus dem Buche für die tatsächlichen Verhältnisse etwas lernen kann, so ist es doch erkenntnistheoretisch von Wert auch für den modernsten Forscher, indem es die Grenzen der zulässigen Schlüsse und Beobachtungsresultate mit aller Klarheit nachweist, und gerade hier finden wir heute so manche Überschreitung der Grenzlinie, daß wir die Lektüre dieser Kapitel durchaus empfehlen können. Stallo war sicher ein intelligenter und kritischer Kopf, von dem man vielerlei lernen kann. Seine unhaltbare Polemik gegen Riemanns Raumtheorie beruht wohl auf Mißverständnis, ebenso sein Urteil über Keplers Kraftbegriff. Aufgefallen ist mir, daß Stallo bei den Versuchen die Gravitation durch Ätherstöße zu erklären, die ausgedehnten und noch heute wertvollen Arbeiten Eulers nicht nennt (S. 49). Vielleicht entschließt sich der Übersetzer bei einer neuen Auflage hier in einer Anmerkung das Versäumte nachzuholen.

Niendorf. E. Hoppe.

Ernst Abbe. Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, bearbeitet und herausgegeben von Otto Lummer und Fritz Reiche. Mit 57 Abb. u. 1 Bildnis Ernst Abbes. XII u. 108 S. gr. 8. Braunschweig 1910, Fried. Vieweg & Sohn. Geh. ℳ 5,—, geb. ℳ 6,—.

Abbe hat seine Absicht, die von ihm entwickelten Theorien der mikroskopischen Abbildung der Öffentlichkeit zu übergeben, nicht ausführen können.

Digitized by Google

Was man davon bisher erfahren hat, bezieht sich auf die von Dippel in der elementar gehaltenen „Theorie des Mikroskops" gegebenen Ableitungen und Folgerungen aus den Abbeschen Formeln. Man wird es daher mit freudiger Genugtuung begrüßen, wenn einer seiner qualifiziertesten Schüler, O. Lummer, der noch das Glück hatte, in persönlicher Aussprache mit dem Meister das Verständnis für den vorgetragenen Stoff zu klären und zu vertiefen, im Verein mit F. Reiche, dem man namentlich die rechnerische Durchführung eines Beispiels über einen leuchtenden Spalt von endlicher Breite verdankt, dessen Hälften eine konstante Phasendifferenz aufweisen, es unternommen hat, das Werk Abbes aus alten Kollegheften erstehen zu lassen und vor dem Begrabenwerden zu erretten. Das von Vieweg & Sohn in bekannter Vollendung ausgestattete Werkchen behandelt vorzugsweise jene Fälle, in denen die geometrische Optik völlig versagt, z. B. bei der Abbildung nichtselbstleuchtender Ojekte, deren Flächenelemente kohärente, also interferenzfähige Wellenzüge aussenden. Die Unähnlichkeit der Abbildung bei künstlicher Abblendung wurde von Abbe zuerst demonstriert und begründet (Steigerung der Ähnlichkeit durch die wachsende Anzahl der an der Bildbildnng teilnehmenden Interferenzmaxima und Erfüllung der Ungleichung $\gamma \geqq h_1 \lambda_0 / n$). Die Untersuchung über die Strukturbildung durch Anteilnahme der ersten beiden seitlichen Maxima ist überaus eindrucksvoll und überzeugend, wie überhaupt der ganze Inhalt des Buches, das sowohl dem Theoretiker wie Praktiker zum Studium dringend empfohlen werden darf. Interessant ist die weitgehende Verwendung des Energiesatzes als Beweismittel und die Ungezwungenheit, mit der sich die auf dem Fresnel-Huygensschen Interferenzprinzip aufgebaute Theorie Abbes mit den Funktionen des Kirchhoffschen Integralausdruckes und den Gleichungen der Maxwellschen Lichttheorie, unter Voraussetzung kleiner Konvergenzwinkel im Bildraum, vereinigen läßt. In dieser Hinsicht sind in der Tat die Befürchtungen O. Lummers, die Abbesche Theorie auf eine neue, modernere Grundlage stellen zu müssen, gegenstandslos geworden. Bezüglich der Einzelheiten müssen wir auf das vortreffliche Werk selbst verweisen.

Berlin. B. Donath.

Ludwig Zehnder. Grundriß der Physik. Mit Abb. 32 u. 438 S. gr. 8. Tübingen 1907. H. Lauppsche Buchhandlung. Geh. ℳ 7,—, geb. ℳ 8,—.

Das ziemlich umfangreiche Buch muß unter der Voraussetzung beurteilt werden, daß es weder für den Anfänger noch für den Physiker bestimmt ist, sondern für den Gebrauch des reiferen Studierenden, der in ihm eine gedrängte Übersicht über die Grundlagen und den Zusammenhang der physikalischen Erscheinungen findet. Die Betrachtungsweise der höheren Mathematik hat daher an den meisten Stellen nur begrifflich und mit Umgehung der gewohnten äußeren Form Verwendung gefunden. Mathematische Entwicklungen sind überhaupt im Text tunlichst vermieden und an den Schluß des Buches gesetzt worden, wo man auch eine kurze, an einigen Stellen vielleicht (für den Nicht-Mathematiker) allzukurze, Einführung in die Differential- und Integralrechnung findet. Der Darstellung ist sonst, bei aller Knappheit, eine große Klarheit und leichte Faßlichkeit nachzurühmen. Im einzelnen würden einige Ergänzungen dem Buche zu-gute kommen, z. B. eine zeichnerische Demonstration der Brechung

Digitized by Google

von Wellenflächen und Wellenfronten in Linsen (Verwandlung der konvexen Wellenkugelfläche in eine konkave), sowie eine kurze Diskussion über die Bedenken, die bei der Besprechung des Huygensschen Prinzipes bezüglich der Möglichkeit einer Rückbeugung leicht auftauchen könnten. Vielleicht wäre es auch zweckmäßig, das Potential als eine Zustandsgröße noch schärfer als es schon geschieht zu charakterisieren, um jeder Verwechslung mit einer Größe ganz anderer Dimension (der Arbeit), durch die es gemessen wird, zu begegnen. Sehr originell und durchaus nachahmungswert ist das Inhaltsverzeichnis, das zugleich in kurzen und geschickt gewählten Sätzen einen allgemeinen Überblick über die Gesetzmäßigkeit der Erscheinungen liefert. Wir halten es ebenfalls für einen besonderen Vorzug, wenn der Herr Verfasser die Streitfragen, die sich aus der Rivalität der Maxwellschen Lichttheorie, der Elektronentheorie und der elastischen Lichttheorie augenblicklich noch ergeben, nicht umgeht, sondern zur Vertiefung des Verständnisses verwendet. Das Buch hat so viele Vorzüge, daß es eine wirkliche Bereicherung der an Lehrbüchern gewiß nicht armen physikalischen Literatur bildet.

Berlin. B. Donath.

O. Lehmann. Das Kristallisationsmikroskop und die damit gemachten Entdeckungen, insbesondere die der flüssigen Kristalle. Mit Abbildungen und 1 Tafel. VII u. 112 S. gr. 8. Braunschweig 1911, Fried. Vieweg & Sohn. Geh. ℳ 3,—.

In dem sehr sauber und reichhaltig illustrierten Buche findet der Praktiker die gesamte, bis ins kleinste Detail ausgebildete Apparatur zur Ausübung der Kristallanalyse und zur Darstellung der sog. flüssigen Kristalle. Die wissenschaftliche Behandlung des Stoffes tritt gegen die sehr eingehende Beschreibung der technischen Vorkehrungen allerdings etwas zurück. Vielleicht entschließt sich der Herr Verfasser in dieser Hinsicht künftighin noch zu einigen Erweiterungen. In dem letzten Kapitel über flüssige Kristalle und Urheberrecht herrscht die persönliche Note vor. Den Leser, der sich für die dabei berührten Fragen interessiert, müssen wir auf das Buch selbst verweisen.

Berlin. B. Donath.

A. Gleichen. Die Theorie der modernen optischen Instrumente. Ein Hilfs- und Übungsbuch für Physiker und Konstrukteure optischer Werkstätten sowie für Ingenieure im Dienste des Heeres und der Marine. Mit 260 Fig. u. 109 gelösten Aufgaben. XII u. 332 S. 8. Stuttgart 1911, Ferdinand Enke. Geh. ℳ 10,80, geb. ℳ 12,—

Die in dem letzten Jahrzehnt aufgetauchten bemerkenswerten Neukonstruktionen auf dem Gebiete des optischen Instrumentenbaues haben eine zusammenhängende Darstellung bisher nicht gefunden. Der Verfasser hat diese Arbeit übernommen und ist als Mitglied des Kaiserlichen Patentamtes dazu besonders berechtigt.

Fünf Kapitel bilden einen allgemeinen Teil, der hauptsächlich eine Ableitung der optischen Grundgesetze enthält, die bei der Besprechung optischer Instrumente vorausgesetzt werden müssen. Hervorgehoben sei hieraus die aus-

Digitized by Google

führliche Behandlung der modernen Dioptrie- und Konvergenzrechnung. Der wichtigere und interessantere spezielle Teil beginnt mit einem Kapitel über das Auge, seine Fehler und die Möglichkeit ihrer Behebung. Das Gebiet des Instrumentenbaues ist natürlich so umfassend, daß in dem Buche hauptsächlich nur eine lose Aneinanderhängung der verschiedenen Gebiete stattfinden konnte. Wir möchten besonders hervorheben die Kapitel über die *Zielfernrohre*, die ausgezeichnete Bearbeitung der Konstruktion der *Panoramafernrohre*, speziell der genialen Goerzschen Konstruktion. Es werden die *Entfernungsmesser* aller möglichen Systeme besprochen, wobei natürlich immer nur das wesentliche Prinzip und nicht die ins einzelne gehende konstruktive Ausarbeitung, die ja vielfach Fabrikgeheimnis ist, behandelt werden kann. Das Kapitel über die Mikroskope läßt in dem Fehlen optischer Neuerungen erkennen, wie weit die Theorie dieses Instrumentes durch die genialen Arbeiten von Abbe gefördert worden ist. Nur die Ultramikroskopie hat neue Kondensorkonstruktionen hervorgerufen. Der die photographische Optik behandelnde Teil des Buches enthält eine Zusammenstellung der von den Firmen Zeiß, Goerz und Voigtländer noch heute fabrizierten Objektive, sowie die Beschreibung einiger Neukonstruktionen für besondere Zwecke. In dem Kapitel ophtalmologische Optik finden wir dann moderne Augenspiegelkonstruktionen beschrieben.

Ein Vorzug des Buches ist, daß es eine genaue Angabe der Patenterteilungen enthält und zwar nicht nur derjenigen, die sich auf die speziell besprochene Konstruktion beziehen, sondern auch andere in das betreffende Gebiet fallende. Weiter möchten wir die Einstreuung von Aufgaben und die Angabe ihrer Lösung hervorheben.

Berlin. B. Seegert.

M. v. Rohr. Die optischen Instrumente. 2. Aufl. Mit 88 Abbildungen. 140 S. 8. Aus Natur und Geisteswelt. Bd. 88. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geb. *M* 1,25.

Der Verfasser ist als hervorragender Fachmann in der optischen Literatur bekannt. Sein hier vorliegendes Werk erscheint bereits in der 2. Auflage und hat damit also seine Daseinsberechtigung bewiesen. In gedrängter Kürze, wie sie durch den Zweck des Buches vorgeschrieben ist, sind die optischen Instrumente und die zu ihrem Verständnis nötigen optischen Grundbegriffe allgemeinverständlich behandelt. Rechnungen sind fast vollständig vermieden; statt dessen werden in anschaulicher Weise die bei der Abbildung durch die verschiedenen optischen Instrumente herrschenden Vorgänge geschildert. Auch die nötigsten historischen Daten über die Entwicklung der betreffenden Instrumente sind gemacht. In dieser Weise sind photographische Objektive, Camera obscura, Projektionsapparate, Brillen, Vergrößerungsgläser, Mikroskope und die verschiedenen Arten von Fernrohren behandelt. Die Darstellung hat die Abbeschen Theorien zur Grundlage; besonders ist auf die von den verschiedenen Instrumenten bewirkte Strahlenbegrenzung und auf die für den Augendrehungspunkt gültige Perspektive, auf die Gullstrand zuerst hingewiesen hat, Wert gelegt.

Friedenau. Chr. v. Hofe.

Digitized by Google

Hugo Werth. Das Licht, ausführliche und allgemeinverständliche Darstellung. Mit 482 Abb. u. 1 Spektraltafel in Farben. XVI u. 398 S. Gr. 8. Wien und Leipzig 1910, A. Hartleben. Geh. ℳ 8,00, geb. ℳ 9,50.

Das Werk ist sehr elementar gehalten und setzt nur die einfachsten mathematischen Vorkenntnisse voraus, so daß es seiner Bestimmung, dem Selbstunterricht z. B. für Schüler von Gymnasien und Realgymnasien zu dienen, durchaus gerecht wird. Die etwas eigenartige Ausdrucksweise, die vielleicht darauf zurückzuführen ist, daß der Verfasser ein Ausländer ist, stört die Klarheit der Darstellung nicht weiter. Etwas unangenehmer wirkt es, daß sich zuweilen die auf die Figuren bezüglichen Buchstabenbezeichnungen vom Text zu wenig abheben. In dem Bestreben nach leichter Verständlichkeit bringt der Verfasser wohl reichlich viele Wiederholungen, so z. B. wird bei der Entwicklung des Abbildungsgesetzes fast dieselbe Herleitung (mit anderen Vorzeichen) für die verschiedenen Linsenformen viermal gebracht.

Im ersten experimentellen Teil ist die geometrische Optik vollkommen ausreichend für den angegebenen Zweck behandelt. Das Kapitel über optische Instrumente hätte etwas ausführlicher sein dürfen, damit das Buch für die heranwachsende Jugend auch einen gewissen praktischen Wert erhalten hätte. Die für die heutige Zeit so wichtige Photographie wird besonders stiefmütterlich behandelt. Die photographischen Apparate werden mit der Camera obscura zusammen auf einer halben Seite erledigt; für den chemischen Teil werden $3^1/_2$ Seiten geopfert. Bei der Dreifarbenphotographie hätte wohl Lumière mit erwähnt werden können. In dem Abschnitt über Fernrohre sind die Prismenfernrohre überhaupt nicht erwähnt.

Der theoretische Teil zeichnet sich durch recht ausführliche und klare Darstellung aus und kann sehr viel zum Verständnis der physikalischen Optik beitragen. Von vornherein wird so oft wie möglich darauf hingewiesen, daß das Licht keine isoliert dastehende Naturerscheinung ist, sondern nur den für das Auge wahrnehmbaren Bereich der Wellenbewegung darstellt. Auf diese Weise wird das Verständnis für das letzte Kapitel vorbereitet, das die elektromagnetische Lichttheorie behandelt und in dem die Einheit der Naturerscheinungen nochmals ausführlich erörtert wird.

Für die erste Einführung in die Optik wird das Buch sicher sehr gute Dienste leisten.

Friedenau. ——————— Chr. v. Hofe.

Wilhelm Trabert. Lehrbuch der kosmischen Physik. Mit 149 Figuren im Text und einer Tafel. X u. 662 S. 8. Leipzig und Berlin 1911, B. G. Teubner. Geheftet ℳ 20,—, in Leinwand gebunden ℳ 22,—

Das vorliegende Werk soll die siderischen und tellurischen Erscheinungen als Lehre vom Zustande und den Zustandsänderungen des Weltalls behandeln, dieses aufgefaßt als Kosmos, d. h. als organisches Ganzes, beherrscht von einheitlichen Gesetzen. Das Werk soll also mehr bieten als eine lose Aneinanderreihung derjenigen Disziplinen, die in das Gebiet der Erd- und Himmelskunde fallen und für deren Studium Einzelwerke zur Verfügung stehen; es soll den Zusammenhang zwischen diesen Disziplinen vermitteln und entsprechend der Humboldtschen Auffassung vom Kosmos „die Welt als ein durch innere Kräfte bewegtes und belebtes Ganzes darstellen".

Digitized by Google

Daß bei dem überaus reichen Material, welches der ordnende Geist beherrschen muß, die Form und die Anlage eines solchen Werkes große Schwierigkeiten bietet, ist selbstverständlich, und doch erscheint die Möglichkeit einer physischen Weltbeschreibung in dem Sinne, wie sie dem Verfasser vorschwebt, jetzt eher geboten als zu Humboldts Zeit. Denn erst nach Humboldt hat uns ja die Spektralanalyse die Einheit des Stoffes im Weltall gelehrt, erst nach Humboldt haben wir in dem Satze von der Erhaltung der Energie ein Universalprinzip kennen gelernt, welches das gesamte Geschehen im Weltall beherrscht, und erst nach Humboldt hat das Prinzip der Umbildung und Anpassung das Verständnis für eine Entwicklung im Weltall eröffnet.

Ein Lehrbuch, welches aus diesem Gesichtspunkte heraus die kosmische Physik betrachtet, kommt jedenfalls einem wirklichen Bedürfnisse entgegen und entspricht durchaus dem Verlangen nach Orientierung, das bei der fortschreitenden Anhäufung des Beobachtungsmaterials und der weitgehenden Spezialisierung der Naturwissenschaften sich nicht nur für den Lehrer, sondern auch für den auf diesen Gebieten tätigen Fachmann immer dringender geltend macht. Der Lehrer der Physik wird in ihm dasjenige finden, was er den Schülern über die Hauptphänomene des Weltalls vorzutragen hat, der Fachmann, mag er nun Astronom, Meteorologe, Geograph oder Geologe sein, mit Freuden die Gelegenheit begrüßen, die physikalischen Fragen, welche in sein Fach hineinspielen, aber seinem eigenen Forschungsgebiete ferner liegen, im Zusammenhang dargestellt zu finden. Die Anwendung der Mathematik ist dabei auf ein Minimum beschränkt. Wo dem Verfasser höhere Mathematik erwünscht schien, ist sie auf ein Kleingedrucktes reduziert und kann ohne Störung des Zusammenhanges überschlagen werden.

Soviel über die Ziele des Trabertschen Werkes; sein überaus reicher Inhalt kann hier nur in großen Zügen angedeutet werden. Fast die Hälfte des Buches ist der mathematischen Geographie, der stellaren Astronomie und der Mechanik des Himmels gewidmet. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Erde und ihrer Stellung im Weltraum (Gestalt der Erde und astronomische Orientierung auf der Himmelskugel, Zeit- und Ortsbestimmung, astronomische Erdmessung, Messung kosmischer Distanzen, Bau des Fixsternhimmels), der zweite Abschnitt mit den Bewegungsvorgängen im Weltall (Rotationsbewegung der Himmelskörper, Zentralbewegung im Sonnensystem, Eigenbewegung der Sonne und der Fixsterne, Bewegungen der Rotationsachse der Erde, Gravitationsgesetz); ferner kommt darin das Gebiet der Geophysik zur Darstellung (Erdinneres und Verteilung der Erdmasse, Schwerewirkungen an der Erdoberfläche, Lotabweichungen und das Geoid, Gleichgewicht der Atmosphäre, Bewegungen des Wassers durch Gravitation und elastische Schwingungen des Erdkörpers infolge von Erdbeben). Es folgt ein dritter Abschnitt, der sich mit der Astrophysik beschäftigt, soweit sie auf die Strahlungsvorgänge im Weltall Bezug hat (Sonnenstrahlung und Sternstrahlung, Farbe des Himmels, Spektralanalyse usw.), und mit der meteorologischen Optik (Refraktion und Reflexion in der Atmosphäre, Szintillieren der Sterne, Dämmerung, Höfe und Ringe, Regenbogen). Der vierte Abschnitt behandelt den Energieaustausch und die Energieverwandlungen infolge der Eigenwärme der Erde und der Wärmestrahlung der Sonne, insbesondere die Bewegungen in der Luft- und Wasserhülle unseres Planeten (Meteorologie und Meeresströmungen, Klima der Erde und dessen Veränderungen), sowie die Bewegungen im Erdfesten

Digitized by Google

(Gebirgsbildung und Vulkanismus), die durch Gezeitenreibung hervorgebrachten Änderungen im Erd-, Mond- und Sonnensystem und die elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche. Der fünfte und letzte Abschnitt entwickelt endlich die Grundbegriffe der Kosmologie (Entstehung der Erde und des Mondes, des Sonnensystems, der Doppelsternsysteme und Sternnebel) und im Anschluß daran die aus dem Entropieprinzip zu ziehenden Folgerungen über die Zukunft des Weltalls.

Wir können dem Werke nur eine große Verbreitung wünschen, denn wenn auch in den Einzelheiten sich hier und da kleine Mängel bemerkbar machen, die größtenteils in der Kürze der Darstellung begründet sind, so ist in ihm doch ein überaus großes Wissen zusammengetragen, das in jeder Beziehung dem neusten Standpunkt der Forschung gerecht wird.

Berlin. P. Schwahn.

K. Weber. Lehrbuch der Planimetrie für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Mit in den Text eingedruckten Figuren. 164 S. 8. Wolfenbüttel 1910, J. Zwißler. Brosch. ℳ 2,50.

— **Lehrbuch der Trigonometrie.** Mit in den Text eingedruckten Figuren. 39 S. 8. Wolfenbüttel 1910, J. Zwißler. Brosch. ℳ —,75.

— **Lehrbuch der Stereometrie.** Mit in den Text eingedruckten Figuren. 59 S. 8. Wolfenbüttel 1910, J. Zwißler. Brosch. ℳ —,75.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, hat der Verfasser sein Lehrbuch der Geometrie sowohl für diejenigen bestimmt, welche sich zur Aneignung allgemeiner Bildung auf Schulen mit Mathematik beschäftigen müssen, als auch für diejenigen, welche sie auf eigene Hand erlernen wollen. Dem Referenten scheinen die beiden Gesichtspunkte nicht gleichmäßig zur Geltung gekommen zu sein. Um ein Buch für die Schule geeignet zu machen, ist nötig, daß die Auswahl des Stoffes den Lehrplänen angepaßt ist. Das ist nicht überall geschehen. Es fehlen beispielsweise in der Planimetrie der Feuerbachsche Kreis, die Sätze des Menelaos und Ceva, die Apollonische Berührungsaufgabe, während anderes über die Maßen ausführlich behandelt ist. Daher wird das Buch auch mehr denen von Nutzen sein, die sich aus Liebhaberei in die Anfangsgründe der Geometrie einführen lassen wollen, ohne ein besonderes Ziel zu haben. Ihnen wird willkommen sein, daß für den pythagoreischen Lehrsatz fünf Beweise gegeben sind, daß eine angenäherte Rektifikation des Kreises mit Zirkel und Lineal gebracht wird, und daß die regelmäßigen Körper auf 9 Seiten behandelt werden. Aufgefallen ist dem Referenten, daß die Erklärung, wann zwei Linien parallel heißen, nicht als solche gekennzeichnet ist, sondern als Folgerung aus einigen Grundsätzen auftritt. Die Bezeichnungen Deckwinkel, Anwinkel, Antiwechselwinkel sind unnötig und sollten besser fortbleiben. Wenn bewiesen werden soll, daß die Winkelsumme im Viereck $4R$ beträgt, ist es überflüssig, daß man dem Punkt O, mit dessen Hilfe man das Viereck in vier Dreiecke zerlegt, nacheinander vier Lagen (innerhalb, außerhalb, auf einer Seite, in einer Ecke des Vierecks) gibt und jedesmal den Satz von neuem beweist. Jeder Beweis besitzt doch für sich vollkommene Gültigkeit. Bei den Fundamentalaufgaben fehlt die Konstruktion des Lotes im Endpunkt einer Strecke. Überflüssig ist

Digitized by Google

die Berechnung des Zentri- und Polygonwinkels der regelmäßigen Polygone von $n = 3$ bis $n = 15$. Bei der Ableitung der Formel für die Kugelhaube — im Buche wird Kugelmütze gesagt — tritt plötzlich ohne jede Erklärung das Differentialzeichen und gleich darauf das Integralzeichen auf. Was mag sich der Laie dabei denken? Noch ein paar Worte über die Figuren. Es sieht unschön aus, wenn (wie z. B. auf S. 62) Nullkreise solche Dimensionen annehmen, daß sie im Vergleich mit einem in derselben Figur vorkommenden Kreise nur den vierten Teil des Halbmessers besitzen und zu der Figur zu gehören scheinen. Die Ellipsen sind meistens schlecht gezeichnet. Und in der Figur auf S. 25 der „Stereometrie" liegt gar der Schnittkreis einer Kugel mit einer Ebene teilweise außerhalb der Kugel! Bei einer etwaigen Neuauflage des Buches sind daher die Figuren einer gründlichen Revision zu unterziehen.

Berlin. A. Baruch.

Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. Illustrierter Katalog 1911. B. G. Teubner.

Der dringenden Aufgabe unserer Zeit, gegenüber einer weitverbreiteten pseudowissenschaftlichen Literatur die gesicherten Resultate der modernen Wissenschaft weiteren Kreisen zugänglich zu machen, um so einerseits der unserer Kultur aus der Scheidung in Kasten drohenden Gefahr zu begegnen, wie andererseits den materiell denkenden Menschen Gelegenheit zu bieten, mit den geistigen Errungenschaften der Zeit in Fühlung zu bleiben, verdankt die vom Verlag B. G. Teubner in Leipzig unter dem Titel „Aus Natur und Geisteswelt" herausgegebene Sammlung ihre Entstehung. Sie sucht ihre Aufgabe nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoffen und Lehrsätzen, oder etwa gar unerwiesener Hypothesen, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten. Von Anfang an haben sich in dankenswertester Weise die besten Namen in den Dienst dieser Aufgabe gestellt, und die große allseitige Teilnahme und Anerkennung, deren sich diese Sammlung dauernd zu erfreuen hat, beweisen allein schon die zahlreichen bereits vorliegenden Neu- und Mehrauflagen.

Über diese Sammlung liegt ein soeben ausgegebener Gesamt-Katalog vor. Er unterrichtet auf 176 Seiten nicht nur eingehend über jedes der bis jetzt vorliegenden ca. 350 Bändchen, sondern bietet auch zahlreiche wohlgewählte Textproben und instruktive Illustrationen und darf so schon an sich in seiner Vielseitigkeit als ein höchst interessantes Büchlein bezeichnet werden. Jeder, der nur für irgend ein Gebiet menschlichen Wissens Interesse hat, lasse sich ihn senden — er wird bald zu den treuen Freunden dieser schmucken, gehaltvollen Bändchen gehören, die wie wenig andere Bücher geeignet sind, die Freude am Buche zu wecken, und die es durch den billigen Preis auch dem wenig Begüterten ermöglichen, sich eine kleine Bibliothek zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Leipzig. Verlag B. G. Teubner.

Digitized by Google

Fr. Bidschof und **A. Vital.** **Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln.** Leipzig 1905, Fr. Deuticke. ℳ 7,50.

Schon Bessel hat das Wort geprägt: „Der Feldmesser, der Baumeister und der Seefahrer werden nie mehr als fünf Dezimalen gebrauchen, aber selbst der Astronom wird neun Zehnteile seiner Rechnungen mit Tafeln führen, welche nur diese Annäherung besitzen." Das vorliegende Tafelwerk wird daher bei der übergroßen Mehrzahl der rechnerischen Arbeiten Verwendung finden können.

Außer den üblichen logarithmischen und trigonometrischen Tafeln haben jene zahlreichen tabellarischen Behelfe Aufnahme gefunden, die bei astronomischen und nautischen Rechnungen benötigt werden, u. a. eine Koppeltafel, welche die Katheten a und b aller rechtwinkligen Dreiecke für die Werte der Hypotenuse d von 1 bis 115 wie für die Winkel von 0^0 bis 90^0 von Grad zu Grad enthält, die Besselschen Refraktionstafeln, die Perrinsche Azimuttafel, Tafeln zur Reduktion von Zirkummeridianhöhen, eine Tafel zur genäherten Bestimmung der Breite aus der Höhe des Polarsterns, die von Tietjen aufgestellte Formel und Tafel zur Auflösung der Keplerschen Gleichung, Tafeln zur Berechnung der wahren Anomalie in der parabolischen Bewegung u. a. m. Auch Geographen und Meteorologen finden in dem Buche Hilfstafeln für ihre Arbeiten, u. a. eine barometrische Höhentafel.

Am Schluß ist eine Sammlung von Formeln und Formelsystemen aus den verschiedenen Disziplinen der Mathematik, der Astronomie und der Nautik beigefügt, die dem Geographen wie dem Seemann, dem beobachtenden wie dem rechnenden Astronomen die Rechnungsvorschriften zur Lösung der wichtigsten rechnerischen Aufgaben ihrer Berufe bietet.

Berlin. E. Jahnke.

H. Schotten. **Friedrich Pietzker.** Mit einem Bildnis Pietzkers. [8 S.] gr. 8. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geh. ℳ —,50.

Zu Pfingsten 1909 legte Herr Pietzker sein Amt als Vorsitzender des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts nieder, und Ostern 1910 trat er aus seiner Tätigkeit als Oberlehrer am Gymnasium zu Nordhausen in den Ruhestand. Der Verfasser benutzt diese Gelegenheit, die aufopfernde Tätigkeit Pietzkers im „Förderungsverein" wie als Redakteur der „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften" zu schildern.

Berlin. E. Jahnke.

Jules Tannery. **Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.** Tome deuxième. 477 Seiten. Paris 1910.

Ein ganz vorzügliches Werk, das in bezug auf Strenge der Beweisführung so ziemlich das Maximum von dem leistet, was geleistet werden kann. Bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der Funktionentheorie bedient man sich ja der komplexen Zahlenebene in einem solchen Umfang, daß bei aller Arithmetisierung doch immer noch ein nicht unbeträchtlicher Rest geometrisch-anschaulicher Betrachtung übrig bleibt. Zwar wird man sich stets darüber klar sein, daß das Wort „Punkt" dabei soviel bedeutet wie „reelles Zahlenpaar", und daß alle in geometrischer Form ausgesprochenen Sätze in Wirklichkeit rein

Digitized by Google

arithmetische Wahrheiten sind. Gleichwohl haben eigentlich nur die schwierigeren und tiefer liegenden Theoreme, wie z. B. der Jordansche Kurvensatz, ein allgemein anerkanntes Recht, bewiesen zu werden, sich zu erringen vermocht, während man bei vielen andern Sätzen sich mit kurzen Andeutungen begnügt und die „ganz leichte" analytische Beweisführung dem Leser bzw. Hörer überläßt.

Mit dieser Tradition hat nun Tannery gründlich gebrochen, auch die allerevidentesten Sätze werden bewiesen, und zwar ist der Beweis gar nicht immer so leicht, wie man meinen sollte. So erfordert beispielsweise der Beweis für den folgenden ganz trivial erscheinenden Satz mehr als eine Seite (Nr. 289): „Wenn die Punkte A und B durch eine Kurve k verbunden sind, ferner B und C durch eine Kurve k', so bildet die Gesamtheit der zu k und k' gehörigen Punkte eine Kurve, welche A und C verbindet". Eine Kurve (Tannery sagt „lien", während er das Wort „courbe" in einem spezielleren Sinne gebraucht) ist dabei definiert als die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten x, y durch die Gleichungen gegeben sind

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

wo φ und ψ in dem angegebenen Intervall stetige Funktionen von t sind; die Kurve „verbindet" die Punkte mit den Koordinaten $\varphi(t_0), \psi(t_0)$ und $\varphi(t_1), \psi(t_1)$.

Mehrere Seiten beansprucht auch der Beweis des Satzes (Nr. 314), daß das Innere einer geschlossenen Kurve stets in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegt werden kann, deren jeder in einem Kreis vom Radius ε unterzubringen ist. Dabei wird indes nicht einmal die allgemeinste geschlossene Kurve (Jordankurve) genommen, sondern eine wesentlich spezialisierte. Auch der Jordansche Kurvensatz, der natürlich zuvor bewiesen werden muß, damit der vorige Satz überhaupt einen Sinn hat, wird der größeren Einfachheit halber nur in der von Ames herrührenden Spezialisierung vorgetragen. Dabei darf man nicht glauben, daß das Buch mit seiner Ausführlichkeit der Grundlagen den Leser etwa langweilt oder ungeduldig macht; vielmehr versteht es Tannery, den spröden Stoff in solcher Form darzustellen, daß er unbedingt interessiert, und daß der einigermaßen kritisch vorgebildete Leser die Notwendigkeit solcher Breite leicht selbst einsehen wird.

Allerdings ist einleuchtend, daß der Verfasser, nachdem er einen so großen Raum für die Grundlagen geopfert hat, nicht mehr allzuweit in das Gebiet der Funktionentheorie selbst hineinführen kann; das Buch will ja auch nur eine „Introduction" geben. Trotzdem ist der behandelte Stoff verhältnismäßig reichhaltig. Zunächst wird die Theorie der bestimmten Integrale entwickelt (die hierzu erforderlichen Grundlagen enthält der erste Band) und daran anschließend gewisse Reihenentwicklungen, insbesondere die Fourierreihen mit den Dirichletschen Bedingungen. Im folgenden Kapitel wird dann auf über hundert Seiten die in der Funktionentheorie übliche geometrische Sprechweise begründet, wobei die oben angeführten Sätze ihre Stelle finden. Sodann kommt die Lehre von den komplexen Zahlen und die allgemeine Funktionentheorie in Weierstraßscher Richtung. Von speziellen Funktionen sind ausführlich die rationalen untersucht, wobei natürlich auch der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen wird. Sodann die einfachsten mehrwertigen Funktionen, wie $\sqrt{x}$, $\log x$, usw. Diese letzteren sind vielleicht etwas allzu breit behandelt und für den Leser ermüdend, der viele Seiten lang nur mit der Werteverteilung dieser einfachen Funktionen in der zerschnittenen und unzerschnittenen Ebene unter-

Digitized by Google

halten wird. Das letzte Kapitel ist dem Begriff der Ableitung und des komplexen Integrals gewidmet. Dabei spielt natürlich der Cauchysche Integralsatz die Hauptrolle, und zwar wird dieser nach Goursat, ohne die Stetigkeit der Ableitung vorauszusetzen, vorgetragen. Darauf gründet sich dann die Entwicklung in die Taylorsche Reihe, wodurch der Anschluß der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie an die Weierstraßsche hergestellt wird. Den Schluß bildet ein von Hadamard herrührender Anhang über einige mit dem Jordanschen Kurvensatz zusammenhängende Begriffe.

Leider fehlt dem Werk ein Sachregister, das die Auseinanderhaltung vieler Synonyma, wie lien, courbe usw, die von Tannery doch alle in einem ganz spezifischen Sinn gebraucht werden, erleichtern würde.

Tübingen. Oskar Perron.

Gerhard Kowalewski. Das Integral und seine geometrischen Anwendungen. 85 Seiten. Leipzig 1910, Veit u. Co.

Mit diesem Bändchen eröffnet der Verfasser eine Sammlung mathematischer Monographien unter dem Kollektivtitel *„Forschung und Studium"*, die es den Studierenden ermöglichen soll, die Fortschritte der mathematischen Wissenschaft mit einigem Verständnis zu verfolgen. Das vorliegende Heft behandelt den Begriff des bestimmten Integrals im Riemannschen Sinn, sowie die Ausdehnung auf Doppelintegrale. Der größte Wert ist dabei außer auf leichte Faßlichkeit besonders auf Strenge in der Beweisführung gelegt, wobei namentlich bei der Transformation der Doppelintegrale nicht unerhebliche Schwierigkeiten zu überwinden sind. Aber schon bei den einfachen Integralen weicht die Darstellung von der üblichen in manchen Punkten ab. Während sonst für die Existenz des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn $f(x)$ in (a, b) stetig ist, immer der Satz von der *gleichmäßigen* Stetigkeit herangezogen wird, kommt Kowalewski mit dem weniger aussagenden und etwas bequemer zu beweisenden Satz aus, daß aus $\lim(x_n - y_n) = 0$ stets $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ folgt. Nach Cauchy-Cantor hat eine Serie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dann und nur dann einen Grenzwert, wenn $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für genügend große n, m. Statt dieses Kriteriums hat Kowalewski wieder ein anderes (ebenfalls notwendiges und hinreichendes), welches ihm außerordentliche Dienste leistet und welches formal weniger verlangt als das obige, nämlich: für jede Teilserie $x_1', x_2', x_3', \ldots$ muß $\lim(x_n - x_n') = 0$ sein.

Auch die Begriffe oberes und unteres Integral werden in dem Büchlein behandelt. Was man dagegen vermißt, ist die Ausdehnung des Integralbegriffs auf den Fall unendlicher Grenzen und auf den Fall, daß der Integrand beliebig große Werte annimmt. Als geometrische Anwendungen sind die Begriffe Bogenlänge (auch bei Kurven ohne Tangente), sowie Inhalt einer krummen Oberfläche behandelt. Alles in allem erfüllt das Heft durchaus seinen Zweck, so daß ihm eine recht fleißige Benutzung von Seiten der Studierenden zu wünschen ist. Man wird nach dieser ersten Probe dem Erscheinen der nächsten Hefte von „Forschung und Studium" mit Spannung entgegensehen dürfen.

Tübingen. Oskar Perron.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

375. Euler hat in der *Mechanica* (T. I, § 640), ohne eine Begründung dafür zu geben, die Behauptung aufgestellt, es lasse sich von jedem Punkte einer Ebene an eine darin liegende algebraische Kurve stets mindestens eine Normale ziehen; daß der entsprechende Satz bei transzendenten Kurven nicht immer zutrifft, zeigt das von Euler angeführte Beispiel der logarithmischen Spirale. Es soll untersucht werden, ob Eulers Behauptung richtig ist, oder welcher Einschränkungen sie bedarf.

Karlsruhe i. B. P. Stäckel.

B. Lösungen.

Zu **329** (Bd. XVII, S. 247) (J. Neuberg). — Man bezeichne mit B_1, B_2, B_3, B_4 die Projektionen der Ecken eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ auf eine beliebige Gerade p. Die aus diesen Punkten auf die entsprechenden Tetraederebenen gefällten Lote sind vier Erzeugende eines Hyperboloides.

Lösung: Man wählt die Gerade p zur z-Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems und bezeichnet die Koordinaten der Ecken A_k des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ mit (x_k, y_k, z_k); dann sind die Koordinaten der Punkte B_k $(0, 0, z_k)$. Die der Ecke A_k gegenüberliegende Tetraederebene α_k hat die Gleichung

$$\alpha_k \equiv X_k x + Y_k y + Z_k z + T_k t = 0; \tag{1}$$

dabei sind X_k, Y_k, Z_k, T_k die entsprechenden Unterdeterminanten von

$$|x_k, y_k, z_k, t_k|. \qquad (t = t_k = 1;\ k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

Für das von B_k auf α_k gefällte Lot b_k findet man die Gleichungen

$$t_k Z_k x - t_k X_k z + z_k X_k t = 0, \quad t_k Z_k y - t_k Y_k z + z_k Y_k t = 0. \tag{3}$$

Die Linienkoordinaten von b_k sind

$$b_{k1} : b_{k2} : b_{k3} : b_{k4} : b_{k5} : b_{k6} = z_k Y_k : -z_k X_k : 0 : t_k X_k : t_k Y_k : t_k Z_k;$$

dazu kommt noch die identische Beziehung

$$b_{k1} b_{k4} + b_{k2} b_{k5} + b_{k3} b_{k6} = 0. \tag{4}$$

(Vgl. E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1910, B. G. Teubner, II 1, S. 149/150.)

Digitized by Google

Wenn die vier Geraden b_k hyperboloidisch liegen, werden sie von unendlich vielen Geraden q geschnitten. Eine Gerade q mit den Linienkoordinaten q_l ($l = 1, 2, \ldots, 6$) schneidet das Lot b_k, wenn

$$q_1 b_{k1} + q_2 b_{k5} + q_3 b_{k6} + q_4 b_{k1} + q_5 b_{k2} + q_6 b_{k3} = 0; \tag{5}$$

außerdem ist

$$q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6 = 0. \tag{6}$$

Setzt man die Werte der b_{kl} in (5) ein, so hat man zur Bestimmung der q_l fünf homogene Gleichungen. Nun sind die vierreihigen Determinanten der Matrix

$$| t_k X_k,\ t_k Y_k,\ t_k Z_k,\ z_k Y_k,\ z_k X_k \tag{7}$$

sämtlich gleich Null. Addiert man nämlich zu den Elementen der vierten Zeile die der drei anderen Zeilen, so werden alle Elemente jener Zeile gleich Null. Berücksichtigt man noch die Gleichung (6), so erkennt man, daß die q_l unbestimmt werden. Also werden die vier Lote b_k von unendlich vielen Geraden q geschnitten.

Die hyperboloidische Lage der b_k läßt sich auch folgendermaßen nachweisen: Man bestimmt die Gleichung des Hyperboloides, welches von den Treffgeraden der drei Lote b_1, b_2, b_3 erzeugt wird, und findet, daß die Gerade b_4 auf ihm liegt. Vgl. J. Neuberg, *Über drei Sätze von Dr. P. Zeemann Gz.* dieses Archiv (3) **11**, 1907, 225—238, besonders S. 231/2.

Bayreuth. O. Degel.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn J. v. Sz. Nagy (Csikszereda, Ungarn) eingelaufen.

Zu **353** (Bd. XVII, S. 365) (R. Mehmke). — Die von Herrn W. Blaschke in Aufgabe 323 (Bd. XVI, 358) mitgeteilte Konstruktion läßt sich verallgemeinern, wie folgt. Seien wie in jener Aufgabe p und q zwei Punkte, die unabhängig von einander zwei gewundene Kurven C_p und C_q durchlaufen. Ein veränderlicher Punkt x habe die Abstände r_1 und r_2 von p und q. Die Fläche, die x beschreibt, wenn — bei ruhenden p und q — irgend eine bilineare Funktion $f(r_1, r_2)$ von r_1 und r_2 konstant bleibt, heiße φ. Die Gesamtheit der Flächen φ, die zu den verschiedenen Lagen von p und q gehören, möge eine Hüllfläche Φ besitzen. Dann liegt (von Sonderfällen abgesehen) jeder Berührungspunkt von φ mit Φ gleichzeitig in der Normalebene der Kurve C_p in p und in der Normalebene der Kurve C_q in q.

Lösung. Es sei $p \equiv (x_p, y_p, z_p)$, $q \equiv (x_q, y_q, z_q)$, $x \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, dann ist

$$r_1 = \sqrt{(\xi - x_p)^2 + (\eta - y_p)^2 + (\zeta - z_p)^2},\quad r_2 = \sqrt{(\xi - x_q)^2 + (\eta - y_q)^2 + (\zeta - z_q)^2}; \tag{1}$$

es bestehe dann zwischen r_1 und r_2 die Relation

$$f(r_1, r_2) = \text{const.} \tag{2}$$

Ist s der Parameter von C_p, t derjenige von C_q, so ist (2) von zwei Parametern abhängig und stellt daher ein System von Flächen φ vor, deren Enveloppe Φ

Digitized by Google

sein soll. Der Berührungspunkt von φ mit Φ bestimmt sich aus (2) und $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$; dies gibt

$$\frac{\partial f}{\partial r_1}\frac{dr_1}{ds} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r_2}\frac{dr_2}{dt} = 0. \tag{3}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial r_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial r_2}$ nicht identisch verschwinden können, so erhält man aus (3)

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{ds} = 0 \text{ oder } \frac{1}{r_1}[(\xi - x_p)x_p' + (\eta - y_p)y_p' + (\zeta - z_p)z_p'] = 0, \\ \frac{dr_2}{dt} = 0 \quad \text{„} \quad \frac{1}{r_2}[(\xi - x_q)x_q' + (\eta - y_q)y_q' + (\zeta - z_q)z_q'] = 0; \end{cases} \tag{4}$$

hierbei ist $x_p' = \frac{dx_p}{ds}$, $x_q' = \frac{dx_q}{dt}$, usw. Die Klammern in (4) enthalten aber nichts anderes als die Gleichungen der Normalebenen von C_p in p und von C_q in q, womit die Behauptung erwiesen ist. Gleichzeitig geht aus (3) und (4) hervor, daß dies für solche Punkte von Φ nicht zutrifft, für welche eine der Größen $\frac{\partial f}{\partial r_1}$, $\frac{\partial f}{\partial r_2}$, r_1, r_2 verschwindet oder unendlich wird; dagegen braucht wohl f nicht bilinear in r_1 und r_2 zu sein.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Zu **354** (Bd. XVII, S. 365) (R. Mehmke). — In einem ebenen Polarsystem sei p der Pol einer beliebigen Geraden G. Die Verbindungsgeraden der Ecken a, b, c eines beliebigen Dreiecks mit p mögen G in den Punkten a', b', c' schneiden. Ferner seien a'', b'', c'' die Pole der Seiten bc, ca, ab des Dreiecks. Dann gehen die Geraden $a'a'', b'b'', c'c''$ durch einen und denselben Punkt.

Lösung: Die Grundkurve (Ordnungskurve) des ebenen Polarsystems ist eine Kurve 2. Ordnung. Man bezieht sie auf ein Polardreieck, für welches p eine Ecke und G die gegenüberliegende Seite ist. Indem man den Einheitspunkt in passender Weise wählt, läßt sich die Gleichung der Kurve in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{1}$$

schreiben. $p_1 : p_2 : p_3 = 0 : 0 : 1$ sind die Koordinaten des Punktes p, und $x_3 = 0$ ist die Gleichung der Geraden G.

Nennt man die Koordinaten der Ecken des Dreiecks abc bzw. a_i, b_i, c_i, so haben die Punkte a', b', c' bzw. die Koordinaten

$$a_1' : a_2' : a_3' = a_1 : a_2 : 0;$$
$$b_1' : b_2' : b_3' = b_1 : b_2 : 0;$$
$$c' : c_2' : c_3' = c_1 : c_2 : 0.$$

Man bezeichne die Unterdeterminanten der Elemente der Determinante $(a_1 b_2 c_3)$ mit den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben; dann hat die Gerade $A \equiv bc$ die Gleichung

$$A \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0. \tag{2}$$

Digitized by Google

Indem man dies mit

$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0 \tag{3}$$

vergleicht, kommt

$$\varrho a_i'' = A_i. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Als Gleichung der Geraden $A \equiv a'a''$ findet man

$$A \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0; \tag{4}$$

die Koordinaten von A sind

$$A_1 : A_2 : A_3 = a_2 A_3 : -a_1 A_3 : (a_1 A_2 - a_2 A_1).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Koordinaten der Geraden $B \equiv b'b''$ und $C \equiv c'c''$.

Wenn die drei Geraden A, B, C durch einen und denselben Punkt gehen, muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_2 A_3 & a_1 A_3 & a_1 A_2 - a_2 A_1 \\ b_2 B_3 & b_1 B_3 & b_1 B_2 - b_2 B_1 \\ c_2 C_3 & c_1 C_3 & c_1 B_2 - c_2 C_1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

verschwinden. Addiert man die Elemente der ersten und zweiten Zeile zu denen der dritten, so werden die Elemente dieser Zeile gleich Null; also verschwindet die Determinante.

Bayreuth. O. Degel.

Zu **355** (Bd. XVII, S. 365) (R. Mehmke). — Gegeben n beliebige (gewöhnliche) krumme Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Von jeder werde nur ein solches Stück betrachtet, das eine einzige Tangentialebene parallel einer (innerhalb gewisser Grenzen) beweglichen Ebene ε zuläßt, und es bezeichne α_i den Berührungspunkt der $i$ten Fläche mit der betreffenden Tangentialebene, u_i ihren Abstand von der Ebene ε. Bewegt sich ε so, daß irgend eine Funktion $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ der Abstände u_i konstant bleibt, und heißt Φ die entsprechende Hüllfläche, so findet man den Berührungspunkt von ε mit Φ, indem man den Schwerpunkt der mit den Gewichten $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ versehenen Punkte a_i rechtwinklig auf ε projiziert.

Lösung. Es sei $a_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, dann soll der Punkt

$$\xi = \frac{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i} x_i}{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i}}, \quad \eta = \frac{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i} y_i}{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i}}, \quad \zeta = \frac{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i} z_i}{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

als Schwerpunkt der Punkte a_i gelten. Die Ebene ε habe die Gleichung

$$\varepsilon \equiv \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - \delta = 0, \tag{2}$$

dann gilt für die Abstände u_i:

$$u_i = \cos\alpha \cdot x_i + \cos\beta \cdot y_i + \cos\gamma \cdot z_i - \delta, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

Digitized by Google

und in (2) sind α, β, γ durch die bekannte Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0 \tag{4}$$

verbunden, alle vier Parameter α, β, γ, δ aber durch die Gleichung

$$F(u_1, u_2, .., u_n) = \text{const.} \tag{5}$$

Der Berührungspunkt von ε mit der Enveloppe Φ bestimmt sich dann aus (2) und $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = 0$, wenn man α und β als unabhängige Parameter wählt; dies liefert die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\alpha \cdot x + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \cdot z + \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = 0 \quad \text{„} \quad \sin\beta \cdot y + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cdot z + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

wo $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}$ durch (4) bestimmt sind. Aus (5) ergibt sich durch Differentiation nach α und β mit Berücksichtigung von (3):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i}\left(\sin\alpha \cdot x_i + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \cdot z_i + \frac{\partial \delta}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i}\left(\sin\beta \cdot y_i + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cdot z_i + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}\right) = 0,$$

und daraus

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = -\frac{\sin\alpha \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} x_i + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} z_i}{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i}} = -\sin\alpha \cdot \xi - \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \cdot \zeta \\ \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = -\frac{\sin\beta \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} y_i + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} z_i}{\sum \frac{\partial F}{\partial u_i}} = -\sin\beta \cdot \eta - \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cdot \zeta. \end{cases} \tag{7}$$

Führt man die Werte (7) in (6) ein, so kommt:

$$\sin\alpha \cdot (x - \xi) + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \cdot (z - \zeta) = 0, \quad \sin\beta \cdot (y - \eta) + \sin\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \cdot (z - \zeta) = 0, \tag{8}$$

wegen (4) gilt aber:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\cos\gamma \sin\gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = -\frac{\cos\beta \sin\beta}{\cos\gamma \sin\gamma},$$

und damit geht (8) über in

$$\cos\gamma (x - \xi) - \cos\alpha (z - \zeta) = 0, \quad \cos\gamma (y - \eta) - \cos\beta (z - \zeta) = 0. \tag{9}$$

Nun sind aber (9) die Gleichungen des Lotes durch den Punkt (ξ, η, ζ) zur Ebene ε, womit die Behauptung erwiesen ist.

Die Grenzen für die Beweglichkeit von ε lassen sich folgendermaßen näher

Digitized by Google

angeben. Es seien die Flächen φ_i durch die Gleichungen $\varphi_i \equiv \varphi_i(x, y, z) = 0$ gegeben, dann sollen die Tangentialebenen in a_i mit den Gleichungen

$$(x - x_i)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + (y - y_i)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} + (z - z_i)\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

zu ε parallel sein. Die Ebene ε, bzw. die Winkel α und β sind daher in solchen Grenzen beweglich, daß das System der $3n$ Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} : \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \quad \varphi_i(x, y, z) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

ein eindeutiges, reelles System von Wurzeln x_i, y_i, z_i zuläßt.

Beispiel. Die Flächen φ_i seien drei Kugeln, durch deren Mittelpunkte die xy-Ebene gelegt wird, so daß ihnen die Gleichungen

(I) $$\varphi_i \equiv (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 + z^2 - r_i^2 = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

zukommen, und die Funktion F werde als Summe der Abstände u_i gewählt, also

(II) $$F(u_1, u_2, u_3) \equiv u_1 + u_2 + u_3 = 3k.$$

Für die Berührungspunkte a_i erhält man aus den drei Gleichungen (I) und den sechs weiteren

$$(x - p_i) : (y - q_i) : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \qquad i = 1, 2, 3$$

die eindeutigen Koordinatenwerte

(III) $$x_i = p_i + r_i\cos\alpha, \quad y_i = q_i + r_i\cos\beta, \quad z_i = r_i\cos\gamma, \qquad i = 1, 2, 3,$$

wenn man sich auf den Halbraum mit positiven z beschränkt. Damit wird

$$u_i = \cos\alpha \cdot p_i + \cos\beta \cdot q_i + r_i - \delta, \qquad i = 1, 2, 3,$$

und aus (II) folgt

(IV) $$\delta = \cos\alpha \cdot X + \cos\beta \cdot Y + \varrho - k,$$

wobei

$$X = \frac{\Sigma p_i}{3}, \quad Y = \frac{\Sigma q_i}{3}, \quad Z = 0, \quad \varrho = \frac{\Sigma r_i}{3}, \qquad i = 1, 2, 3$$

ist, so daß (X, Y, Z) hier der geometrische Schwerpunkt der Kugelmittelpunkte ist.[1]) Um die Gleichung von Φ zu erhalten, hat man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus (2), (4), (9) und (IV) zu eliminieren, dies gibt

$$\cos\alpha = \pm\frac{(\varrho - k)(x - X)}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{(\varrho - k)(y - Y)}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{(\varrho - k)z}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2}}$$

1) Der Punkt (ξ, η, ζ) wird hier der geometrische Schwerpunkt von a_1, a_2, a_3; man erhält

$$\xi = X + \varrho\cos\alpha, \quad \eta = Y + \varrho\cos\beta, \quad \zeta = \varrho\cos\gamma$$

und erkennt durch Einsetzen in (9), daß die Lote durch (ξ, η, ζ) zu ε alle durch (X, Y, Z) hindurchgehen.

Digitized by Google

und daher die Gleichung von Φ in der Form

$$\Phi \equiv (x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2 - (\varrho - k)^2 = 0.$$

Die Hüllfläche Φ ist also eine Kugel um den Schwerpunkt der drei Mittelpunkte, die sich auf den Schwerpunkt selbst zusammenzieht, wenn die Summe der Abstände der Summe der Kugelradien gleich ist. Dies gibt den Satz:

Legt man durch den geometrischen Schwerpunkt der Mittelpunkte dreier Kugeln eine Ebene und dazu parallel die Tangentialebenen an die Halbkugelflächen auf einer Seite der Mittelpunktsebene, so ist die algebraische Summe der Entfernungen der Tangentialebenen von jener Ebene konstant und gleich der Summe der Kugelradien.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Zu **356** (Bd. XVII, S. 366) (R. Mehmke). — Die Polare einer beliebigen Geraden G in einem räumlichen Polarsystem sei H. Die Verbindungsebenen der Ecken a, b, c, d eines beliebigen Tetraeders mit G mögen H in den Punkten a', b', c', d' schneiden. Ferner seien a'', b'', c'', d'' die Pole der Seitenflächen bcd, cda, dab, abc des Tetraeders. Dann liegen die vier Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ hyperboloidisch.

Lösung: Die Grundfläche (Ordnungsfläche) des räumlichen Polarsystems ist eine Fläche 2. Ordnung. Man bezieht sie auf ein Polartetraeder, für welches G und H zwei gegenüberliegende Kanten sind. Indem man den Einheitspunkt in passender Weise wählt, läßt sich die Gleichung der Fläche in der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \tag{1}$$

schreiben. $x_1 = x_2 = 0$ sind die Gleichungen der Geraden G und $x_3 = x_4 = 0$ die der Geraden H.

Nennt man die Koordinaten der Ecken des Tetraeders $abcd$ bzw. a_k, b_k, c_k, d_k, so haben die Punkte a', b', c', d' bzw. die Koordinaten

$$a_1' : a_2' : a_3' : a_4' = a_1 : a_2 : 0 : 0;$$
$$b_1' : b_2' : b_3' : b_4' = b_1 : b_2 : 0 : 0;$$
$$c_1' : c_2' : c_3' : c_4' = c_1 : c_2 : 0 : 0;$$
$$d_1' : d_2' : d_3' : d_4' = d_1 : d_2 : 0 : 0.$$

Man bezeichne die Unterdeterminanten der Elemente der Determinante $(a_1 b_2 c_3 d_4)$ mit den entsprechenden kleinen griechischen Buchstaben; dann hat die Ebene $\alpha \equiv bcd$ die Gleichung

$$\alpha \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0. \tag{2}$$

Indem man dies mit

$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4 = 0 \tag{3}$$

vergleicht, kommt

$$\varrho a_k'' = \alpha_k. \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Digitized by Google

Die Gerade $\bar{A} \equiv a'a''$ hat die Linienkoordinaten

$$\bar{A}_1 : \bar{A}_2 : \bar{A}_3 : \bar{A}_4 : \bar{A}_5 : \bar{A}_6 = a_2\alpha_3 : -a_1\alpha_3 : (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) : a_1\alpha_4 : a_2\alpha_4 : 0;$$

zwischen ihnen besteht die identische Beziehung

$$\bar{A}_1\bar{A}_4 + \bar{A}_2\bar{A}_5 + A_3\bar{A}_6 = 0. \tag{4}$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Linienkoordinaten der Geraden $\bar{B} \equiv b'b''$, $\bar{C} \equiv c'c''$, $\bar{D} \equiv d'd''$. (Vgl. E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik*, 2. Aufl., Leipzig 1910, B. G. Teubner, II 1, S. 149.)

Wenn die vier Geraden $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ hyperboloidisch liegen, müssen sie von unendlich vielen Geraden Q geschnitten werden. Eine die Gerade $\bar{A}$ schneidende Gerade Q möge die Linienkoordinaten $Q_l (l = 1, 2, \ldots, 6)$ haben; außer der Bedingung für das Schneiden

$$\bar{A}_1 Q_4 + \bar{A}_2 Q_5 + \bar{A}_3 Q_6 + \bar{A}_4 Q_1 + \bar{A}_5 Q_2 + \bar{A}_6 Q_3 = 0 \tag{5}$$

gilt noch die identische Beziehung

$$Q_1 Q_4 + Q_2 Q_5 + Q_3 Q_6 = 0. \tag{6}$$

Setzt man die Werte der $\bar{A}_l$ in (5) ein, so ergibt sich

$$a_2\alpha_3 Q_4 - a_1\alpha_3 Q_5 + (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) Q_6 + a_1\alpha_4 Q_1 + a_2\alpha_4 Q_2 = 0. \tag{7}$$

Dazu kommen drei entsprechend gebildete Gleichungen für die Geraden $\bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$.

Die vierreihigen Determinanten der Matrix

$$| a_2\alpha_3,\ a_1\alpha_3,\ a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1,\ a_1\alpha_4,\ a_2\alpha_4 | \tag{8}$$

sind gleich Null. Addiert man nämlich zu den Elementen der vierten Zeile die der anderen Zeilen, so werden die Elemente jener Zeile gleich Null. Unter Berücksichtigung von (6) erkennt man, daß die Q_l unbestimmt werden. Es gibt also unendlich viele Gerade Q, welche die vier Geraden $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ schneiden.

Bayreuth. O. Degel.

Zu **354—357** (Bd. XVII, S. 365—366) (R. Mehmke). — Die Koordinatenmethode scheint sich zum Auffinden und Beweisen von Sätzen, wie die Aufgaben Nr. 354, 356 und 357 sie enthalten, nicht sehr zu eignen; sie gewährt keinen tieferen Einblick, und die Rechnungen werden nicht einfach genug. Deshalb sei es mir gestattet, mitzuteilen, wie ich die Sätze gefunden habe. Ich beschränke mich auf den Satz in Nr. 356, der eine Verallgemeinerung eines Satzes von J. Neuberg (dieses Archiv (3) **17**, S. 247, Nr. 329) ist, weil die Beweise der anderen Sätze entsprechend einfacher sind. Verwandte Sätze auch für Gebiete von mehr als drei Dimensionen, ließen sich in Menge bilden.

Ich benütze die Punktrechnung. Der Punkt a' läßt sich durch das Grassmannsche äußere Produkt

$$a' = [Ga \cdot H]$$

darstellen, und wenn P das Symbol ist, das in dem gegebenen Polarsystem eine beliebige Ebene in ihren Pol verwandelt, so hat man

$$a'' = \mathrm{P}[bcd].$$

Digitized by Google

Entsprechende Ausdrücke bestehen für die Punkte b', c', d' und b'', c'', d''. Ich bilde nun die Liniensumme

$$S = [a'a''] + [b'b''] + [c'c''] + [d'd''].$$

Sie ist, wie man sieht, eine homogene lineare Funktion eines jeden der vier Punkte $abcd$, und sie verschwindet, wie man sich leicht überzeugt, wenn irgend zwei dieser Punkte zusammenfallen. Für $a = b$ z. B. wird $a' = b'$ und $a'' = -b''$, sodaß die beiden ersten Glieder von S einander aufheben, während c'' und d'' und damit die letzten beiden Glieder einzeln verschwinden. Deshalb ist nach einem Satz der Punktrechnung S eine Invariante, d. h. wenn man die Punkte $abcd$ durch vier beliebige andere Punkte des Raums ersetzt, natürlich indem man wieder dasselbe Polarsystem zugrunde legt, so bleibt S unverändert, von einem etwaigen Zahlfaktor abgesehen. Folglich darf man, um S zu ermitteln, jenen Punkten irgend eine zweckmäßige besondere Lage geben. Nimmt man die Punkte a und b auf G an, so verschwinden a' und b' (weil $[Ga]$ und $[Gb]$ dann Null sind), also auch die ersten beiden Glieder von S. Wählt man überdies die Punkte c und d auf H so, daß sie in dem Polarsystem konjugiert sind, dann fallen (wie geometrisch klar ist) c' und c'' beide zusammen, nämlich mit c, und ebenso d' und d'' mit d, also verschwinden auch die letzten beiden Glieder von S. Demnach ist S identisch Null. Wenn aber vier Geraden die Summe Null geben (überhaupt linear abhängig sind), so liegen sie hyperbolisch.

Ersetzt man das Polarsystem durch eine beliebige Korrelation (reziproke lineare Verwandtschaft), so ist S nicht mehr identisch Null, sondern eine wirkliche Liniengröße, die nach dem Obigen von der Wahl der Punkte a, b, c und d nicht abhängt. Sie liefert einen linearen Strahlenkomplex, der eine Invariante oder „Komitante" jener Korrelation ist. Unser Satz nimmt damit die allgemeinere Form an: Die durch die vier Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ bestimmte lineare Strahlenkongruenz ist nullinvariant für einen festen, d. h. von der Lage der Punkte a, b, c, d unabhängigen linearen Strahlenkomplex. (Wegen der von Herrn Jolles herrührenden Bezeichnung „nullinvariant" vgl. Th. Reye, Geometrie der Lage, II, 4. Aufl. 1907, S. 144. Nach einer von Reye in der 3. Auflage seiner Vorträge benützten Ausdrucksweise könnte man auch sagen: Die fragliche lineare Strahlenkongruenz stützt sich auf einen festen linearen Strahlenkomplex.) Statt der oben mittels der festen Geraden G und H konstruierten Punkte a', b', c', d' könnte man in diesem allgemeinen Fall auch die Punkte nehmen, die den Punkten a, b, c, d in irgend einer Kollineation zugeordnet sind, denn die Invarianteneigenschaft der Liniensumme S bliebe bestehen. Im Grunde hat man es mit lauter Verallgemeinerungen des bekannten Satzes zu tun, daß die Höhen eines beliebigen Tetraeders hyperbolisch liegen.

Degerloch. R. Mehmke.

Zu **358** (Bd. XVIII, S. 96) (J. Neuberg). — Man projiziert irgend einen Punkt M einer Ellipse auf die Hauptachse OA in P; der Punkt P wird in Q auf die Gerade OM projiziert. Man bestimme den Flächeninhalt der Kurve (Q).

Lösung: Die Gleichung der Kurve (Q) läßt sich in Polarkoordinaten sehr leicht angeben. Bezeichnet r den Radiusvektor der Ellipse, ϱ den Radiusvektor von (Q), φ den Winkel des Radiusvektors mit der positiven Richtung der x-Achse,

Digitized by Google

ergibt sich sofort die Beziehung $\varrho = r\cos^2\varphi$. Da nun die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten auf die Form $r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$ gebracht werden kann, wo a und b die Längen der halben Achsen der Ellipse bedeuten, so hat die Kurve (Q) in Polarkoordinaten die Gleichung

$$\varrho^2 = \frac{a^2b^2\cos^4\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$$

Die Kurve ist von der sechsten Ordnung. Sie hat den Flächeninhalt

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2b^2\cos^4\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\infty} \frac{a^2b^2}{(x^2+1)^2(b^2+a^2x^2)}\,dx,$$

wobei $\operatorname{tg}\varphi = x$ gesetzt ist. Auf der rechten Seite erhält man durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{a^2b^2}{(x^2+1)^2(a^2x^2+b^2)} = \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\cdot\left[\frac{a^4}{a^2x^2+b^2} - \frac{a^2-b^2}{(x^2+1)^2} - \frac{a^2}{x^2+1}\right],$$

sodaß sich für den Inhalt ergibt

$$J = \frac{2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\cdot\left[a^4\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2x^2+b^2} - (a^2-b^2)\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} - a^2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}\right].$$

Die Integrale haben der Reihe nach die Werte $\frac{\pi}{2ab}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$; mithin wird $J = \frac{a^2b(2a+b)\pi}{2(a+b)^2}$. Für $a = b = r$ wird $J = \frac{3}{8}\pi r^2$.

Berlin. A. Baruch.

Lösungen auch von den Herren C. Hoffmann (Schorndorf), cand. H. Filzer (Stuttgart), cand. O. Elsner (Würzburg), stud. W. Wenk (Berlin), W. Stegemann und W. Gaedecke. Herr Filzer bemerkt in einem Zusatz, daß die Umhüllungskurve des Lotes PQ eine schiefe Astroide darstellt, deren Gleichung in Linienkoordinaten lautet: $b^2u^2 + a^2v^2 = \alpha^2\beta^2u^4$.

Zu **365** (Bd. XVIII, S. 97) (L. Braude). — Welche Kurve ist ihren sämtlichen Parallelkurven kongruent?

Antwort. Die Gerade, deren Parallelkurven alle wieder Gerade sind, und nur die Gerade. Denn weil die Parallelkurven mit der Grundkurve die Evolute gemeinsam haben, so hat die Grundkurve stets andere Krümmungsradien wie irgend ein Zweig ihrer Parallelkurven, es sei denn, daß beide Krümmungsradien unendlich groß würden.

Schorndorf (Württemberg). C. Hoffmann.

Eine Lösung ist auch von cand. math. B. Wiedemann (München) eingetroffen.

Digitized by Google

2. Kleinere Notizen.

Ein überraschendes Zahlenspiel.

A. sagt zu *B.*, der, fern von ihm, abgewandt sitzt: Schreiben Sie eine mehrzifferige Zahl auf (nicht zu viele Ziffern), worin die erste und die letzte Ziffer *ungleich* sind.

B. Ist geschehen.

A. Ich wünsche weiter nichts zu wissen, als: Wie spricht man die vorderste Ziffer *in dieser Zahl* aus?

B. 6 *Tausend.*

A. Gut. Nun setzen Sie dieselbe Zahl darunter, aber mit Vertauschen der ersten und letzten Ziffer; also die 6 kommt an das Ende.

B. Ist geschehen.

A. Jetzt ziehen Sie von der größeren Zahl die kleinere vierstellige Zahl ab. Wenn das Abziehen an vorderster Stelle *Null* ergibt, so ist *die Null hinzuschreiben,* damit die beiden Zahlen gleichviele Ziffern behalten.

B. Ist gemacht.

A. Endlich schreiben Sie den gefundenen Rest noch einmal darunter, wieder mit Vertauschen seiner ersten und letzten Ziffer, und zählen die beiden vierstelligen Zahlen zusammen.

B. Fertig.

A. **Es kommt heraus** 10 989.

B. Das ist ja wahre Zauberei!

Immer kommt vorn 1 0, hinten 8 9, dazwischen lauter Neunen, drei Neunen weniger als die *Anzahl der Ziffern* der angenommenen Zahl. Aber zweizifferige Zahlen liefern 99.

Halensee-Berlin. H. Martus.

---

3. Sprechsaal.

Zur Besprechung meiner Schrift über die Zentrifugalkraft.

(Archiv (3) **18**, 69—77.)

Herr P. Johannesson hat meine Schrift über die Zentrifugalkraft einer eingehenden Besprechung unterzogen, für die ich ihm dankbar bin, da sie gewisse prinzipielle Fragen bezüglich der Grundgesetze der Mechanik der allgemeinen Erörterung näher rückt. Auf die Differenzen zwischen seiner Auffassung und der meinigen glaube ich an dieser Stelle nicht eingehen zu sollen, doch lege ich Wert darauf, einen Punkt richtig zu stellen, an dem Herr J. (S. 73) meine Darstellung des unelastischen Stoßes entscheidend widerlegt zu haben meint.

Bewegt sich eine Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 hinter einer andern m_2 mit der Geschwindigkeit v_2, und ist $v_1 > v_2$, so erfährt im Augenblick des Zusammenstoßes die erste Masse eine Hemmung, die zweite einen als Bewegungsantrieb wirkenden Druck, und es ist nach meiner Darstellung, da es sich beidemal um denselben Druck handelt, $m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_2 \frac{dv_2}{dt}$.

Wie leicht ersichtlich, sind durch diese Gleichung die beiden Größen ihrem absoluten Werte nach einander gleichgesetzt, und hierauf kam es an der be-

Digitized by Google

treffenden Stelle an. Berücksichtigt man, daß in einem Falle eine Abnahme der Geschwindigkeit, im andern eine Zunahme stattfindet, so muß algebraisch betrachtet die Gleichung natürlich lauten: $-m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_2 \frac{dv_2}{dt}$, woraus durch Integration die Stoßgleichung in bekannter Form folgt. Man kann mir also wohl eine Unexaktheit im Ausdruck vorwerfen, aber nicht die ganze Herleitung als irrig erweisen. Ich stelle auch in Abrede, daß durch die von Herrn J. vorgenommene Korrektur das Gesetz der Aktion und Reaktion wieder zu Recht eingesetzt ist. Die Zeichenänderung bedeutet nicht eine Umkehrung der Kraftrichtung, sondern ist nur durch das negative Vorzeichen der Geschwindigkeitsänderung bedingt; stößt ein bewegter Körper gegen einen Widerstand, so ist stets der Druck positiv, wenn die Geschwindigkeitsänderung negativ ist.

Ich möchte überdies bemerken, daß diese ganze Betrachtung nur ein Durchgangsmoment in meinen Studien zur Stoßtheorie bedeutet. Als das wichtigste Ergebnis meiner Untersuchung betrachte ich den Nachweis, daß die Geschwindigkeiten der beiden zusammenstoßenden Massen sich stets zerlegen lassen in je zwei Summanden, von denen das eine Paar beiden Massen gemeinsam ist und demgemäß erhalten bleibt, das andere dagegen gemäß der Gleichung $m_1 v_1 = -m_2 v_2$ die Aufhebung der entsprechenden Bewegungsgrößen zur Folge hat. Dies Resultat ist auch dem Gegenargument der Relativität aller Bewegung nicht ausgesetzt, da bei Hinzufügung einer beliebigen, beiden Körpern gemeinsamen Geschwindigkeit nur das erste Summandenpaar sich ändert.

Ich kann mir zum Schluß noch folgende allgemeine Bemerkung nicht versagen. Meine Schrift ist ihrem ganzen Gedankengange nach so wenig formalistisch, daß sie vielmehr den Formalismus — und Scholastizismus — bei jeder Gelegenheit bekämpft. Daß dies einem so scharfsinnigen Rezensenten wie Herr J. verborgen bleiben konnte, ist vielleicht der schwerste Vorwurf, der sich gegen meine Schrift erheben läßt — wenn nicht der Mangel an logischer Billigkeit, den Herr J. betont, einen noch schwereren bedeutete. Das Urteil hierüber muß ich den Lesern der Schrift überlassen.

Berlin. F. Poske.

Berichtigungen zu den Funktionentafeln von Jahnke-Emde.[1])

Auf S. 3 ist den Wurzeln von $\mathfrak{Cof}\, x \cos x = +1$ hinzuzufügen $x = 0$.

Cl. Schaefer.

Auf S. 127 ist in der Tafel für die $K_0(x)$ und $K_1(x)$ die vierte Dezimale vielfach abzuändern auf Grund der siebenstelligen Tafel, die neuerdings J. R. Airey in den Rep. Brit. Assoc. 1911 mitgeteilt hat. E. Jahnke.

Auf S. 140 der F. T. muß es unten bei $x = 2,4$ + statt — heißen.

F. Emde.

1) Vgl. auch dieses Archiv (3) **15**, 372; **16**, 285; **17**, 286; **18**, 204.

Digitized by Google

4. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Arnoux, G. Essai de géométrie analytique modulaire à deux dimensions. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 6.—.

Berliner, S. Versicherungsrechnung für Nicht-Mathematiker. Leipzig 1911, E. Poeschel. ℳ 4.80.

Berliner Mathematische Gesellschaft. Sitzungsberichte. Zehnter Jahrgang. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 4.50.

Broggi, H. Versicherungsmathematik. Deutsche Ausg. Leipzig 1911, B. G. Teubner. Geh. ℳ 7.—, geb. ℳ 8.—.

Crantz, P. Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. 2. Teil. 2. Aufl. ANUG 205. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome I, volume 4, Fasc. 4. L. von Bortkiewicz und F. Oltramare, Statistique. — G. Bohlmann und H. Poterin du Motel, Technique de l'assurance sur la vie. — V. Pareto, Économie mathématique. Berlin 1911, B G. Teubner; Paris 1911, Gauthier-Villars.

Fenkner, H. Lehrbuch der Geometrie. Ausgabe A. Für Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. — Zweiter Teil: Raumgeometrie nebst einer Aufgaben-Sammlung. 4. Aufl. ℳ 1.80. — Dritter Teil: Ebene und sphärische Trigonometrie nebst einer Aufgaben-Sammlung. 2. Aufl. ℳ 2.—. Berlin 1911, O. Salle.

Haupt, O. Untersuchungen der Oszillationstheorie. Berlin 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.—.

Heussi, J. Leitfaden der Physik. 17. Aufl. bearbeitet von E. Götting. Berlin 1911, O. Salle. ℳ 1.80.

Hinrichs, W. Einführung in die geometrische Optik. Sammlung Göschen 532. Leipzig 1911, Göschen. ℳ 0 80.

Hochheim, A. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I: Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. Vierte Aufl., bearb. von Osw. Jahn und Fr. Hochheim. A. Aufgaben. — B. Auflösungen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. A. ℳ 2.40. — B. ℳ 2.60.

———. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene Heft III: Die Kegelschnitte. Abteilung II. Zweite Aufl., bearb. von Fr. Hochheim. A. Aufgaben. — B. Auflösungen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. A. ℳ 1.80. — B. ℳ 2.40.

Jackson, D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Gekrönte Preisschrift, Göttingen 1911.

Jahnke, E. Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. Band IV. Heft 7 der Abhandlungen über den math. Unterr. in Deutschland veranlaßt durch die IMUK, herausgeg. v. F. Klein. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

Klein, H. J. Mathematische Geographie. 3. Aufl. Leipzig 1911, J. J. Weber. ℳ 2.50.

——. Allgemeinverständliche Astronomie. 10. Aufl. Leipzig 1911, J. J. Weber. ℳ 3.50.

Kohlrausch, Fr. Gesammelte Abhandlungen Herausgegeben von W. Hallwachs, Ad. Heydweiller, K. Strecker u. O. Wiener. Zweiter Band: Elektrolyte. Leipzig 1911, J. A. Barth. ℳ 32.—.

Kommerell, V., und Kommerell, K. Analytische Geometrie. I. Teil. Tübingen 1911, H. Laupp. Geb. ℳ 2.40.

Krause, A. Die Sonne. ANUG 357. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Köhnke, G. H. A., Taschenbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. 15. Aufl. von R. Seifert. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 2.—.

Küster, K. H. Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Sauerstoff. Inaug.-Diss. 1911, Marburg.

Legrand, E., Sommations par une formule d'Euler. Paris 1911, Gauthier-Villars.

Lehmann, H. Die Kinematographie, ihre Grundlagen und ihre Anwendung. ANUG 358. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1 25.

Lesser, O. Die Infinitesimalrechnung im Unterricht der Prima. 2. Aufl. Berlin 1911, O Salle. ℳ 1.80.

Lindt, R. Mißstände im Unterricht und im Prüfungswesen der Hochschulen und ihre Beseitigung. Charlottenburg 1911, G. Heydenreich. ℳ 0.65.

Linnich, M. Lehr- und Übungsbuch f. d. Unterr. i. d. Geom., Trigon. u. Stereom. f. d. höh. Lehrerinnenseminare. Leipzig 1912, G. Freytag. ℳ 3.—.

Lussan, E. Essai de démonstration générale du théoreme de Fermat. Paris 1911, Gauthier-Villars.

Digitized by Google

Mangoldt, H. von. Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Erster Band: Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie. Leipzig 1911, S. Hirzel. ℳ 12.—.

Meyer, W. Fr. Über die Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern über Differentialgeometrie. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Nimführ, R. Die Luftschiffahrt. Für reife Schüler. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 3.—.

Oppenheim, S. Probleme der modernen Astronomie. ANUG 355. Leipzig 1911, B. G. Teubner.

Orlich, E. Die Theorie der Wechselströme. MPS Bd. 12. Herausgeg. v. E. Jahnke. Leipzig 1912, B. G. Teubner.

Prüsmann, R. Neue Auflösungen der Gleichung 5. Grades auf Grund linearer Gravitationen. Berlin 1911, Weidmann. ℳ 2.40.

Prym, F., und Rost, G Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns. Leipzig 1911, Druck von B. G. Teubner.

Ritz, W. Gesammelte Werke. Herausgeg. von der Schweizer Physikalischen Gesellschaft. Paris 1911, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.

Schlotke, J. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil: Spezielle darstellende Geometrie. 7. Aufl. von C. Rodenberg. Leipzig 1911, L. Degener. ℳ 3.80.

Schubotz, Fr. Beiträge zur Kenntnis des Sehraumes auf Grund der Erfahrung. Inaug.-Diss. 1910, Kiel.

Schuster, M. Trigonometrie. Zweite, vermehrte und verbess. Aufl. Herausgeg. von W. Lietzmann. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

Stahl, H. Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung. Nachgelassene Schrift herausgeg. von M. Noether und E. Löffler. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 5.—.

Stolz, O. und Gmeiner, J. A. Theoretische Arithmetik. 1. Abteilung: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. Zweite Aufl. umgearb. von J. A. Gmeiner. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 5.20.

Study, E. Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Erstes Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 4.80.

Thaer, A., Geuther, N., Böttger, A. Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. IMUK Band I. Heft 4. Leipzig 1911, B G. Teubner. ℳ 2.—.

Timerding, H. E., Die Infinitesimalrechnung auf der Schule. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ — 80.

—— Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. IMUK Band III, Heft 5. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.60.

Wieleitner, H. Der Begriff der Zahl. Nr. 2 aus Mathematische Bibliothek her. von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ —.80.

Wiener, F W., Elementare Beiträge zur neueren Funktionentheorie. Inaug.-Diss. Göttingen 1911.

Wirz, J. Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsaß-Lothringen. IMUK Band II Heft 7. Leipzig 1911, B. G. Teubner. ℳ 1.80.

Berichtigungen zum 8. Heft dieses Bandes.

S. 209, Z. 17 v. u. Kimura statt Kimara; Z. 2 v. u. conveyed statt converged.
S. 210, Z. 15 v. u. the statt de; Z. 8 v. u. Suan-shu statt Suan shu; Z. 4 v. u. have statt heve; Z. 3 v. u. our statt one.
S. 211, 212, 213 Tsü statt Tsu und chao statt chas.
S. 212, Z. 14 v. u. silk-worm statt silk-work.
S. 213, Z. 10 v. o. or statt are; Z. 12 v. u. 10^{56} statt 10^{86}.
S. 214, Z. 11 v. o. Bhâskara statt Blâskara.
S. 214, 215, Chiu statt Chin und Ching, und 1247 statt 1427.
S. 216, Z. 2 v. u. shao statt shas.
S. 219, Mei statt Ming.

Digitized by Google

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

ZEHNTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1911.

Digitized by Google

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Haentzschel, E., Zur Berechnung des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)^2}} \quad \ldots\ldots \quad 16—23$$

Jolles, St., Julius Weingarten † . . . . . 8—14
Jonas, H., Über die Komposition der Moutardschen Transformationen 101—108
Knoblauch, J., Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz . . . . . 96—101
Knopp, K., Über die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe. . . . . 2—7
Koppe, M., Beweis des Pohlkeschen Satzes. . . . . 108—109
Lampe, E., Zum Gedächtnis von Dr. Arthur Hamburger. . . . . 70—74
——— Über ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln, Kubikwurzeln usw. aus gegebenen Zahlen. (Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn O. Parlow) . . . . . 76—88
Lichtenstein, L., Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen . . . . . 55—69
Poincaré, H., Sur les courbes tracées sur une surface algébrique. . . 28—55
Salkowski, E., Katenoid und Sonnenuhrkurven. . . . . 23—26
Scheffers, G., Die Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie . . . 88—95
Timerding, H. E., Die Infinitesimalrechnung auf der Schule . . . . 112—133
Glückwunschadresse zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner 110

Mitglieder-Verzeichnis . . . . . 134—138

Zweiundachtzigste Sitzung am 12. Oktober 1910 1
Dreiundachtzigste „ „ 26. Oktober „ 1
Vierundachtzigste „ „ 23. November „ 15
Fünfundachtzigste „ „ 17. Dezember „ 15
Sechsundachtzigste „ „ 25. Januar 1911 25
Siebenundachtzigste „ „ 22. Februar „ 25
Achtundachtzigste „ „ 29. März „ 25
Neunundachtzigste „ „ 26. April „ 75
Neunzigste „ „ 27. Mai „ 75
Einundneunzigste „ „ 28. Juni „ 111

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

86. Sitzung am 25. Januar 1911.

Vorsitzender: Herr Güntsche.

Anwesend: 46 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Über eine besondere Art der Berechnung von Quadratwurzeln, Kubikwurzeln usw.

Herr Lichtenstein: Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen (s. u.).

Herr Franck: Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes.

Antrag des Vorstandes, die Jubelfeier der Firma B. G. Teubner betreffend.

Antrag von Herrn J. Knoblauch, eine Reproduktion eines in Privatbesitz aufgefundenen Portraits von Leonhard Euler in den Sitzungsberichten zu veröffentlichen.

87. Sitzung am 22. Februar 1911.

Vorsitzender: Herr Güntsche.

Anwesend: 37 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Scheffers: Grundaufgaben der senkrechten Axonometrie.

Freie Erörterung wissenschaftlicher Fragen:

Herr Knoblauch: Was sind Scharen von Minimalkurven?

Herr Jahnke: Eine Bemerkung zu dem Vortrag des Herrn Haentzschel betr. das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)^2}}$ vom 23. November 1910.

Mitteilung von Herrn Zühlke zu der geplanten Reproduktion eines Euler-Bildes.

88. Sitzung am 29. März 1911.

Vorsitzender: Herr Güntsche.

Anwesend: 41 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Lampe: Zum Gedächtnis von Dr. Arthur Hamburger (s. u.).

Herr Haentzschel: Das Bilden von kubischen Gleichungen mit vorgeschriebener Eigenschaft der Diskriminante.

Herr Knoblauch: Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz.

Bericht über die Jubelfeier des Hauses B. G. Teubner.

Digitized by Google

Sur les courbes tracées sur une surface algébrique.

Par M. H. Poincaré à Paris.

J'ai publié dans les Annales de l'École Normale Supérieure, un mémoire portant le même titre; je voudrais revenir ici sur quelques points qui dans ce mémoire n'ont pu être traités avec assez de détails.

1. Valeurs critiques. Soit $F(x, y, z, t) = 0$ une surface algébrique d'ordre n dont l'équation est exprimée en coordonnées homogènes; c'est la surface S; nous couperons par le plan variable $\frac{y}{t} = \text{const}$, qui la coupera suivant la courbe K_y. La droite $y = t = 0$ coupera la surface S en n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, qui appartiendront à toutes les courbes K_y. Soit p le genre de la courbe K_y; nous pourrons former p intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe:

$$u_i = \int \frac{P_i\, dx}{Q F'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{1}$$

où F'_z est la dérivée partielle de F par rapport à z, où Q est un polynôme homogène de degré ν en y et t (le même pour toutes les intégrales u_i) et enfin où les P_i sont des polynômes entiers, homogènes de degré $n + \nu - 2$ en x, y, z, t, non homogènes et de degré $n - 3$ en x et z. Le polynôme P_i doit s'annuler en tous les points doubles de la courbe K_y, sauf aux points doubles supplémentaires que cette courbe pourrait acquérir pour certaines valeurs de y pour lesquelles son genre s'abaisserait. En d'autres termes la surface $P_i = 0$ doit passer par la courbe double de la surface S.

L'intégrale doit être prise en faisant varier x et z de telle façon que $F = 0$ et que y et t soient des constantes; la limite inférieure est le point A_1, la limite supérieure est un point variable M de la courbe K_y. L'intégrale u_i est alors une fonction des coordonnées x, y, z, t d'un point variable M de la surface S et cette fonction est déterminée à une période près. Nous nous réserverons quand cela pourra se faire sans inconvénient de renoncer aux coordonnées homogènes en faisant $t = 1$.

Nous appellerons valeurs critiques de la 2$^{\text{de}}$ sorte les valeurs de y $\left(\text{ou de } \frac{y}{t}\right)$ qui annulent le dénominateur Q. Les valeurs critiques de la 1$^{\text{ère}}$ sorte sont celles pour lesquelles on peut trouver p coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_p P_p$$

s'annule identiquement quels que soient x et z.

J'appellerai *valeurs singulières* de y, celles pour lesquelles le genre de la courbe K_y s'abaisse; elles correspondent aux plans $\frac{y}{t} = \text{const}$ qui sont tangents à S ou qui vont passer par un point conique de cette surface.

Pour une valeur de y $\left(\text{ou de } \frac{y}{t}\right)$ qui n'est singulière, ni critique de la 2$^{\text{de}}$ sorte, la fonction u_i (de même que les périodes de l'intégrale u_i) est tou-

Digitized by Google

jours finie. Si la valeur est singulière mais non critique, l'intégrale u_i ne deviendra infinie que si le chemin d'intégration va passer par le nouveau point double. Si la valeur est critique de la 2de sorte, elle est infinie en général pour tous les points M de la courbe K_y.

Supposons qu'une valeur de y soit critique de la 1ère sorte, sans être singulière ni critique de la 2de sorte, la combinaison

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p$$

s'annulera alors pour cette valeur de y, et cela pour tous les points M de la courbe K_y.

Il est aisé de voir ce qui se passe si une valeur est à la fois critique de la 1ère et de la 2de sorte. Soit y_0 une pareille valeur; alors pour $y = y_0 t$ le dénominateur Q de même que $\Sigma \alpha_i P_i$ s'annule identiquement; il en résulte évidemment que les intégrales u_i deviennent en général infinies, mais que la combinaison $\Sigma \alpha_i u_i$ reste finie.

Examinons maintenant le cas d'une valeur singulière qui n'est pas critique. Il se subdivise; nous ne parlerons que des cas particuliers suivants:

1^0 Le plan $\frac{y}{t} =$ const qui correspond à la valeur singulière est un plan tangent ordinaire. Soient alors: ω_{1i}, ω_{2i}, ω_{3i}, ... les périodes de l'intégrale u_i; on pourra supposer que ces périodes ont été choisies de telle sorte que toutes à l'exception de ω_{1i} soient des fonctions holomorphes de y dans le voisinage de la valeur singulière y_0 envisagée, ne s'annulant pas d'ailleurs pour $y = y_0$ (je fais $t = 1$ pour abréger l'écriture). Quant à ω_{1i}, il peut se mettre sous la forme:

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

$\varphi(y)$ étant holomorphe pour $y = y_0$. Une des déterminations de u_i que j'appellerai u_i^* reste holomorphe pour $y = y_0$, et la détermination la plus générale s'écrit

$$u_i = u_i^* + \Sigma m_k \omega_{ki} = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0),$$

les m sont des entiers, $\psi(y)$ est holomorphe pour $y = y_0$. Ainsi cette détermination la plus générale devient logarithmiquement infinie au point $y = y_0$. Elle se change en $u_i + m_1 \omega_{2i}$ quand y tourne autour de la valeur singulière y_0.

2^0 Le plan $\frac{y}{t} =$ const va passer par un point conique de S et ce point conique admet un cône tangent du 2^d ordre, sans autre singularité.

Le résultat est encore le même, on a seulement:

$$\omega_{1i} = \varphi(y) + \frac{2\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad u_i = \psi(y) + \frac{2 m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

de sorte que φ_{1i} et u_i se changent en $\omega_{1i} + 2\omega_{2i}$ et $u_i + 2 m_1 \omega_{2i}$, et non plus en $\omega_{1i} + \omega_{2i}$ et $u_i + m_1 \omega_{2i}$ quand y tourne autour de y_0.

Considérons les points de contact de la courbe K_y avec des tangentes parallèles à une direction donnée; dans les deux cas que nous venons d'examiner, deux de ces points, A et B, se confondent en un seul pour $y = y_0$; mais dans le 1er cas, A et B s'échangent entre eux quand y tourne autour de y_0; dans

Digitized by Google

le 2^{d} cas, A et B reviennent à leurs positions initiales, mais après avoir tourné l'un autour de l'autre.

3^{0} Le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$, passe par un point conique de S, et ce point conique admet un cône tangent du 3^{e} ordre sans autre singularité.

Alors six des points de contact dont nous venons de parler se confondent en un seul pour $y = y_0$; deux des périodes ω_{ki} (à savoir celles que l'on obtient en intégrant le long de contours s'écartant très peu de ces six points de contact) restent des fonctions uniformes de y dans le voisinage de $y = y_0$, mais elles peuvent devenir infinies du 1er ordre pour $y = y_0$; les autres périodes peuvent cesser d'être des fonctions uniformes.

Nous distinguerons trois sortes de périodes; celles dont nous venons de parler et dont les contours s'écartent très peu de nos six points de contact; celles dont les contours restent toujours très éloignés de ces six points; celles dont les contours vont passer très près de ces six points et entre ces points et s'en écartent ensuite beaucoup.

De même nous distinguerons trois sortes d'intégrales; celles où P_i s'annule au point conique; celles où P_i est indépendant de x et de z, celles qui ne satisfont à aucune de ces deux conditions. Si la surface S ne présente d'autre singularité que le point conique, les intégrales de la 3^{e} sorte ne sont que des combinaisons de celles des deux premières.

Cela posé, les périodes de la 2de sorte se comportent régulièrement; nous venons de voir que celles de la 1ère sorte se comportent comme $\frac{1}{y - y_0}$; c'est ce qui arrive pour les intégrales de la 2de ou de la 3^{e} sorte; pour les intégrales de la 1ère sorte, ces périodes restent des fonctions holomorphes de y.

En ce qui concerne les périodes de la 3^{e} sorte, on voit qu'elles se comportent comme $\frac{1}{y - y_0}$ pour les intégrales de la 2de sorte; qu'elles deviennent logarithmiquement infinies pour celles de la 1ère sorte; pour celles de la 3^{e}, leurs deux singularités se trouvent réunies, c'est à dire que le développement comporte des termes en $\frac{1}{y - y_0}$, $(y - y_0)^m$, $L(y - y_0)$, $(y - y_0)^m L(y - y_0)$.

Comment se comportent maintenant les intégrales u_i elles-mêmes; cela dépend si le point M coïncide ou non avec le point conique; dans le second cas une des déterminations que j'appelle u_i se comporte régulièrement; la détermination la plus générale

$$u_i = u_i^* + \Sigma m_k \omega_{ki}$$

se comporte comme les périodes; quand y tourne autour de y_0, u_i augmente d'une période.

Qu'arrive-t-il maintenant si quand y tend vers y_0, le point M se rapproche indéfiniment du point conique? Les intégrales de la 1ère sorte, deviendront logarithmiquement infinies; celles de la 2de sorte se comporteront comme $\frac{1}{y - y_0}$; celles de la 3^{e} sorte présenteront la combinaison des deux singularités.

Revenons encore sur les deux premiers cas, pour expliquer comment se comporte u_i quand le point M tend vers le nouveau point double.

Soit par exemple $x = y = z = 0$ le nouveau point double que la courbe K_y acquiert quand y s'annule. Dans le 1er cas (plan tangent ordinaire) nous

Digitized by Google

supposerons que le point M se rapproche du nouveau point double de telle façon que $\frac{x}{\sqrt{y}}$, $\frac{z}{\sqrt{y}}$ tendent vers des limites finies. Alors u_i sera de la forme:

$$\psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0) \qquad \text{(ici } y_0 = 0\text{)}$$

ψ étant holomorphe et μ étant la moitié d'un entier impair. Dans le second cas (point conique du 2^{d} ordre) nous supposerons que $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{y}$ tendent vers des limites finies et u_i sera encore de même forme, μ désignant cette fois un entier impair.

Ce que nous venons de dire au sujet des valeurs singulières va nous aider à comprendre ce qui concerne les valeurs *critiques apparentes.*

Soit

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{Q F'_z}.$$

Je suppose que P_i soit divisible par y, de telle façon que y soit une valeur critique de la 1ère sorte; je suppose que le point $x = y = z = 0$ soit un point conique du 3^{e} ordre de la surface S de telle sorte que $y = 0$ soit *en même temps* une valeur singulière correspondant au 3^{e} cas envisagé plus haut. De plus P_i est indépendant de x et de z de façon que notre intégrale sera de la 2de sorte. Enfin Q ne s'annule pas pour $y = 0$. Dans ces conditions l'intégrale $\frac{t u_i}{y}$ reste finie pour $y = 0$, si le point M ne coïncide pas avec le point conique, et elle devient infinie comme $\frac{1}{y}$ dans le cas contraire. Donc l'intégrale u_i s'annulera pour $y = 0$ si le point M ne vient pas au point conique, mais elle restera finie dans le cas contraire. La valeur $y = 0$ n'est donc qu'une valeur critique apparente, puisque l'intégrale u_i n'est pas assujettie à s'annuler pour $y = 0$.

Cette difficulté n'est pas à redouter dans les deux autres cas examinés plus haut, qui sont ceux du plan tangent ordinaire et du point conique du 2^{d} ordre. En effet $\frac{t u_i}{y}$ ne devient infinie que logarithmiquement d'où il suit que u_i est nul.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle, on peut changer une surface quelconque en une surface S n'ayant d'autre singularité qu'une courbe double et certains points triples à plans tangents séparés qui sont des points triples de cette courbe double. Nous pourrons donc toujours supposer que la surface S n'a pas de point conique; d'autre part le choix des axes étant arbitraire nous pourrons toujours supposer que la droite $y = t = 0$ ne touche pas la surface et ne se trouve sur aucun plan tangent singulier à cette surface, non plus que sur les plans qui touchent cette surface en deux ou plusieurs points. *Les seules valeurs singulières que nous aurons à envisager correspondront donc à des plans tangents ordinaires.*

Cela posé, nous pouvons encore choisir d'une manière assez arbitraire les intégrales u_i. Si en effet nous posons:

$$(2) \qquad X'_x = \sum_{i=1}^{i=p} \varrho_{ix} \frac{P_i}{Q} \qquad (x = 1, 2, \ldots, p)$$

Digitized by Google

les ϱ_{ix} étant p^2 fonctions rationnelles homogènes de degré zéro en y et t, nous aurons $X'_x = \frac{P'_x}{Q'}$, Q' étant un polynôme homogène de degré ν' en y et t, P'_x un polynôme homogène de degré $n + \nu' - 2$ en x, y, z, t, contenant x et z au plus au degré $n - 3$. En d'autres termes les intégrales

$$u'_x = \int \frac{P'_x dx}{Q' F'_z} = \Sigma \varrho_{ix} u_i$$

pourront jouer le même rôle que les intégrales u_i.

Quelles simplifications pourrons-nous obtenir par l'emploi de la transformation (2)? En premier lieu, nous pouvons prendre $\varrho_{ix} = \frac{Q}{Q'} Q'$ étant un polynôme de même forme et de même degré que Q; alors les ν valeurs critiques de la 2de sorte qui étaient données par $Q = 0$, seront données par $Q' = 0$; le polynôme Q' étant arbitraire, les ν valeurs critiques de la 2de sorte peuvent être choisies arbitrairement, nous pouvons donc toujours supposer qu'elles ne coïncident ni avec les valeurs critiques de la 1ère sorte ni avec les valeurs singulières, et qu'elles sont d'ailleurs toutes distinctes et correspondent à des infinis simples.

En second lieu, nous pouvons supposer que les valeurs critiques de la 1ère sorte ne coïncident pas non plus avec les valeurs singulières. Soit en effet $y = y_0 t$ une valeur singulière, et supposons qu'elle soit également une valeur critique de la 1ère sorte. Ce pourra être une valeur critique d'ordre supérieur. Si par exemple parmi les combinaisons $\Sigma \alpha_i P_i$, il y en a μ_3 qui sont divisibles par $(y - y_0 t)^3$, μ_2 divisibles par $(y - y_0 t)^2$, et enfin μ_1 divisibles par $(y - y_0 t)$, ce sera une valeur critique d'ordre $3\mu_3 + 2\mu_2 + \mu_1$. Il suffira de prendre un cas particulier, supposons donc pour fixer les idées que la seule combinaison qui soit divisible par $(y - y_0 t)^2$ soit $\Sigma \beta_i P_i$, que $\Sigma \gamma_i P_i$ soit divisible par $y - y_0 t$ et que toute combinaison divisible par $y - y_0 t$ soit de la forme $B\Sigma \beta_i P_i - C\Sigma \gamma_i P_i$. Nous poserons alors, par une 1ère transformation:

$$P'_1 = \Sigma \beta_i P_i,\ P'_2 = \Sigma \gamma_i P_i,\ P'_3 = \Sigma \delta_i P_i,\ \ldots\ P'_p = \Sigma \theta_i P_i$$

de telle façon que le déterminant des coefficients constants $\beta, \gamma, \delta, \ldots \theta$, ne soit pas nul. Alors P'_1 sera divisible par $(y - y_0 t)^2$ et P'_2 par $y - y_0 t$. Nous ferons ensuite une 2de transformation en posant:

$$P''_1 = \frac{(y - y_1 t)(y - y_2 t)}{(y - y_0 t)^2} P'_1,\quad P''_2 = \frac{y - y_3 t}{y - y_0 t} P'_2,\quad P''_k = P'_k \qquad (k > 2).$$

Pour les polynômes P'', la valeur critique triple y_0 a disparu pour être remplacée par les trois valeurs critiques simples y_1, y_2, y_3, choisies arbitrairement. Nous pourrons donc toujours supposer que toutes les valeurs critiques sont simples, distinctes entre elles et distinctes des valeurs singulières.

Nous pouvons aussi profiter de la transformation (2) pour faire disparaître toutes les valeurs critiques de la 2de sorte; mais c'est un point que nous ne pourrons démontrer complètement que plus loin et qui exige quelques explications.

Soient

$$y = y_1 t,\quad y = y_2 t,\ \ldots,\ y = y_\mu t$$

les diverses valeurs critiques de la 1ère sorte. Soient

$$\Sigma \alpha_i^1 P_i,\ \Sigma \alpha_i^2 P_i,\ \ldots,\ \Sigma \alpha_i^\mu P_i \qquad (3)$$

Digitized by Google

les combinaisons linéaires des P_i qui s'annulent en ces diverses valeurs critiques. Les combinaisons (3) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de h d'entre elles, h étant au plus égal à p. Si $h = p$, notre théorème est aisé à démontrer; soit en effet $y = y_0 t$ l'une des valeurs critiques de la 2° sorte; nous poserons d'abord, en supposant que les p premières combinaisons (3), sont linéairement indépendantes

$$P_1' = \Sigma \alpha_i^1 P_i, \quad P_2' = \Sigma \alpha_i^2 P_i, \ldots, P_p' = \Sigma \alpha_i^\mu P_i.$$

Alors P_x' étant divisible par $y - y_x t$, nous poserons: $P_x'' = \frac{y - \dot{y}_0 t}{y - y_x t} P_x'$ la valeur critique $y = y_0 t$ aura disparu et nous pourrons ainsi les faire disparaître toutes, les unes après les autres.

Si $h < p$, parmi nos polynômes P_x il y en aura qui ne seront pas des combinaisons linéaires des combinaisons (3). Quand il en sera ainsi, nous dirons quelquefois pour abréger que les intégrales u_x correspondantes n'ont pas de valeur critique de la 1ère sorte. Nous montrerons plus loin que *cette circonstance ne peut pas se présenter tant qu'il existe des valeurs critiques de la 2de sorte;* nous aurons ainsi achevé d'établir la possibilité de faire disparaître toutes les valeurs critiques de la 2de sorte.

2. Les fonctions v_i. Soit C une courbe algébrique tracée sur la surface S; le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ coupera cette courbe en m points mobiles, $M_1, M_2, \ldots, M_m$, soient $u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^m$ les valeurs correspondantes de l'intégrale u_i; je poserai:

$$v_i = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^m; \tag{1}$$

on remarquera que cette notation n'est pas tout à fait la même que celle que j'avais employée dans le mémoire cité des Annales de l'Ecole Normale; j'avais posé:

$$m v_i = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^m;$$

la nouvelle notation est plus commode. Nous verrons alors:

1° que pour une valeur ordinaire de y, v_i est fonction holomorphe de y; elle est fonction holomorphe de $\frac{1}{y}$ pour $y = \infty$;

2° que les fonctions v_i peuvent devenir infinies du 1er ordre pour les valeurs critiques de la 2de sorte (supposées toutes simples);

3° que pour une valeur critique de la 1ère sorte, pour laquelle $\Sigma \alpha_i P_i$ s'annule, on devra avoir $\Sigma \alpha_i v_i = 0$;

4° que pour une valeur singulière, les x_i peuvent devenir logarithmiquement infinies; quand y tourne autour d'une valeur singulière, v_i augmente d'une période. Je précise, supposons que u_i^* soit la détermination de u_i qui reste fonction holomorphe de y, et que l'on envisage la détermination:

$$u_i = u_i^* + \Sigma m_x \omega_{xi}$$

on aura (cf. § précédent)

$$u_i = \psi(y) + \frac{m_1 \omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

et u_i se changera en $u_i + m_1 \omega_{2i}$, et en général v_i en $v_i + \Sigma m_1 \omega_{2i}$, Σm_1 étant la somme des valeurs de m_1 relatives aux diverses intégrales $u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^m$.

Digitized by Google

On voit donc que v_1 par exemple augmente d'une période, pendant que $v_2, v_3, \ldots, v_p$ augmentent de la période *correspondante*.

Il est intéressant de distinguer plusieurs cas. Supposons d'abord que la courbe C ne passe pas par le point de contact; alors toutes les fonction u_i^x seront de la forme (2) et on aura:

$$v_i = \psi(y) + \Sigma m_1 \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

$\psi(y)$ étant holomorphe et Σm_1 étant un entier.

Supposons maintenant que la courbe C passe par le point de contact, elle y touchera alors le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$, de sorte que deux des points M_x (par exemple M_1 et M_2) se confondront avec le point de contact. Alors toutes les intégrales u_i^x seront de la forme (2), à l'exception des intégrales u_i^1 et u_i^2 pour lesquelles on aura:

$$u_i^1 \text{ ou } u_i^2 = \psi(y) + \mu \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

μ étant la moitié d'un entier impair. On aura encore

$$v_i = \psi(y) + K \frac{\omega_{2i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

K étant un entier.

Il peut arriver aussi que la courbe K_y se décompose pour la valeur singulière de y; les résultats précédents subsisteront.

On observera qu'à chaque valeur singulière est attachée une période qui joue un rôle particulier; toutes les périodes sont des fonctions de y qui augmentent d'un multiple de cette période particulière quand y tourne autour de cette valeur singulière. C'est cette période particulière que nous avons désignée plus haut par ω_{2i}. On peut alors préciser la condition 4^0 en disant que quand y tourne autour d'une valeur singulière, toutes les fonctions v_i augmentent d'un multiple de la période particulière qui y est attachée.

Tout système de fonctions v_i satisfaisant aux conditions 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 s'appellera un système de *fonctions normales*. A toute courbe C correspond un système de fonctions normales; mais on peut trouver d'autres systèmes de fonctions normales:

1^0 Les périodes forment un système de fonctions normales.

2^0 Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les points d'intersection de S avec la droite $y = t = 0$; ces points appartiennent à toutes les courbes K_y; si a_i^x est la valeur de l'intégrale u_i au point A_x, les a_i^x forment un système de fonctions normales. En particulier les a_i^1 sont nuls puisque A_1 sert de limite inférieure d'intégration.

3. Formation des Fonctions Normales. Les périodes ω_{xi} satisfont à des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

Nous aurons:

$$\triangle_i(\omega) = 0, \tag{1}$$

$\triangle$ est une expression différentielle qui est la même pour

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \ldots, \omega_{2p,i},$$

Digitized by Google

mais qui dépend de l'indice i. Cette expression est d'ordre $2p$, c'est à dire qu'elle contient des dérivées de ω jusqu'à l'ordre $2p$ inclusivement. Les coëfficients sont des polynômes entiers en y; le coëfficient du terme d'ordre le plus élevé ne peut s'annuler que pour les valeurs singulières; de plus une seule des périodes cessant d'être holomorphe en chaque valeur singulière (à savoir celle que nous avons désignée par ω_{1i} au § 1), chacune de ces valeurs est une racine simple de sorte que le coëfficient de $\frac{d^{2p}\omega}{dy^{2p}}$ s'écrira:

$$(y - a_1)(y - a_2) \dots (y - a_h)$$

$a_1, a_2, \dots, a_h$ étant les différentes valeurs singulières. C'est donc un polynôme de degré h, h étant le nombre des valeurs singulières. De plus, les intégrales de l'équation (1) devant se comporter régulièrement pour $y = \infty$, les degrés des coëfficients de cette équation devront aller en décroissant, de telle façon que le coëfficient de $\frac{d^x\omega}{dy^x}$ soit de degré $h - 2p + k$, et le coëfficient de ω de degré $h - 2p - 1$ (et non pas $h - 2p$).

Nous avons p équations (1) puisque l'indice i peut prendre p valeurs différentes; mais ces équations sont étroitement apparentées; on passera par exemple de l'équation $\Delta_1(\omega) = 0$ à l'équation $\Delta_i(\omega) = 0$ par une transformation simple; si l'on pose:

$$\omega^* = R_0\omega + R_1\frac{d\omega}{dy} + R_2\frac{d^2\omega}{dy^2} + \dots + R^{2p-1}\frac{d^{2p-1}\omega}{dy^{2p-1}},$$

les R étant des fonctions rationnelles de y convenablement choisies, et que ω satisfasse à $\Delta_i(\omega) = 0$, ω^* satisfera à $\Delta_i(\omega^*) = 0$. L'équation de (1) est ce qu'on appelle l'équation de *Picard*.

Cela posé, considérons dans le plan des y les diverses valeurs singulières a_x; joignons-les à l'infini par des coupures Q_x ne se recoupant pas mutuellement. A chacune de ces valeurs sera attachée une période jouant un rôle particulier (celle qui avait été désignée par ω_{2i} au § 1). Cette période sera respectivement désignée pour les intégrales $u_1, u_2, \dots, u_p$ par $\varpi_{x1}, \varpi_{x2}, \dots, \varpi_{xp}$.

Il s'agit de construire un système de fonctions normales v_i; je dois donc supposer que les fonctions v_i restent uniformes tant qu'on ne franchit pas les coupures, et que quand on franchit la coupure Q_x dans le sens direct, v_i se change en

$$v_i + \lambda_x\varpi_{xi}$$

λ_x étant un entier qui dépend de x mais non de i. Soient alors $b_1, b_2, \dots, b_\nu$ les valeurs critiques de la 2de sorte. Nous satisferons aux conditions en posant:

$$(2) \qquad v_i = \sum \frac{\lambda_x}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{Q_x} \frac{\varpi'_{xi}\,dY}{Y - y} + \sum \frac{A_{ji}}{y - b_j} + C_i.$$

Y est la variable par rapport à laquelle on intègre; ϖ'_{xi} est ce que devient ϖ_{xi} quand on y remplace y par Y; les A et C sont des coëfficients arbitraires. On voit que l'expression (2) satisfait aux conditions énoncées; comme ϖ'_{xi} est une fonction holomorphe de Y pour $Y = a_x$, c'est à dire à l'extrémité de la coupure Q_x (rappelons en effet ce que nous avons dit de ω_{2i} au § 1); v_i deviendra logarithmiquement infinie pour $y = a_x$; elle sera infinie du 1er ordre

Digitized by Google

aux valeurs critiques de 2de sorte et se comportera régulièrement pour toutes les autres valeurs.

Il reste à voir ce qui se passe pour $y = \infty$. Remarquons que les entiers λ ne peuvent pas être choisis arbitrairement; il faut que, quand on décrit un cercle de rayon très grand en franchissant toutes les coupures, v_i revienne à sa valeur primitive. Si les périodes de u_i sont $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \ldots, \omega_{2p \cdot i}$, on aura:

$$\varpi_{xi} = \Sigma \mu_{xj} \omega_{ji}$$

les μ_{xj} étant des entiers. De plus ω_{ji} se changera en $\omega_{ji} + \nu_{xj} \varpi_{xj}$ quand on franchira la coupure Q_x dans le sens direct les ν_{xj} étant des entiers. Quand on franchira successivement dans le sens direct les coupures $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ ces coupures se succédant dans l'ordre où les rencontre un cercle de rayon très grand, v_i se changera en

$$v_i + \Sigma \varrho_{1 \cdot j} \omega_{ji}$$

les ϱ étant des entiers qu'il s'agit d'étudier; en premier lieu on aura:

$$\varrho_{1j} = \lambda_1 \mu_{1j}.$$

On aura ensuite:

$$\varrho_{xj} - \varrho_{x-1 \cdot j} = \mu_{xj} (\lambda_x + \Sigma \varrho_{x-1 \cdot i} \nu_{xi});$$

par ces équations, les ϱ dépendent des entiers indéterminés λ et des entiers déterminés μ et ν; ce sont des fonctions linéaires et homogènes des entiers λ. Mais comme v_i doit revenir à sa valeur primitive quand on a franchi les h coupures, on devra avoir:

$$\varrho_{h \cdot 1} = \varrho_{h \cdot 2} = \cdots = \varrho_{h \cdot 2p} = 0. \tag{3}$$

Ce sont $2p$ équations linéaires auxquelles les λ doivent satisfaire.

Si cette condition est remplie, v_i est fonction uniforme de y dans le voisinage de $y = \infty$; de plus cette fonction reste finie; en effet chacun des termes de (2) reste fini sauf les intégrales, et ces intégrales ne peuvent devenir que logarithmiquement infinies, puisque w'_{xi} reste fini pour $Y = \infty$. Les termes logarithmiques qui seuls pourraient devenir infinis doivent se détruire, puisque v_i est uniforme; donc v_i est fini.

Les conditions (3) ne sont pas les seules que nous devions nous imposer. Soient $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ les valeurs critiques de la 1ère sorte, et supposons que pour $y = c_x$ on ait $\Sigma \alpha_{ix} P_i = 0$ les α_{ix} étant des coëfficients constants, on devra avoir pour $y = c_x$

$$\Sigma \alpha_{ix} v_i = 0. \tag{4}$$

Supposons que les λ soient des entiers satisfaisant aux conditions (3), les relations (4) seront des relations entre les A et C.

Si le nombre des valeurs critiques de la 1ère sorte est plus petit que $p(\nu + 1)$, le nombre des relations (4) distinctes sera à fortiori plus petit que $p(\nu + 1)$; (je dis à fortiori parce que les relations (4) peuvent ne pas être toutes distinctes). On peut alors satisfaire à ces conditions d'une infinité de manières, puisque les indéterminées A et C sont au nombre de $p(\nu + 1)$. On obtiendra alors une infinité *continue* de systèmes de fonctions normales, correspondant comme nous le verrons bientôt à une infinité continue de courbes algébriques ne constituant pas un système linéaire.

Digitized by Google

Si en particulier nous égalons tous les λ à zèro, les v_i seront des fonctions uniformes de y, ne pouvant devenir infinis que du 1er ordre aux valeurs critiques de la 2de sorte; elles seront donc rationnelles; nous avons donc une *infinité de systèmes de fonctions normales rationnelles.*

Si le nombre de valeurs critiques de la 1ère sorte est égal à $p(\nu+1)$, les relations (4) seront en général distinctes; le nombre des indéterminées est alors égal à celui des conditions; et nous aurons pour chaque système de valeurs des λ satisfaisant aux conditions (3) un seul système de fonctions normales. Comme nous pouvons faire varier les λ, nous aurons une infinité de systèmes de fonctions normales, mais cette infinité sera discontinue. En particulier, si tous les λ sont nuls, tous les v_i seront nuls.

Il peut se faire ensuite que le nombre des relations (4) étant égal à $p(\nu+1)$, ces relations ne soient pas toutes distinctes. Examinons en particulier le cas où il n'y a pas de valeur critique de la 2de sorte; cas auquel nous verrons plus loin que tous les autres se ramènent. Si les relations (4) ne sont pas toutes distinctes, il existe pour tout système de valeurs des λ une infinité de systèmes de fonctions normales; en faisant la différence de deux quelconques de ces systèmes, on obtiendra des systèmes de fonctions normales pour lesquels tous les λ seront nuls; on aura alors

$$v_i = \sum \frac{A_{ji}}{y - b_j} + C_i;$$

comme il n'y a pas de valeur critique de la 2de sorte, on aura simplement $v_i = C_i$, c'est à dire que nos fonctions normales se réduiront à des constantes. Les relations (4) s'écriront alors $\Sigma \alpha_{ix} C_i = 0$ et elles seront par hypothèse au nombre de p puisque $\nu = 0$. Si elles étaient toutes distinctes, tous les C_i seraient nuls; si elles ne sont pas toutes distinctes, quelques-uns des C_i peuvent être choisies arbitrairement; parmi les C_i, il en existe alors qui ne sont pas des combinaisons linéaires des premiers membres des relations (4); les intégrales u_i correspondantes, pour employer la terminologie de la fin du § 1 n'ont pas de valeurs critiques de la 1ère sorte. Il existe également des intégrales qui n'ont pas de valeurs critiques de la 1ère sorte, si le nombre des relations (4) est plus petit que $p(\nu+1)$. *L'existence d'un système de fonctions normales rationnelles se trouve ainsi rattachée à l'existence d'intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1ère sorte,* au sens de la fin du § 1.

Si enfin le nombre des valeurs critiques de la 1ère sorte est plus grand que $p(\nu+1)$, il sera en général impossible de satisfaire aux relations (4). Les fonctions normales correspondant à des valeurs données des entiers λ, n'existeront pas en général et on ne pourra les former que pour certaines surfaces particulières satisfaisant pour ainsi dire à des conditions arithmétiques.

Considérons maintenant les expressions $\Delta_i(v_i)$; je dis que ce sont des fonctions uniformes de y. En effet quand y décrit un contour fermé quelconque, v_i se change en $v_i + \Omega_i$, Ω_i étant une période de u_i; $\Delta_i(v_i)$ se change en $\Delta_i(v_i) + \Delta_i(\Omega_i)$. Or en vertu de l'équation (1), $\Delta_i(\Omega_i) = 0$; donc $\Delta_i(v_i)$ ne change pas. *C. Q. F. D.*

$\Delta_i(v_i)$ reste fini pour les valeurs ordinaires de y ainsi que pour les valeurs critiques de la 1ère sorte. Dans le voisinage d'une valeur singulière nous avons:

$$v_i = v_i^* + \Sigma m_x \omega_{xi}$$

Digitized by Google

v_i^* étant holomorphe et les m_x étant des entiers. Alors $\Delta_i(v_i^*)$ est holomorphe, $\Delta_i(\omega_{xi})$ est nul en vertu des équations (1); donc $\Delta_i(v_i)$ est holomorphe.

En une valeur critique de la 2^{de} sorte, v_i devient infini d'ordre 1, sa dérivée d'ordre q devient infinie d'ordre $q+1$, et $\Delta_i(v_i)$ devient infini d'ordre $2p+1$.

Pour $y=\infty$, v_i reste fini, sa dérivée d'ordre q devient nulle d'ordre $q+1$; d'autre part dans $\Delta_i(v_i)$ le coëfficient de v_i devient infini d'ordre $h-2p-1$, celui de sa dérivée q^e devient infini d'ordre $h-2p+q$; nous concluons que $\Delta_i(v_i)$ devient infini d'ordre $h-2p-1$.

En résumé $\Delta_i(v_i)$ est une fonction rationnelle de y et l'on peut écrire:

$$\Delta_i(v_i) = \frac{N_i}{Q^{2p+1}} \tag{5}$$

où

$$Q = (y-b_1)(y-b_2)\ldots(y-b_\nu)$$

et où P est un polynôme entier en y d'ordre $h+(2p+1)(\nu-1)$.

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfont les fonctions normales v_i.

4. Introduction des Fonctions Abéliennes. Pour bien faire comprendre la nature du problème que je veux maintenant aborder, je me restreindrai d'abord à un cas particulier, celui où $p=1$ et où par conséquent les fonctions abéliennes que nous aurons à envisager se réduisent aux fonctions elliptiques. Nous n'avons alors qu'une intégrale u_i; et un «système» de fonctions normales se réduit à une seule fonction que j'appellerai v en supprimant l'indice devenu inutile. Nous n'aurons plus que deux périodes ω_1 et ω_2, qui seront des fonctions de y définies par l'équation de Picard

$$\Delta(\omega) = 0 \tag{1}$$

(équation (1) du § précédent) tandis que la fonction normale v satisfera à

$$\Delta(v) = \frac{N}{Q^{2p+1}} \tag{2}$$

(équation (5) du § précédent).

Cela posé, considérons la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass; elle dépend non seulement de l'argument u, mais des deux périodes ω_1 et ω_2; si nous y remplaçons l'argument par la fonction *normale* v définie par l'équation (2) et les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$ définies en fonctions de y par l'équation (1), la fonction de Weierstrass deviendra une fonction de y:

$$\wp(v, \omega_1, \omega_1) = G(y)$$

et c'est cette fonction qu'il s'agit d'étudier.

Quand y tourne autour d'une valeur singulière, les périodes se changent en d'autres périodes, et v augmente d'une période. Dans ces conditions la fonction de Weierstrass ne change pas. *Donc G est une fonction uniforme de y.*

Pour un point ordinaire et si v n'est pas égal à une période: G est évidemment holomorphe, et de même c'est une fonction holomorphe de $\frac{1}{y}$ dans le voisinage de $y=\infty$.

Digitized by Google

Si $y = b$ est une valeur critique de la 2e sorte, nous voyons que v, ω_1 et ω_2 deviennent infinis, mais $v(y-b)$, $\omega_1(y-b)$, $\omega_2(y-b)$ restent holomorphes; donc:

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = (y-b)^2 \wp[v(y-b), \omega_1(y-b), \omega_2(y-b)]$$

est holomorphe pour $y = b$ et même s'annule; rappelons en effet que la fonction de Weierstrass est homogène de degré -2 en v, ω_1, ω_2.

Si $y = c$ est une valeur critique de la 1ère sorte, il arrive que v, ω_1 et ω_2 s'annulent pour $y = c$, mais $\frac{v}{y-c}$, $\frac{\omega_1}{y-c}$, $\frac{\omega_2}{y-c}$ restent finis et comme on a:

$$\wp(v, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(y-c)^2} \wp\left(\frac{v}{y-c}, \frac{\omega_1}{y-c}, \frac{\omega_2}{y-c}\right)$$

G reste une fonction *méromorphe* de y.

Si v était égal à une période, la fonction de Weierstrass ne serait plus une fonction holomorphe de v, ω_1 et ω_2, mais une fonction méromorphe, devenant infinie d'ordre 2.

Donc G restera encore fonction méromorphe de y, que la valeur envisagée soit d'ailleurs ordinaire ou critique.

Il nous reste à rechercher ce qui se passe aux valeurs singulières. La fonction de Weierstrass ne dépendant pas du choix des périodes, nous pouvons supposer que $2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont précisément les périodes qui dans le voisinage de la valeur singulière considérée $y = y_0$ sont de la forme:

$$\psi(y) + \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad \theta(y)$$

$\psi(y)$ et $\theta(y)$ restant holomorphes (sans que $\theta(y)$ s'annule); d'autre part v sera de la forme:

$$v^* + \lambda \frac{\theta(y)}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

u^* restant holomorphe et λ étant un entier. Si nous posons avec Weierstrass (cf. Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques):

$$h = e^{\pi\sqrt{-1}\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \quad z = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}\,v}{2\omega_2}},$$

nous voyons que $h(y-y_0)^{-\frac{\lambda}{2}}$, $z(y-y_0)^{-\frac{\lambda}{2}}$ demeurent holomorphes et ne s'annulent pas pour $y = y_0$. Nous voyons d'autre part (loc. cit. édition française p. 41): que

$$\sigma(v) = e^{2\eta_2\omega_2 w^2} K \vartheta(v), \quad \vartheta(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \Sigma(-1)^m h^{\frac{(2m+1)^2}{4}} z^{2m+1}$$

K étant un facteur constant, d'où:

$$\wp(v) = \frac{\sigma'^2 - \sigma\sigma''}{\sigma^2} = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta\vartheta''}{\vartheta^2};$$

Digitized by Google

(j'écris v au lieu de u, pour conserver la notation adoptée jusqu'ici, et je désigne par w le v de Weierstrass, c'est à dire $\frac{v}{2\omega_2}$). D'ailleurs on a:

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\vartheta'(v) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\Sigma(-1)^m(2m+1)h^{\frac{(2m+1)^2}{4}}z^{2m+1},$$

$$\left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2\vartheta''(v) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\Sigma(-1)^m(2m+1)^2h^{\frac{(2m+1)^2}{4}}z^{2m+1}.$$

Je dis que

$$\vartheta(v) = (y-y_0)^{\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}}H(y)$$

H étant holomorphe, ou au moins méromorphe. En effet, on a:

$$h^{\frac{(2m+1)^2}{4}}z^{2m+1} = (y-y_0)^{\frac{(2m+1)^2}{8}+\frac{\lambda}{2}(2m+1)}M(y).$$

M étant holomorphe; l'exposant de $y-y_0$ est égal à: $\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}+\left[\frac{m^2+m}{2}+\lambda m\right]$, l'expression entre crochets est un entier; et quels que soient le signe et la valeur de λ, cet entier est positif pourvu que m soit suffisamment grand en valeur absolue.

Si donc nous mettons de côté le facteur $(y-y_0)^{\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}}$ nous voyons que tous les termes de la série $\vartheta(v)$ sont holomorphes, sauf un nombre fini qui sont méromorphes. Donc $H(y)$ est méromorphe. On démontrerait de même que:

$$\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\vartheta'(v), \quad \left(\frac{2\omega_2}{\pi\sqrt{-1}}\right)^2\vartheta''(v)$$

sont de la forme:

$$(y-y_0)^{\frac{1}{8}+\frac{\lambda}{2}}H(y)$$

H étant méromorphe; comme $2\omega_2 = \theta(y)$ est holomorphe et ne s'annule pas, l'expression $\frac{\vartheta'^2-\vartheta\vartheta''}{\vartheta^2}$ est méromorphe. D'autre part $\eta_2\omega_2$ d'après Weierstrass (loco cit. page 8, article 6, formule 10) est une fonction holomorphe de h^2 (pour $h=0$) et par conséquent de y pour $y=y_0$. Nous devons donc conclure que pour cette valeur, $\wp(v)$ est une fonction méromorphe de y.

Ainsi G reste une fonction méromorphe de y même pour les valeurs singulières. Elle est donc méromorphe dans tout le plan et même à l'infini; *c'est donc une fonction rationnelle de y.*

La dérivée partielle $\frac{d\varphi}{dv}$ est aussi une fonction doublement périodique de v qui ne change pas quand on remplace le système des périodes par un système équivalent. On démontrerait de la même manière que c'est une fonction rationnelle de y.

Envisageons maintenant les trois dérivées partielles

$$\frac{d\varphi}{dv}, \quad \frac{d\varphi}{d\omega_1}, \quad \frac{d\varphi}{d\omega_2}.$$

Digitized by Google

Quand v augmente d'une période, ou que l'on remplace le système des périodes par un système équivalent, ces trois dérivées subiront une transformation linéaire et cela de telle façon que

$$(3)\qquad \begin{cases} v\dfrac{d\varphi}{dv} + \omega_1 \dfrac{d\varphi}{d\omega_1} + \omega_2 \dfrac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \dfrac{dv}{dy}\dfrac{d\varphi}{dv} + \dfrac{d\omega_1}{dy}\dfrac{d\varphi}{d\omega_1} + \dfrac{d\omega_2}{dy}\dfrac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \dfrac{d^2v}{dy^2}\dfrac{d\varphi}{dv} + \dfrac{d^2\omega_1}{dy^2}\dfrac{d\varphi}{d\omega_1} + \dfrac{d^2\omega_2}{dy^2}\dfrac{d\varphi}{d\omega_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

demeurent invariants. On en conclut (par un raisonnement tout semblable au précédent) que toutes ces expressions sont des fonctions rationnelles de y. Pour la seconde d'entre elles cela est d'ailleurs évident puisque c'est la dérivée totale de $\wp$ par rapport à y et que $\wp$ est une fonction rationnelle de y.

En combinant ces expressions on trouve que

$$\Delta v \frac{d\varphi}{dv} + \Delta\omega_1 \frac{d\varphi}{d\omega_1} + \Delta\omega_2 \frac{d\varphi}{d\omega_2}$$

est une fonction rationnelle de y. Or $\Delta\omega_1$ et $\Delta\omega_2$ sont nuls; en vertu de l'équation (1) cette expression se réduit donc à $\Delta v \cdot \dfrac{d\varphi}{dv}$.

Nous savions déjà que les deux facteurs Δv (en vertu de l'équation 2) et $\dfrac{d\varphi}{dv}$ sont des fonctions rationnelles de y.

Passons maintenant au cas général où le genre p des courbes K_y est plus grand que 1.

Nous nous servirons des propriétés des fonctions intermédiaires (fonctions de Frobenius) et nous en utiliserons en particulier quelques-unes que j'ai démontrées dans l'American Journal of Mathematics (tome 8). Soit ω_{xi} la x^e période de la i^e intégrale. Il existera entre les périodes de deux intégrales quelconques une relation bilinéaire:

$$(4)\qquad \Phi(\omega_{xi}, \omega_{xj}) = 0$$

telle que le premier membre Φ linéaire et homogène tant par rapport à

$$\omega_{1i}, \omega_{2i}, \ldots, \omega_{2p\cdot i}$$

que par rapport à:

$$\omega_{1j}, \omega_{2j}, \ldots, \omega_{2p\cdot j}$$

change de signe quand on permute ω_{xi} avec ω_{xj}. Si l'on prend en particulier les périodes normales, cette fonction Φ prend une forme particulièrement simple. Nous aurons:

$$(4\text{ bis})\qquad \Phi = \sum_{x=1}^{x=p} (\omega_{xi}\omega_{x+p\cdot j} - \omega_{x\cdot j}\omega_{x+p\cdot i}) = 0.$$

Considérons alors une fonction intermédiaire, c'est une fonction entière H de $v_1, v_2, \ldots, v_p$, qui est multipliée par une exponentielle quand les variables augmentent d'une période: de sorte que

$$H(v_i + \omega_{xi}) = e^{P_x} H(v_i); \quad P_x = \Sigma_i \alpha_{xi} u_i + \gamma_x.$$

Digitized by Google

Nous poserons d'autre part:

$$\delta_\varkappa = \gamma_\varkappa - \tfrac{1}{2} \Sigma \alpha_{\varkappa i}\, \omega_{\varkappa i}.$$

Les quantités $\gamma_\varkappa$ et $\delta_\varkappa$ ne sont évidemment déterminées qu'à un multiple près de $2\pi\sqrt{-1}$. Nous envisagerons ensuite les combinaisons

$$\Phi(\alpha_{\varkappa i}, \omega_{\varkappa j}) = \Phi_{ij}.$$

Nous supposerons

$$\Phi_{ii} = 2m\pi\sqrt{-1};\ \Phi_{ij} = 0 \quad (i \gtrless j), \tag{5}$$

la fonction intermédiaire sera alors dite d'ordre m; une fonction intermédiaire du 1er ordre est déterminée à un facteur constant près quand on connaît ses multiplicateurs $e^{P_\varkappa}$. Une fonction intermédiaire du 1er ordre est paire ou impaire quand tous les $\delta_\varkappa$ sont égaux à 0 ou à $\pi\sqrt{-1}$. Pour des valeurs données des coëfficients $\alpha_{\varkappa i}$, il y a donc 2^{2p} fonctions intermédiaires du 1er ordre paires ou impaires.

Si nous multiplions la fonction intermédiaire H par une exponentielle e^Q, où Q est un polynôme homogène du 2d degré par rapport aux v_i, nous aurons une nouvelle fonction intermédiaire H' pour laquelle les Φ_{ij} et les $\delta_\varkappa$ seront les mêmes. On pourra disposer du polynôme Q de telle façon que les $\alpha_{\varkappa i}$ s'annulent pour toutes les périodes de la 1ère série, c'est à dire pour $\varkappa \leqq p$. La fonction H' est alors une fonction Θ, mais nous nous bornerons aux fonctions paires ou impaires qui sont au nombre de 2^{2p}. Parmi ces fonctions Θ, il y en a une qui est la fonction Θ proprement dite et que nous désignerons par Θ_0 pour la distinguer des autres; c'est celle pour laquelle tous les $\delta_\varkappa$ sont nuls.

Nous envisagerons maintenant les fonctions Π qui sont les dérivées partielles du 3e ordre (par rapport aux v) du logarithme de l'une des fonctions Θ du 1er ordre paires ou impaires. Ces fonctions Π sont donc au nombre de $\frac{p(p+1)(p+2)}{6} 2^{2p}$ puisqu'il y a 2^{2p} fonctions $L\Theta$ et que chacune d'elles a $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ dérivées du 3e ordre.

1° Une dérivée partielle du 3e ordre du logarithme d'une fonction intermédiaire du 1er ordre H paire ou impaire est égale à l'une des fonctions Π. On a en effet

$$\log \Theta = \log H - Q$$

Q étant un polynôme du 2d degré et toute dérivée 3e de Q est nulle.

2° Quand on augmente les v d'une période, les Π ne changent pas; car $\log \Theta$ augmente de $P_\varkappa$ dont les dérivées 3es sont nulles.

3° Qu'arrive-t-il maintenant quand on remplace les périodes par un système de périodes normales équivalent? D'abord les Φ_{ij} ne changent pas (loc. cit. page 323); de plus si la fonction intermédiaire était paire ou impaire, elle conservera ce caractère; si les anciens $\delta_\varkappa$ étaient tous égaux à zéro ou à $\pi\sqrt{-1}$, il en sera de même des nouveaux $\delta_\varkappa$; mais il n'y a aucune nécessité à ce que chaque nouveau $\delta_\varkappa$ soit égal à l'ancien $\delta_\varkappa$ correspondant. Nous en concluons que les différentes fonctions Π s'échangent simplement entre elles, une dérivée du 3e ordre du logarithme de Θ se changeant dans la dérivée partielle correspondante du logarithme d'un autre Θ.

Digitized by Google

4° Si nous faisons subir aux v_i une substitution linéaire, et en même temps aux périodes $\omega_{\varkappa i}$ la substitution linéaire correspondante, et aux $\alpha_{\varkappa i}$ la substitution contragrédiente de telle sorte que $\Sigma \alpha_{\varkappa i} v_i$ ne change pas, la fonction intermédiaire H définie par les v, les ω, les α et les δ ne changera pas; il en sera de même de son logarithme; les dérivées partielles de ce logarithme (et en particulier les Π correspondants) subiront une transformation linéaire (contragrédiente de celle que subissent les produits de trois facteurs égaux à des v_i distincts ou non).

Si par exemple v_1 est multiplié par c, les $\omega_{\varkappa 1}$ multipliés par c, les $\alpha_{\varkappa 1}$ divisés par c, les fonctions Π représentées par:

$$\frac{d^3}{dv_1^3} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1^2 dv_2} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_1 dv_2^2} \log \Theta, \quad \frac{d^3}{dv_2^3} \log \Theta, \quad \text{etc.}$$

seront respectivement multipliées par

$$\frac{1}{c^3}, \quad \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c}, \quad 1, \quad \text{etc.}$$

Cela posé, je suppose que l'on remplace les $\omega_{\varkappa i}$ par leurs valeurs en fonction de y et les v_i par un système de fonctions normales de y, une fonction Π va devenir une fonction $G(y)$ qu'il s'agit d'étudier.

1° Lorsque y décrit un contour fermé, les v augmentent d'une période, le système de périodes est remplacé par un système équivalent. Dans ces conditions, les fonctions G peuvent seulement s'échanger entre elles. Je précise; convenons pour abréger le langage, de dire que deux fonctions $G = \Pi$ appartiennent au même *système* quand elles dérivent de plusieurs $\log \Theta$ différents par le même mode de différentiation; et qu'elles appartiennent au même *groupe* quand elles sont les diverses dérivées partielles d'un même $\log \Theta$. Alors les fonctions G d'un même système s'échangeront entre elles. Donc *toute fonction symétrique des diverses fonctions G d'un même système est une fonction uniforme de y.*

Pour une valeur ordinaire de y, les G sont des fonctions méromorphes de y.

Pour une valeur critique de la 2e sorte $y = b$, les produits $v_i(y - b)$, $\omega_{\varkappa i}(y - b)$ restent holomorphes; donc:

$$\Pi(v_i, \omega_{\varkappa i}) = (y - b)^3 \Pi[v_i(y - b), \omega_{\varkappa i}(y - b)]$$

reste méromorphe.

Pour une valeur critique de la 1ère sorte $y = c$, telle que $\Sigma \alpha_i v_i = 0$, on fera un changement linéaire de variables, de telle sorte que $v_1' = \Sigma \alpha_i v_i$ et que les autres v_i' soient des fonctions linéaires quelconques des v. Nous ferons, bien entendu, le même changement de variables sur les $\omega_{\varkappa i}$, de telle sorte que par exemple $\omega_{\varkappa 1}' = \Sigma \alpha_i \omega_{\varkappa i}$.

Alors les $\Pi(v_i', \omega_{\varkappa i}')$ seront des fonctions linéaires des $\Pi(v_i, \omega_{\varkappa i})$ et inversement. Je mettrai en évidence v_1' et $\omega_{\varkappa}'$ en écrivant:

$$\Pi(v_1', v_i'; \omega_{\varkappa 1}', \omega_{\varkappa i}')$$

l'indice i prenant les valeurs 2, 3, ..., p; dans ce cas v_1' et $\omega_{\varkappa}'$ s'annulent pour $y = c$, mais $\frac{v_1'}{y - c}$ et $\frac{\omega_{\varkappa i}'}{y - c}$ restent finis. Alors:

$$\Pi(v_1', v_i'; \omega_{\varkappa 1}', \omega_{\varkappa i}') = \frac{1}{(y - c)^\lambda} \Pi\left(\frac{v_1'}{y - c}, \quad v_i', \quad \frac{\omega_{\varkappa 1}'}{y - c}, \quad \omega_{\varkappa}'\right)$$

Digitized by Google

(où $\lambda = 0, 1, 2, 3$ selon le «groupe» de fonctions Π que l'on considère) reste encore méromorphe. Il est donc de même des Π.

Il nous reste à examiner le cas des valeurs singulières. Soit $y = y_0$ une de ces valeurs; dans le voisinage de cette valeur on a:

$$v_i = \psi_i(y) + \frac{\lambda \varpi_i}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0), \quad \omega_{\varkappa i} = \psi_{\varkappa i}(y) + \frac{\lambda_\varkappa \varpi_i}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

les ψ étant holomorphes, ϖ_i étant la période qui est attachée à la valeur singulière au sens du § 2, et qui est une fonction holomorphe de y, les λ et les $\lambda_\varkappa$ étant des entiers. Comme nous avons vu que nos fonctions G d'un même système se permutent simplement entre elles quand on remplace les périodes par un système équivalent de périodes normales, nous pourrons adopter un quelconque de ces systèmes équivalents et il sera toujours possible de le choisir de telle façon que $\varpi = \omega_{1i}$; dans ces conditions tous les $\lambda_\varkappa$ sont nuls à l'exception de λ_{p+1} qui est égal à 1. En effet la forme:

$$\Sigma_\varkappa (\omega_{\varkappa i}\omega_{\varkappa+p\cdot j} - \omega_{\varkappa+p\cdot i}\omega_{\varkappa j})$$

ne doit pas être altérée quand $\omega_{\varkappa i}$ se change en $\omega_{\varkappa i} + \lambda_\varkappa \omega_{1i}$, et $\omega_{\varkappa j}$ en $\omega_{\varkappa j} + \lambda_\varkappa \omega_{1j}$ ce qui arrive quand y tourne autour de y_0; et cela exige que tous les $\lambda_\varkappa$ soient nuls à l'exception de λ_{p+1}. Nous voyons ensuite que quand la valeur singulière y_0 correspond à un plan tangent ordinaire, ce que nous supposons, il existe toujours une période (combinaison linéaire des $\omega_{\varkappa i}$) qui augmente de ϖ_i, ce qui exige $\lambda_{p+1} = \pm 1$. Enfin nous supposerons $\lambda_{p+1} = 1$; car si λ_{p+1} était négatif, il suffirait de changer ϖ_i en $-\varpi_i$.

Nous allons maintenant effectuer un changement linéaire de variables en posant:

$$(6) \qquad r'_i = \Sigma \alpha_{ij} v_j, \quad \omega'_{\varkappa i} = \Sigma \alpha_{ij} \omega_{\varkappa j}.$$

Dans ces conditions les $\Pi' = \Pi(v'_i, \omega'_{\varkappa i})$ seront des fonctions linéaires des $\Pi(v_i, \omega_{\varkappa i})$ et les coëfficients de ces fonctions linéaires seront des fonctions méromorphes de y, si les coëfficients α_{ij} sont eux-mêmes des fonctions méromorphes de y.

Cela posé, nous pouvons choisir le changement de variables (6) de telle sorte que:

$$\omega'_{\varkappa i} = 0 \quad (\varkappa \leqq p, \ \varkappa \gtrless i), \qquad \omega'_{\varkappa\varkappa} = 2\pi\sqrt{-1} \quad (\varkappa \leqq p),$$

les coëfficients α_{ij} seront des fonctions méromorphes de y, puisque tous les $\omega_{\varkappa i}$ où $\varkappa \leqq p$, et même généralement tous les $\omega_{\varkappa i}$ sauf $\omega_{p+1\cdot i}$ sont des fonctions holomorphes de y. Nous écrirons alors:

$$\Theta = \Sigma e^{P_1 + P_2 + P_3}$$

où

$$P_1 = \Sigma m_i v'_i, \quad P_2 = \Sigma m_i \varepsilon_i, \quad P_3 = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i m_\varkappa a_{i\varkappa}$$

et où:

1^0 $2m_1$, $2m_2$, ..., $2m_p$ sont des entiers: $2m_\varkappa$ étant soit toujours pair, soit toujours impair, suivant la valeur des $\delta_\varkappa$, c'est à dire suivant celle des 2^{2p} fonctions Θ que l'on envisage;

2^0 les ε_i sont égaux à 0 ou à $\pi\sqrt{-1}$ suivant celle des 2^{2p} fonctions Θ que l'on envisage.

Digitized by Google

3° On a

$$a_{ix} = a_{xi} = \omega'_{x+p\cdot i} = \omega'_{i+p\cdot x}.$$

Tous les ω'_{xi} sont des fonctions holomorphes de y sauf peut-être les $\omega'_{p+1\cdot i}$; de plus $\omega'_{p+1\cdot i}$ est égal à une fonction holomorphe de y, plus:

$$\frac{\omega'_{1i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0).$$

Mais $\omega'_{1i} = 0$ pour $i \gtrless 1$; donc tous les a_{ix} sont fonctions holomorphes de y sauf a_{11}, mais $e^{a_{11}}$ est une fonction holomorphe de y qui s'annule pour $y = y_0$.

De même

$$v'_i = \psi'_i(y) + \frac{\lambda\omega'_{1i}}{2\pi\sqrt{-1}} L(y - y_0)$$

est holomorphe en y si $i \gtrless 1$; et l'exponentielle $e^{v'_1}$ est holomorphe ou méromorphe en y, divisible par $(y - y_0)^\lambda$. Chacun des termes de Θ est donc égal au produit d'une fonction holomorphe de y, ne s'annulant pour $y = y_0$, par le facteur

$$(y - y_0)^{m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2}.$$

L'exposant $m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2$ ne peut être négatif que pour un nombre fini de valeurs de m_1; de plus, si l'on change m_1 en $m_1 + 1$, il augmente de $\lambda + m_1 + \frac{1}{2}$.

Si donc $2m_1$ est pair, il augmente d'un entier plus $\frac{1}{2}$; si $2m_1$ est impair, il augmente d'un entier. Si $2m_1$ est impair, tous les termes sont donc égaux à une fonction holomorphe ou méromorphe multipliée par $(y - y_0)^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{8}}$. Si $2m_1$ est pair, ils sont égaux à une fonction holomorphe ou méromorphe multipliée par $(y - y_0)^{\lambda + \frac{1}{2}}$ ou $(y - y_0)^\lambda$. Donc quand y tourne autour de y_0, dans le 1er cas la fonction Θ est simplement multipliée par un facteur constant, dans le 2d cas, deux des fonctions Θ s'échangent entre elles, à savoir celles qui diffèrent l'une de l'autre par le changement de valeur de ε_1. Ce sont en tous cas des fonctions algébroïdes.

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient aux dérivées partielles des différents ordres des fonctions Θ prises par rapport aux v'_i; chaque terme se déduit en effet du terme correspondant de la fonction Θ en le multipliant par un facteur constant ne dépendant que des entiers m. Il résulte de là que les Π' sont des fonctions algébroïdes de y pour $y = y_0$ et que quand y tourne autour de y_0, les fonctions d'un même système s'échangent simplement entre elles. Cela est donc encore vrai pour les Π, qui sont des fonctions linéaires des Π' à coëfficients méromorphes. En résumé, nous voyons que pour toute valeur de y, les Π sont des fonctions algébroïdes de y, susceptibles seulement de s'échanger entre fonctions d'un même système. Toute fonction symétrique des fonctions $\Pi = G$ d'un même système est donc une fonction méromorphe pour toutes les valeurs finies ou infinies de y. C'est donc une fonction rationnelle de y. *Une quelconque des fonctions G est donc une fonction algébrique de y.*

Nous pouvons étendre ce résultat au cas où l'on remplace v_i non plus par une fonction normale de y, mais par la moitié d'une fonction normale. Il n'y aura en effet rien de changé dans l'analyse précédente, sauf que λ au lieu d'être un entier, pourra être la moitié d'un entier. Si alors m_1 se change

Digitized by Google

en $m_1 + 1$, l'exposant $m_1\lambda + \frac{1}{2}m_1^2$ augmente de $\lambda + m_1 + \frac{1}{2}$; si alors λ est la moitié d'un nombre impair, c'est quand $2m_1$ est pair que notre exposant augmente d'un entier et que la fonction Θ se reproduit à un facteur constant près; et c'est quand $2m_1$ est impair que cet exposant augmente d'un entier plus $\frac{1}{2}$ et que la fonction Θ s'échange avec une autre.

Il peut se faire qu'une fonction G soit non-seulement algébrique, mais rationnelle en y; c'est ce qui arrive par exemple si v_i est la moitié d'une fonction normale pour laquelle tous les λ soient impairs et si G dérive d'une fonction Θ pour laquelle tous les $2m_i$ soient pairs.

On remarquera que le fait que le système de fonctions normales v_i satisfait à la condition $\Sigma\alpha_i v_i = 0$ pour une valeur critique de la 1ère sorte joue un rôle essentiel. Le théorème ne serait plus vrai si on remplaçait dans les Π, les v_i par un système de fonctions satisfaisant aux mêmes conditions qu'un système de fonctions normales, *celle-là exceptée.*

§ 5. Classification des Courbes. Considérons un système de fonctions normales v_i, formées par les procédés du § 3. A ce système correspondra-t-il toujours des courbes algébriques? Il existera toujours sur chaque courbe K_y un groupe de p points et un seul: $M_1, M_2, \ldots, M_p$, tels que l'on ait:

$$v_i = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^p,$$

v_i étant la fonction normale considérée, et u_i^x la valeur de l'intégrale u_i au point M_x. Quand on fera varier y, l'ensemble de ces points engendrera une courbe C; reprenons les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'intersection de S avec la droite $y = t = 0$ et soit a_i^x la valeur de u_i au point A_x. Rappelons que d'après nos conventions a_i^1 est nul:

Je me propose de rechercher combien de fois la courbe C passe en A_x, c'est à dire pour combien de valeurs de y, l'un des points M_x vient en A_x. A cet effet je rappelle le théorème de Riemann; d'après ce théorème on a

$$\Theta_0(u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^{p-1} - h_i) = 0 \tag{1}$$

Θ_0 étant la fonction Θ dont tous les δ sont nuls, les u_i^x étant les valeurs de u_i en $p-1$ points quelconques de K_y et les h_i des constantes (ne pouvant dépendre que de y). De plus on a:

$$u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^{2p-2} = 2h_i \tag{2}$$

les u_i^x représentant cette fois les valeurs de u_i aux $2p-2$ points d'intersection de K_y avec une adjointe quelconque d'ordre $n-3$, les points doubles étant laissés de côté.

En chacun des points doubles, on a deux valeurs de u_i, correspondant aux deux branches de K_y qui se coupent au point double. Je désignerai par d_i la somme de toutes ces valeurs de u_i dont le nombre est double de celui des points doubles. Nous remarquerons que les d_i forment un système de fonctions normales. En effet nous avons vu au § 2 qu'à toute courbe algébrique tracée sur la surface correspond un système de fonctions normales; il suffit d'appliquer ce résultat à la courbe double de la surface S.

En vertu du théorème d'Abel, la somme des u_i^x est une constante pour les points d'intersection de K_y avec une courbe d'ordre m quelconque. Appli-

Digitized by Google

quons à deux courbes d'ordre $n-3$ à savoir une adjointe d'une part, et d'autre part $n-3$ fois la droite $y=t=0$. Cela va nous donner:

$$u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^{2p-2} + d_i = (n-3)(a_i^1 + a_i^2 + \cdots + a_i^n)$$

les $u_i^\varkappa$ étant ceux qui figurent dans le 1er membre de (2); on aura donc:

$$2h_i = (n-3)\Sigma a_i^\varkappa - d_i.$$

Comme les $a_i^\varkappa$ et les d_i sont des fonctions normales, il en sera de même des $2h_i$.

Pour que le point M_p par exemple vienne en $A_\varkappa$, il faut que

$$v_i - a_i^\varkappa = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^{p-1}$$

d'où:

$$\Theta_0(v_i - a_i^\varkappa - h_i) = 0.$$

Or $v_i - a^\varkappa - h_i$ est la moitié d'une fonction normale. Or la fonction Θ_0 ne peut s'annuler, sans que son logarithme devienne infini, ni par conséquent sans que l'une au moins des dérivées partielles du 3e ordre de ce logarithme devienne infinie. Il faut donc que l'une des fonctions G devienne infinie; or les G sont des fonctions algébriques de y; elles ne pourront donc devenir infinies qu'un nombre fini de fois. La courbe C ne pourra donc passer par $A_\varkappa$ qu'un nombre fini de fois, soit $q_\varkappa$ fois. Elle sera alors une courbe algébrique de degré

$$p + q_1 + q_2 + \cdots + q_n.$$

La courbe algébrique C existe toujours; elle peut dans certains cas se réduire à un certain nombre de fois les points $A_\varkappa$, ou encore à des périodes. Je renvoie au mémoire cité des Annales de l'Ecole Normale pour l'étude du cas exceptionnel où la courbe C ne rencontre le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ qu'en $p-1$ points mobiles (loc. cit. page 83).

La courbe C telle que nous venons de la définir est entièrement déterminée; mais à un même système de fonctions normales, correspondent une infinité de courbes algébriques rencontrant le plan $\frac{y}{t} = \text{const}$ en plus de p points mobiles (tandis que C rencontrait ce plan en p points mobiles seulement).

Nous dirons que toutes ces courbes appartiennent à une même *famille*. Mais cette classification en familles n'est pas une classification naturelle. Supposons en effet que l'on change d'axes de coordonnées de telle façon que la droite $y=t=0$ soit remplacée par une autre droite D. La fonction v_i est la somme des u_i pour tous les points d'intersection *mobiles* de la courbe C avec un plan passant par $y=t=0$. Les points d'intersection immobiles, c'est à dire les points $A_\varkappa$ n'entrent pas en ligne de compte. Mais si l'on remplace la droite $y=t=0$ qui rencontrait la courbe C un certain nombre de fois $q_\varkappa$ en $A_\varkappa$, par une droite quelconque D, cette droite ne rencontrera pas C en général. Soient alors v_i les fonctions normales correspondant à C et à la droite $y=t=0$; soient v_i' les fonctions normales correspondant à C et à la droite D. Lorsque D sera infiniment voisin de $y=t=0$, v_i' ne sera pas infiniment voisin de v_i mais bien de $v_i + \Sigma q_\varkappa a_i^\varkappa$.

Digitized by Google

D'un autre côté v_i n'est déterminé qu'à une période près, de sorte que les deux systèmes de fonctions normales v_i et $v_i + \omega_{\varkappa i}$ correspondent à la même courbe C. Cela nous amène à substituer à la classification en famille une classification en *classes* qui sera cette fois une classification naturelle.

Un système de fonctions normales est caractérisé par l'ensemble des entiers $\lambda_\varkappa$ qui correspondent d'après le § 3 aux différentes valeurs singulières $y = y_\varkappa$; parmi les fonctions normales nous distinguerons les périodes ω_{ji} et les fonctions a_i^j qui correspondent aux points A_j, soient alors $\mu_{j\varkappa}$ et $\mu'_{j\varkappa}$ les entiers $\lambda_\varkappa$ relatifs respectivement à ω_{ji} et à a_i^j. Soient deux systèmes de fonctions normales caractérisés respectivement par les entiers $\lambda_\varkappa$ et par les entiers $\lambda'_\varkappa$. Les deux systèmes et les deux courbes C correspondantes appartiendront à la même famille si l'on a

$$\lambda_\varkappa = \lambda'_\varkappa;$$

ils appartiendront à la même classe si

$$\lambda_\varkappa = \lambda'_\varkappa + \Sigma m_j \mu_{j\varkappa} + \Sigma m'_j \mu'_{j\varkappa}$$

les m et les m' étant des entiers. Pour les autres détails sur la classification des courbes algébriques, le nombre des courbes primitives et la manière de déduire toutes les courbes des courbes primitives, je renverrai au mémoire cité.

On peut se demander ce qui se passe quand on fait varier la droite D d'une manière continue. Les valeurs singulières correspondent aux plans tangents menés par D à S. Deux de ces valeurs s'échangent quand D tourne autour d'une position où elle est tangente à la surface S. En même temps, deux des points A_j et par conséquent deux des fonctions a_i^j s'échangent également.

Qu'arrive-t-il alors? L'entier $\lambda_\varkappa$ qui d'après le § 3 est attaché à chacune des valeurs singulières $y_\varkappa$ dépend de deux choses: 1^0 de celle des déterminations de v_i que l'on envisage; 2^0 de la forme ou plutôt de la disposition relative des coupures $Q_\varkappa$ que dans le § 3 nous avons menées de $y_\varkappa$ à l'infini dans le plan des y. Quand la droite D se déplacera d'une manière continue, le nombre $\lambda_\varkappa$ demeurera constant; mais en même temps nos coupures se déformeront, et leur disposition relative pourra changer. Supposons par exemple que dans la situation initiale les coupures $Q_\varkappa$ soient rectilignes, et dirigées suivant le prolongement du rayon vecteur qui va de l'origine à $y_\varkappa$; dans une position ultérieure, les coupures $Q_\varkappa$ auront cessé d'être rectilignes, et si on les remplace par de nouvelles coupures rectilignes $Q'_\varkappa$ allant des nouvelles valeurs singulières à l'infini suivant le prolongement du rayon vecteur qui vient de l'origine, il pourra se faire que les nouvelles coupures $Q'_\varkappa$ ne soient pas équivalentes aux anciennes coupures $Q_\varkappa$, et que les entiers $\lambda'_\varkappa$ relatifs aux $Q'_\varkappa$ ne soient pas égaux aux $\lambda_\varkappa$.

Soit D_0 une position singulière de la droite D, c'est à dire une position telle que D_0 touche S; nous supposerons que D tourne autour de D_0 en s'en écartant très peu; alors deux valeurs singulières y_1 et y_2 resteront très peu différentes l'une de l'autre et vont s'échanger entre elles. Les coupures Q_1 et Q_2 primitivement rectilignes vont se déformer d'une manière continue et seront remplacées par des coupures curvilignes aboutissant la première à y_2, la seconde à y_1 puisque ces deux valeurs singulières se sont échangées. L'examen de cette déformation montrerait que les entiers λ_1 et λ_2 se sont échangés et

Digitized by Google

comme la courbe C n'a pas dû changer, on doit conclure que $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme en général, en faisant varier D d'une manière continue de façon à ramener cette droite à sa position initiale, on peut passer d'une valeur singulière à une autre valeur singulière quelconque, on pourrait être tenté de conclure que tous les λ_x sont égaux entre eux. Ce serait une erreur; les entiers λ relatifs à deux coupures rectilignes aboutissant à deux valeurs singulières sur le point de s'échanger, sont égaux; mais en faisant varier D, il arrive que l'une de ces valeurs, y_2 par exemple, soit sur le point de s'échanger avec une troisième valeur singulière y_3, les coupures Q_x ne seront pas restées rectilignes; et si nous les remplaçons par de nouvelles coupures rectilignes Q'_x, les valeurs des entiers λ se trouveront modifiées. Si alors λ_2 et λ_3 sont les entiers relatifs à Q_2 et à Q_3, λ'_2 et λ'_3 les entiers relatifs à Q'_2 et Q'_3, on aura, non pas $\lambda_2 = \lambda_3$, mais $\lambda'_2 = \lambda'_3$. Une étude plus détaillée des variations des ces entiers pourrait présenter quelque intérêt.

6. Équations des courbes C. Pour former l'équation de la courbe C qui correspond à un système donné v_i de fonctions normales et qui coupe K_y en p points variables, on peut employer le procédé suivant.

Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de deux plans quelconques; soient $M_1, M_2, \ldots M_p$ les p points d'intersection mobiles de C et de K_y; soit P_i et Q_i le résultat de la substitution des coordonnées de M_i dans P et dans Q; nous envisagerons le produit suivant:

$$\frac{P_1 P_2 \ldots P_p}{Q_1 Q_2 \ldots Q_p} = H(y, C).$$

C'est une fonction symétrique des coordonnées de $M_1, M_2, \ldots, M_p$, et comme les coëfficients des deux polynômes P et Q sont arbitraires, toutes les autres fonctions symétriques peuvent s'en déduire. Ce produit $H(y, C)$ est évidemment une fonction de y, et il dépend aussi de la courbe C.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points d'intersection de $P = 0$ avec K_y; soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ceux de $Q = 0$ avec K_y. Soient b_i^x et c_i^x les valeurs de l'intégrale u_i au point B_x et au point C_x, on aura du théorème d'Abel:

$$\Sigma b_i^x = \Sigma c_i^x = \Sigma a_i^x. \tag{3}$$

Considérons l'expression

$$\frac{\Pi \Theta_0(v_i - b_i^x - h_i)}{\Pi \Theta_0(v_i - c_i^x - h_i)} = G(y, C).$$

On a bien entendu $v_i = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^p$ et le produit indiqué par le signe Π doit être étendu à tous les b_i^x pour le numérateur, à tous les c_i^x pour le dénominateur. Si l'on considère pour un instant y comme donné, et qu'on fasse varier la courbe C, c'est à dire les points $M_1, M_2, \ldots, M_p$ sur la courbe K_y, on voit quelle est la condition pour que G s'annule ou devienne infini, il s'annulera quand:

$$v_i - b_i^x = u_i^1 + u_i^2 + \cdots + u_i^{p-1}$$

c'est à dire quand le point M_p viendra en B_x, c'est à dire quand l'un des points M coïncidera avec l'un des points B, c'est à dire quand l'un des P_i s'annulera. De même G deviendra infini quand l'un des Q_i s'annulera. Donc

Digitized by Google

G et H deviennent nuls ou infinis en même temps, donc ils ne diffèrent que par un facteur constant. On a donc:

$$\frac{H(y_1 C)}{G(y_1 C)} = \frac{H(y_1 C_0)}{G(y_1 C_0)},$$

C_0 étant une autre courbe; nous prendrons une courbe se réduisant à p fois le point A_1 de sorte qu'on aura pour C_0:

$$v_i = p a_i^1 = 0,$$

$$G(y, C_0) = \frac{\Pi \Theta_0 (- b_i^x - h_i)}{\Pi \Theta_0 (- c_i^x - h^i)}, \quad H(y, c_0) = \left(\frac{P_0}{Q_0}\right)^p$$

P_0 et Q_0 étant le résultat de la substitution des coordonnées de A_1 dans P et Q. Je me propose de montrer que si les v_i sont des fonctions normales, le rapport

$$\frac{H(y,C)}{H(y_0,C)} = \frac{G(y,C)}{G(y_0,C)}$$

est une fonction rationnelle de y; je dis d'abord que c'est une fonction uniforme de y; c'est ce que l'on voit immédiatement, en rappelant qu'il est égal à

$$\frac{P_1 P_2 \dots P_p}{Q_1 Q_2 \dots Q_p} \left(\frac{Q_0}{P_0}\right)^p.$$

C'est d'ailleurs une fonction algébroïde de y; en effet il est égal à

$$\frac{\Pi \Theta_0 (v_i - b_i^x - h_i) \Theta_0 (- c_i^x - h_i)}{\Pi \Theta_0 (v_i - c_i^x - h_i) \Theta_0 (- b_i^x - h_i)}.$$

Pour les valeurs ordinaires de y, ainsi que pour les valeurs critiques des deux sortes, on verrait comme au § 3 que c'est une fonction méromorphe; il faut aussi considérer à part les valeurs pour lesquelles deux des b_i^x (ou des c_i^x) s'échangent entre elles; pour ces valeurs les b_i^x sont des fonctions algébroïdes de y, et comme notre expression est symétrique par rapport aux b_i^x, elle reste méromorphe en y.

Restent les valeurs singulières; on a vu que les $\omega_{x\alpha}$ les v_i, les b_i^x, les h_i deviennent logarithmiquement infinis pour une valeur singulière, et on en a conclu au § 3 que les Θ_0 restent algébroïdes. Lorsque y tourne autour d'une valeur singulière, les arguments des Θ_0 peuvent augmenter d'une demi-période et en même temps les périodes peuvent être remplacées par un système équivalent.

Chacun des Θ_0 se change en $e^P \Theta$, P étant un polynôme du second degré, et Θ une des 2^{2p} fonctions Θ; les exponentielles se détruisent et notre produit devient:

$$\frac{\Pi \Theta (v_i - b_i^x - h_i) \Theta (- c_i^x - h_i)}{\Pi \Theta (v_i - c_i^x - h_i) \Theta (- b_i^x - h_i)}.$$

Comme il doit être une fonction uniforme de y, la fonction Θ ne doit pas différer de Θ_0. Nous avons vu à la fin du § 3 la condition pour qu'il en soit ainsi. Cela prouve donc que $2h_i$ est une fonction normale pour laquelle tous les entiers λ sont impairs.

En résumé, notre rapport est une fonction de y qui est uniforme et algébroïde. Elle est donc méromorphe pour toutes les valeurs finies de y. *Elle est donc rationnelle.*

Digitized by Google

Ces procédés peuvent bien montrer que la courbe C est algébrique, mais non pas en faire connaître le degré; je crois donc devoir indiquer aussi une autre analyse, semblable à celle du § 2 du mémoire cité. Soit

$$u_i = \int \frac{P_i dx}{QF'_z}$$

qui est une intégrale de 1ère espèce; nous poserons:

$$U_i = \frac{\partial u_i}{\partial y} = \int \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_i}{QF'_z}\right)F'_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_i}{QF'_z}\right)F'_y\right]\frac{dx}{F'_z}.$$

J'écris $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ avec des ∂ ronds pour exprimer que j'ai différentié par rapport à y, x étant supposé constant et z lié à y et à x par l'équation de la surface (on suppose d'ailleurs $= 1$). On voit que U_i est une intégrale abélienne de 2de espèce. De même la dérivée partielle $\frac{\partial U_i}{\partial y}$ est une intégrale abélienne de 2de espèce; or toute intégrale abélienne de seconde ou de 1ère espèce peuvent s'exprimer par une fonction linéaire de $2p$ d'entre elles, plus une fonction rationnelle; nous aurons donc:

$$\frac{\partial U_i}{\partial y} = \Sigma \varrho_{ix} u_x + \Sigma \varrho'_{ix} U_x + \Pi$$

Π étant une fonction rationnelle de x, y, z et les ϱ et les ϱ' des fonctions rationnelles de y. Supposons maintenant que le point x, y, z, limite supérieure de notre intégrale, au lieu de ce déplacer de façon que $x =$ const, se déplace sur la courbe C, nous aurons:

$$\frac{du_i}{dy} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{dx}{dy}, \qquad \frac{dU_i}{dy} = \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial U_i}{\partial x}\frac{dx}{dy}.$$

On remarquera que $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_i}{\partial x}$ sont des fonctions rationnelles de x, y, z, ce sont les quantités sous le signe $\int$ des intégrales abéliennes u_i et U_i. Nous trouvons de même:

$$\frac{d^2u_i}{dy^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{d^2x}{dy^2}.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}$ sont également des fonctions rationnelles de x, y, z. On en déduit:

$$(4) \qquad \frac{d^2u_i}{dy^2} - \Sigma \varrho_{ix} u_x - \Sigma \varrho'_{ix}\frac{du_x}{dy} = \frac{dx}{dy}\left[2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} - \Sigma \varrho'_{ix}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{d^2x}{dy^2} + \Pi.$$

Le 1er membre de (4) pourra s'appeler $\Delta_i(u_i)$, le symbole Δ_i ayant ainsi un sens différent de celui que nous lui avons attribué jusqu'ici. Quant au 2d membre que nous écrirons $\Phi_i\left(x, y, z, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}\right)$, c'est une fonction rationnelle des arguments dont elle dépend; z est d'ailleurs lié à x et y par l'équation de la surface.

Digitized by Google

On aura alors, pour notre courbe C:

$$\Delta_i(v_i) = \Phi_i^1 + \Phi_i^2 + \cdots + \Phi_i^p$$

où Φ_i^x est le résultat de la substitution dans Φ des coordonnées du point M_x à la place de x, y, z ainsi que des valeurs correspondantes des dérivées $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$.

On a d'ailleurs

$$\Delta_i(\omega_{xi}) = 0$$

et c'est là une forme des équations différentielles qui définissent les périodes. Quand y décrit un contour fermé, v_i augmente d'une période, soit ω_{ix}, alors $\Delta_i(v_i)$ se change en $\Delta_i(v_i) + \Delta_i(\omega_{xi})$, c'est à dire qu'il ne change pas. Donc $\Delta_i(v_i)$ est une fonction uniforme de y; nous verrions comme au § 3 que c'est une fonction rationnelle de y de degré limité; soit $R_i(y)$ cette fonction rationnelle; nous aurons alors:

$$\Sigma \Phi_i^x = R_i(y). \tag{5}$$

Ce sont des équations différentielles qui définissent les x en fonction de y, c'est à dire qui définissent l'équation de la courbe C. Ces équations sont au nombre de p puisque l'indice i peut prendre p valeurs; et il en est de même des inconnues, $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Sachant que ces équations différentielles ont une intégrale algébrique, il ne serait pas difficile d'en déterminer le degré.

7. Élimination des valeurs critiques de la 2de sorte. L'existence de fonctions normales *rationnelles* entraîne d'une part l'existence d'un système algébrique et non linéaire de courbes algébriques, d'autre part celle d'intégrales abéliennes de différentielles totales de 1ère espèce. C'est là le théorème de Castelnuovo, Enriques et Severi. Je n'ai pas à reproduire ici la démonstration que j'en ai donnée dans le mémoire cité. Je me borne à rappeler le résultat. Dans ce cas, la courbe K_y possède q intégrales abéliennes de 1ère espèce *réductibles*, c'est à dire ne possédant que $2q$ périodes distinctes. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_q$ ces intégrales; on sait que si une courbe de genre p admet q intégrales réductibles, elle en admettra $p - q$ autres, ne possédant que $2p - 2q$ périodes distinctes. J'appelle ces $p - q$ intégrales: $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$. Cela correspond à un choix particulier des intégrales u_i; je suppose un autre choix de ces intégrales, sans m'assujettir à aucune condition, et j'appelle alors $u_1', u_2', \ldots, u_p'$ mes p intégrales de 1ère espèce; s'il existe un système q fois infini de fonctions normales rationnelles, v_i', nous aurons entre elles $p - q$ relations linéaires de la forme:

$$\Sigma \alpha_{xi} v_i' = 0 \qquad (x = q+1, q+2, \ldots, p)$$

les α_{xi} étant des fonctions rationnelles de y. Alors les intégrales $u_x = \Sigma \alpha_{xi} u_i'$, $(x = q+1, q+2, \ldots, p)$, seront $p - q$ intégrales réductibles. Cela entraîne l'existence d'un système algébrique q fois infini de courbes algébriques correspondant à notre système de fonctions normales rationnelles, et d'autre part l'existence de q autres intégrales réductibles $u_x = \Sigma \alpha_{xi} u_i'$, $(x = 1, 2, \ldots, q)$, les α_{xi} étant encore des fonctions rationnelles de y. Nous pouvons choisir ces

Digitized by Google

nouvelles fonctions α_{xi} de telle sorte que les fonctions normales $\Sigma\alpha_{xi}v_i'$ se réduisent à des constantes. Dans ce cas *les intégrales* u_x *sont des intégrales de différentielles de 1ère espèce.*

C'est un autre point sur lequel je voudrais revenir avec plus de détails. J'ai énoncé à la fin du § **1** et je voudrais maintenant démontrer un théorème d'après lequel il est impossible qu'il existe des intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1ère sorte, au sens de la fin du § **1**, tant qu'il existe des valeurs critiques de la 2de sorte. Soient en effet $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ les valeurs critiques de la 2de sorte et

$$Q = (y - y_1)(y - y_2)\cdots(y - y_\nu).$$

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_q$ q intégrales dépourvues de valeurs critiques de la 1ère sorte, au sens de la fin du § **1**, de telle sorte que pour une valeur critique quelconque de la 1ère sorte on ait une relation linéaire:

$$\alpha_{q+1}v_{q+1} + \alpha_{q+2}v_{q+2} + \cdots + \alpha_p v_p = 0$$

où ne figurent que les fonctions v d'indice supérieur à q. Les fonctions v d'indice inférieur à q ne sont donc assujetties à aucune condition relative aux valeurs critiques de la 1ère sorte. Nous obtiendrons donc un système de fonctions normales en écrivant:

$$v_{q+1} = v_{q+2} = \cdots = v_p = 0, \qquad v_i = \frac{X_i}{Q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

X_i étant un polynôme arbitraire de degré ν en y; j'appellerai γ les coëfficients de ces polynômes X. Ces coëfficients sont au nombre de $q(\nu + 1)$, notre système de fonctions normales est donc $q(\nu + 1)$ fois infini.

Soient maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu+1}$, $\nu + 1$ valeurs de y, ordinaires, mais d'ailleurs quelconques. Soit C la courbe correspondant à des valeurs déterminées des coëfficients γ; soient $M_{x1}, M_{x2}, \ldots, M_{xp}$ les p points d'intersection mobiles de C avec le plan $y = a_x$. Soient $\xi_{1xi}, \xi_{2xi}, \xi_{3xi}$ les trois coordonnées des points M_{xi}. Les ξ sont au nombre de $3p(\nu + 1)$. Si nous les considérons comme les coordonnées d'un point N dans l'espace à $3p(\nu + 1)$ dimensions, et que nous fassions varier les γ, ce point restera sur une variété algébrique V à $q(\nu + 1)$ dimensions.

Au lieu des ξ nous pourrons considérer un système de fonctions symétriques de

$$\xi_{hx1}, \xi_{hx2}, \ldots, \xi_{hxp}.$$

Soient η ces fonctions symétriques que je prendrai au nombre de $3p(\nu+1)$; si nous considérons les η comme les coordonnées d'un point N' dans l'espace à $3p(\nu + 1)$ dimensions, quand les η varieront, ce point décrira une variété algébrique V' à $q(\nu + 1)$ dimensions. A tout point de V', correspondra un système de valeurs des η et inversement. Quand le point N' décrira une courbe fermée sur V', les γ se reproduiront à une période près; je précise:

Si l'on se donne le point N', les points M_{xi} sont déterminés: cela détermine *à une période près* les valeurs des v_i pour $y = a_1$, $y = a_2$, ..., $y = a_{\nu+1}$; quand on connaît les v_i, on a des équations linéaires, dont le déterminant n'est pas nul et qui déterminent complètement les coëfficients γ. Quand le point N' décrit un contour fermé, les valeurs des v_i pour $y = a_j$ par exemple augmentent d'une quantité Ω_{ji} qui est égale à une période de l'intégrale

Digitized by Google

abélienne u_i pour $y = a_j$. Les γ augmentent de ε, et les fonctions normales $\frac{X_i}{Q}$ se changent en

$$\frac{X_i}{Q} + \frac{X_i'}{Q}$$

où le polynôme X_i' diffère du polynôme X_i par la substitution des coëfficients ε aux coëfficients γ; les coëfficients ε seront alors déterminés par les équations:

$$\frac{X_i'}{Q} = \Omega_{ji} \qquad (\text{pour } y = a_j).$$

Ces ε sont les *périodes* des γ, puisque ce sont les quantités dont les γ augmentent quand N' décrit un contour fermé.

Je dis maintenant que $\frac{X_i'}{Q}$ est, *quel que soit* y, une période de u_i. En effet le système des courbes C, défini par nos fonctions normales rationnelles, est un système algébrique. Donc ou bien un point N' définit un nombre fini de courbes C, ou bien une infinité *continue* de courbes C, cette dernière hypothèse doit être rejetée; nous avons vu en effet que le point N' définit les γ à une période près; elle définit donc une infinité discrète de systèmes de valeurs des γ; et par conséquent une multiplicité *discrète*, finie ou infinie de courbes C. Maintenant, on peut changer $\frac{X_i}{Q}$ en $\frac{X_i}{Q} + \lambda \frac{X_i'}{Q}$, λ étant un entier quelconque; nous ne devons trouver ainsi qu'un nombre fini de courbes C, cela n'est possible que si, quel que soit d'ailleurs y, l'expression $\frac{X_i'}{Q}$ est égale à un sous-multiple d'une période, soit à $\frac{h}{h'}\omega_{xi}$, h et h' étant entiers. Quand on fera varier y d'une manière continue, les entiers h et h' qui ne pourraient varier que par sauts brusques, demeureront constants. Or pour $y = a_j$, $\frac{h}{h'}$ est un entier; donc cela est vrai pour toute valeur de y; donc: $\frac{X_i'}{Q}$ est une période, quelle que soit la valeur de y. C. Q. F. D.

Pour $i = q+1, q+2, \ldots, p$, on peut encore poser $v_i = \frac{X_i}{Q}$ mais cette fois tous les coëfficients de X_i seront assujettis à être nuls. Donc les ε correspondants seront nuls également. Donc *à chaque période des* γ *correspond une période des* u_i, *qui est une fonction rationnelle de* y, *pour* $i \leqq q$ *et qui est nulle pour* $i > q$.

Si maintenant nous nous donnons les γ, les η seront manifestement déterminés; ce sont donc des fonctions uniformes des γ. D'autre part les v_i et par conséquent les γ sont toujours finis.

Si nous représentons les parties réelles et imaginaires des $q(\nu+1)$ coëfficients γ dans l'espace à $2q(\nu+1)$ dimensions, nous pourrons construire le *prismatoïde* des périodes. Ce prismatoïde doit être limité puisque les γ ne peuvent devenir infinis; donc il y a $2q(\nu+1)$ périodes distinctes.

Il y aurait donc $2q(\nu+1)$ périodes des p intégrales abéliennes u_i qui seraient nulles pour $p - q$ de ces intégrales (celles où $i > q$).

Formons le déterminant des parties réelles et imaginaires des $2p$ périodes de nos p intégrales. Dans les $2p - 2q$ dernières lignes de ce déterminant,

Digitized by Google

les éléments des $2q(\nu+1)$ dernières colonnes seront nuls. Le déterminant sera donc nul si

$$(2p-2q)+2q(\nu+1)>2p$$

c'est à dire si ν n'est pas nul. Or nous savons qu'un semblable déterminant ne peut s'annuler pour une courbe de genre p non dégénérescente; il faut donc que $\nu=0$, c'est à dire qu'il n'y ait pas de valeur critique de la 2de sorte. C'est ce que nous voulions établir.

En appliquant le raisonnement du § 1, on voit donc qu'il sera toujours possible de faire disparaître les valeurs critiques de la 2de sorte.

C'est ce que nous pouvons exprimer en disant qu'on peut toujours par la courbe double faire passer p surfaces distinctes d'ordre $n-2$, en ne considérant pas comme distinctes les surfaces $f_1=0$, $f_2=0$, ..., $f_n=0$ s'il y a entre les 1ers membres une relation linéaire identique dont les coëfficients sont des polynômes entiers homogènes en y et t.

Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Von Leon Lichtenstein in Berlin.

1. In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, die ich vor kurzem an einer anderen Stelle veröffentlicht habe, ergänzt und erweitert werden.[1])

Es sei (P) irgendeine im Endlichen gelegene lineare meßbare Menge von Punkten. Ich bezeichne im folgenden mit

$$\int_L^{(P)}\varphi(x)dx \text{ und } \int_{x_1 L}^{x_2}\varphi(x)dx$$

die über die Menge (P) oder das Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2 \tag{1}$$

erstreckten Lebesgue'schen Integrale. Es sei (N) irgendeine in dem Intervalle (1) gelegene Menge vom Maße (mesure) Null, $C(N)$ die zu (1) gehörige Komplementärmenge von (N). Da die Punkte von (N) in eine abzählbar unendlich große Anzahl von Intervallen von beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden können, so liegen in jedem noch so kleinen Teilintervalle von (1) unendlich viele Punkte von $C(N)$.

Es sei $\varphi(x)$ eine in $C(N)$ erklärte beschränkte Funktion. Wir wählen im Innern des Intervalles (1) eine beliebige Folge wachsender Größen

$$x^{(2)},\ x^{(3)},\ \ldots,\ x^{(n-1)}$$

und setzen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen

$$x^{(1)}=x_1,\quad x^{(n)}=x_2.$$

1) Vgl. Über die Integration eines bestimmten Integrals in bezug auf einen Parameter, Göttinger Nachrichten. 1910.

Digitized by Google

Nunmehr bilden wir den Ausdruck

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} (x^{(i)} - x^{(i-1)})\, \psi(\xi_{i-1}), \tag{2}$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ beliebige entsprechend in den Intervallen

$$(x^{(1)}, x^{(2)}),\ (x^{(2)}, x^{(3)}),\ \ldots,\ (x^{(n-1)}, x^{(n)})$$

gelegene Punkte von $C(N)$ bedeuten. Es sei σ der größte aller Werte $x^{(2)} - x^{(1)}$, $x^{(3)} - x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} - x^{(n-1)}$. Nähert sich S_n bei verschwindendem σ einem von der speziellen Wahl der Werte $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{n-1}$ unabhängigen Grenzwerte, so sagen wir: $\psi(x)$ ist in der Menge $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Den Grenzwert selbst bezeichnen wir mit $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$.

Wir denken uns jetzt $\psi(x)$ in den Punkten der Menge N beliebig definiert. Die nunmehr in dem ganzen Intervalle (1) erklärte Funktion $\psi(x)$ braucht daselbst (auch wenn sie beschränkt ist) nicht notwendig im Riemannschen Sinne integrierbar zu sein. *Sie ist es aber sicher* (auch wenn sie nicht beschränkt ist) *im Sinne von Herrn Lebesgue. Es ist*

$$\int^{C(N)} \psi(x)\,dx = \int_{L}^{C(N)} \psi(x)\,dx = \int_{x_1 L}^{x_2} \psi(x)\,dx.^{1}) \tag{3}$$

1) Vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, p. 112. Herr Lebesgue beweist, daß jede in dem Intervalle (1) im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion daselbst auch im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Der Beweis der Beziehung (3) läßt sich, in Anlehnung an die Betrachtungen von Herrn Lebesgue, wie folgt führen:

Die Funktion $\psi(x)$ ist zunächst, wie gesagt, nur in $C(N)$ erklärt. Ohne eine Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\psi(x) > a > 0$ voraussetzen. Man beweist nun, wie bei Lebesgue p. 23—29, daß die Gesamtheit derjenigen Punkte von $C(N)$, in denen die Funktion $\psi(x)$ unstetig ist, eine Menge N_1 vom Maße Null bildet. Nunmehr sei $\psi(x)$ in allen Punkten von (N) gleich Null gesetzt. Es sei α eine beliebige positive Zahl. Betrachten wir die Menge $E(\alpha \gtreqless \psi(x))$ derjenigen Punkte von (1), in denen $\psi(x) \geqq \alpha$ ist. Die Häufungsstellen dieser Menge sind, wenn sie der Menge $E(\alpha \leqq \psi(x))$ selbst nicht angehören, entweder Punkte von N_1 oder Punkte der Menge N. Bis auf eine Menge vom Maße Null ist also die Menge $E(\alpha \leqq \psi(x))$ abgeschlossen (fermée), mithin sicher meßbar. Das Integral $\int_L^{C(N)} \psi(x)\,dx = \int_L \psi(x)\,dx$ ist also vorhanden. Daß dieses Integral dem Riemannschen Integrale $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$ gleich ist, läßt sich wie folgt zeigen: Wir teilen das Intervall (1) in $n-1$ Teilintervalle $(x^{(i-1)}, x^{(i)})$, $(x^{(1)} = x_1,\ x^{(n)} = x_2)$ ein. Es sei M_i die obere, m_i die untere Grenze von $\psi(x)$ in dem Intervalle $(x^{(i-1)}, x^{i})$. Das Integral $\int_L \psi(x)\,dx$ bleibt unverändert, wenn wir vorübergehend $\psi(x)$ in den zu (x^{i-1}, x^{i}) gehörigen Punkten der Menge N gleich m_i setzen. Nunmehr finden wir die Ungleichheitsbedingung

$$\sum m_i (x^{(i)} - x^{(i-1)}) \gtreqless \int_L \psi(x)\,dx \leqq \sum M_i (x^{(i)} - x^{(i-1)}).$$

Digitized by Google

I. *Es sei jetzt $f(x, y)$ eine für alle x in der Menge $C(N)$ und alle y in einer im Endlichen gelegenen meßbaren Menge (M) erklärte beschränkte Funktion von x und y. Die Funktion $f(x, y)$ möge in bezug auf y im Riemannschen, in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar sein.*

Alsdann ist das Integral $\int_{(M)}^{C(N)} f(x, y)\,dx$ in (M) im Lebesgueschen Sinne, das Integral $\int_{L}^{(M)} f(x,y)\,dy$ in der Punktmenge $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$(4) \qquad \int_{L}^{(M)} dy \int^{C(N)} f(x, y)\,dx = \int^{C(N)} dx \int_{L}^{(M)} f(x, y)\,dy.^{1})$$

Der Beweis läßt sich ganz wie in meiner vorhin zitierten Arbeit durchführen.

Es ist

$$(5) \int^{C(N)} f(x, y)\,dx = \lim_{\delta = 0} [f(\xi_1, y)(x^{(2)} - x^{(1)}) + f(\xi_2, y)(x^{(3)} - x^{(2)}) + \ldots + f(\xi_{n-1}, y)\,(x^{(n)} - x^{(n-1)})],$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ beliebige in den Intervallen $(x^{(1)}, x^{(2)})$, $(x^{(2)}, x^{(3)}), \ldots,$ $(x^{n-1}, x^{(n)})$ gelegene Werte der Menge $C(N)$ bedeuten. Der eingeklammerte Ausdruck stellt nun eine in (M) im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion von y dar. Da überdies

$$(6) \quad |f(\xi_1, y)(x^{(2)} - x^{(1)}) + \ldots + f(\xi_{n-1}, y)(x^{(n)} - x^{(n-1)})| \leqq (x_2 - x_1) \cdot \text{obere Grenze von } |f(x, y)|$$

Bei unbegrenzt wachsendem n nähern sich die beiden Summen derselben Grenze $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$. Hiermit ist aber die Beziehung (3) bereits bewiesen.

Man kann leicht Funktionen $\psi(x)$ angeben, die so beschaffen sind, daß $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$ existiert, während $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx$ nicht vorhanden ist. Es sei z. B. N die Menge aller rationalen Punkte des Intervalles (1), $\psi(x)$ in $C(N)$ gleich einer beliebigen stetigen positiven Funktion, in N aber gleich Null. Offenbar ist $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$ vorhanden. Da aber $\psi(x)$ in (1) total diskontinuierlich ist, so ist $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx$ nicht vorhanden. So ist die bekannte Funktion, die in allen rationalen Punkten den Wert Null, in allen übrigen Punkten aber den Wert 1 hat, in dem Intervalle (1) im Riemannschen Sinne nicht integrierbar. Das Integral $\int^{C(N)} \psi(x)\,dx$ ist aber vorhanden und gleich $x_2 - x_1$. Denselben Wert hat auch das Integral $\int_{x_1 L}^{x_2} \psi(x)\,dx$.

1) Daß das Integral $\int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\,dy$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, falls $f(x, y)$ im Gebiete $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ in bezug auf x im Riemannschen, in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist, ist zuerst von Herrn H. W. Young auf anderem Wege bewiesen worden. Vgl. H. W. Young, On parametric integration, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1910, S. 125—149.

Digitized by Google

ist, so ist nach einem bekannten Satze von Herrn Lebesgue die Funktion $\int^{C(N)} f(x,y)\,dx$ in (M) im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$(7)\quad \int_L^{(M)} dy \int^{C(N)} f(x,y)\,dx = \lim_{\delta=0}\Big[(x^{(2)}-x^{(1)})\int_L^{(M)} f(\xi_1,y)\,dy + (x^{(3)}-x^{(2)})\int_L^{(M)} f(\xi_2,y)\,dy + \cdots$$

$$\cdots + (x^{(n)}-x^{(n-1)})\int_L^{(M)} f(\xi_{n-1},y)\,dy\Big] = \int^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f(x,y)\,dy.$$

Es ist zu beachten, daß man bei der Bildung des Riemannschen Integrals $\int^{C(N)} dx\Big[\int_L^{(M)} f(x,y)\,dy\Big]$ die Teilpunkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ aus den Punkten der Menge $C(N)$ zu wählen hat.[1])

2. Es möge jetzt vorübergehend $F(x,y)$ eine in dem Gebiete $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ erklärte beschränkte Funktion bedeuten, die sowohl in bezug auf x, als auch in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Wann sind die beiden Integrale

$$(8)\qquad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\,dx \text{ und } \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy$$

vorhanden?

Unsere Entwicklungen geben eine (wenn auch keine definitive) Antwort auf diese Frage.

Ist $F_y(x,y)$, als Funktion von x betrachtet, abgesehen von einer Menge (Q) der Werte von y vom Maße Null, in dem Gebiete $C(N)$, worin N eine Menge der Werte x vom Maße Null bezeichnet, im Riemannschen Sinne integrierbar, so sind die beiden Integrale (8) vorhanden (und einander gleich).

In der Tat ist im vorliegenden Falle nach (3)

$$\int_L^{C(Q)} dy \int^{C(N)} F(x,y)\,dx = \int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\,dx,$$

$$\int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} F(x,y)\,dy = \int^{C(N)} dx \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy.$$

Hieraus und aus der Gleichung (4) folgt

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy.$$

---

1) Es sei R irgendeine in (1) gelegene überall dichte Menge. Man kann das über R erstreckte Riemannsche Integral ebenso, wie vorhin für die Menge $C(N)$, definieren und erhält durch ganz analoge Betrachtungen die Beziehung

$$\int^{(R)} dx \int_L^{(M)} f(x,y)\,dy = \int_L^{(M)} dy \int^{(R)} f(x,y)\,dx.$$

Digitized by Google

In unserer Aussage kann man natürlich die Variablen x und y miteinander vertauschen.

Aus dem Satze I ergibt sich leicht der folgende Satz:

II. *Es sei Q eine Menge vom Maße Null in dem Intervalle*

$$y_1 \leqq y \leqq y_2. \tag{9}$$

Es sei $f(x, y)$ eine für alle x in $C(N)$ und alle y in $C(Q)$ erklärte beschränkte Funktion von x und y. Die Funktion $f(x, y)$ möge sowohl in bezug auf x, als auch in bezug auf y im Riemannschen Sinne integrierbar sein. Alsdann ist $\overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx$ in $C(Q)$ und $\overset{C(Q)}{\int} f(x, y)\,dy$ in $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\overset{C(Q)}{\int} dy \overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx = \overset{C(N)}{\int} dx \overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy. \tag{10}$$

Dem Satze I zufolge sind in der Tat die beiden Integrale

$$\overset{C(N)}{\int_L} f(x,y)\,dx = \overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx \text{ und } \overset{C(Q)}{\int_L} f(x,y)\,dy = \overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy$$

entsprechend in $C(Q)$ und $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\overset{C(Q)}{\int} dy \overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx = \overset{C(Q)}{\int} dy \overset{C(N)}{\int_L} f(x,y)\,dx = \overset{C(N)}{\int_L} dx \overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy = \overset{C(N)}{\int} dx \overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy. \tag{11}$$

Sind M und Q *vom Inhalte* (étendue) Null, so erhält man, wie man leicht einsieht, einfacher

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\int}} dx \overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy = \overset{y_2}{\underset{y_1}{\int}} dy \overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx. \tag{12}$$

Hierbei sind die Integrale $\overset{C(Q)}{\int} f(x,y)\,dy$ und $\overset{C(N)}{\int} f(x,y)\,dx$ zu beschränkten, in allen Punkten der Intervalle (1) und (9) erklärten Funktionen von x oder y ergänzt zu denken.

Ist $f(x, y)$, als Funktion *zweier Variabeln* aufgefaßt, im Lebesgueschen Sinne integrierbar, so existieren, wie man weiß, die beiden Integrale

$$\overset{y_2}{\underset{y_1 L}{\int}} dy \overset{x_2}{\underset{x_1 L}{\int}} f(x,y)\,dx \text{ und } \overset{x_2}{\underset{x_1 L}{\int}} dx \overset{y_2}{\underset{y_1 L}{\int}} f(x,y)\,dy$$

und sind einander gleich:

$$\overset{y_2}{\underset{y_1 L}{\int}} dy \overset{x_2}{\underset{x_1 L}{\int}} f(x,y)\,dx = \overset{x_2}{\underset{x_1 L}{\int}} dx \overset{y_2}{\underset{y_1 L}{\int}} f(x,y)\,dy.^1) \tag{13}$$

1) Vgl. Fubini, Sugli integrali multipli, Rendiconti dell r. Acc. dei Lincei, 1907, p. 608—614, de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de

Digitized by Google

Ist $f(x,y)$ in dem Gebiete

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad y_1 \leqq y \leqq y_2 \tag{14}$$

für alle x in bezug auf y und für alle y in bezug auf x im Riemannschen Sinne integrierbar, so folgt aus dem Satze von Herrn W. H. Young (vgl. die Fußnote 1) auf der S. 57), daß die beiden Integrale

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \text{ und } \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

existieren. Hieraus und aus der Beziehung (13) folgt nunmehr, daß

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.^{1}) \tag{15}$$

Unsere Betrachtungen ergeben ein weiter reichendes Resultat, *ohne irgend etwas über die Existenz des Integrals* $\iint_L f(x,y)\,dx\,dy$ *vorauszusetzen.*

Nun aber umgekehrt:

Es sei $\varphi(x,y)$ eine in dem Gebiete (14) erklärte beschränkte Funktion, die sowohl in bezug auf x, als auch in bezug auf y im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Genügen diese Voraussetzungen für die Existenz des Doppelintegrals $\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1 L}^{x_2} \varphi(x,y)\,dx\,dy$? Unsere Entwicklungen geben auf diese Frage keine Antwort.

3. Für die weiteren Betrachtungen haben wir den folgenden Hilfssatz nötig. Es sei

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

eine Folge positiver, beschränkter, im Lebesgueschen Sinne integrierbarer Funktionen, die in dem Intervalle (1) gegen eine nicht notwendig beschränkte Funktion $f(x)$ konvergieren. Die Funktion $f(x)$ ist meßbar.[2])

Das Integral

$$\int_{x_1 L}^{x_2} f(x)\,dx$$

Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1910, p. 768—798. Es ist hierbei zu bemerken, daß im allgemeinen für eine gewisse Menge der Werte y vom Maße Null das Integral $\int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx$ nicht existiert. Diese Werte sind bei der Bildung des Integrals $\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx$ auszuschließen. Analoges ist über das Integral $\int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy$ zu bemerken.

1) Vgl. W. H. Young, On a Change of Order of Integration in an Improper Repeated Integral, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1910, p. 361—376 (siehe insbesondere p. 361—362).

2) Vgl. Lebesgue, loc. cit. p. 111.

Digitized by Google

ist stets vorhanden, wenn auch nicht notwendig endlich. Es sei

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \ldots \leqq f(x).$$

Alsdann ist stets

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_1 L}^{x_2} f_n(x)\, dx = \int_{x_1 L}^{x_2} f(x)\, dx. \quad (16)$$ [1])

Die Sätze I und II lassen sich auf uneigentliche Integrale übertragen.

Es sei $\psi(x)$ eine in der Menge $C(N)$ erklärte, nicht beschränkte Funktion. Es mögen $N_1, N_2, \ldots N_k, \ldots$ und $M_1, M_2, \ldots M_k, \ldots$ zwei Reihen unbegrenzt wachsender positiver Zahlen bedeuten. Wir führen eine unendliche Reihe von Funktionen durch folgende Festsetzungen ein. Es ist $\psi_k(x) = \psi(x)$ in allen Punkten, in denen $-M_k \leqq \psi(x) \leqq N_k$; ferner ist $\psi_k(x) = N_k$, wenn $\psi(x) > N_k$, $\psi_k(x) = -M_k$, wenn $\psi(x) < -M_k$. Nunmehr definieren wir in Anlehnung an Herrn de la Vallée Poussin das uneigentliche Integral $\int^{C(N)} \psi(x)\, dx$ durch die Gleichung

$$\int^{C(N)} \psi(x)\, dx = \lim_{k=\infty} \int^{C(N)} \psi_k(x)\, dx. \quad (17)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $\psi_k(x)$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind und daß der Grenzwert (17) existiert und von der besonderen Wahl der Größen N_k und M_k unabhängig ist. Dieses uneigentliche Integral wird im folgenden durch den unten angehängten Buchstaben V gekennzeichnet.

III. *Es sei $f(x)$ eine für alle x in $C(N)$ und alle y in $C(Q)$ erklärte nicht negative nicht beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:*

Für alle y in $C(Q)$ ist das Integral $J_2(y) = \int_V^{C(N)} f(x,y)\, dx$ vorhanden.

Für alle x in $C(N)$ ist das Integral $J_1(x) = \int_V^{C(Q)} f(x,y)\, dy$ vorhanden.

Es wird behauptet:

$J_1(x)$ und $J_2(y)$ sind entsprechend in $C(N)$ und $C(Q)$ meßbare Funktionen von x und y.

Die beiden Integrale

$$\int_L^{C(Q)} J_2(y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\, dx \quad (18)$$

und

$$\int_L^{C(N)} J_1(x)\, dx = \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\, dy \quad (19)$$

1) Vgl. W. H. Young, On a Change of Order etc., p. 362—363.

Digitized by Google

sind stets zugleich endlich oder bestimmt unendlich. Im ersteren Falle sind sie einander gleich.

$$(20) \qquad \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx = \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy.^{1})$$

Es sei, wie oben, gesetzt:

$$f_k(x,y) = f(x,y), \text{ wenn } f(x,y) \leqq N_k,$$
$$f_k(x,y) = N_k, \text{ sobald } f(x,y) > N_k.$$

Dem Satze II zufolge sind die beiden Integrale

$$\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx \text{ und } \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy$$

entsprechend in den Mengen $C(Q)$ und $C(N)$ im Riemannschen, somit a fortiori im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Es ist ferner

$$(21) \qquad \int_L^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy.$$

Die Integrale

$$\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

stellen eine in der Menge $C(Q)$ konvergente Reihe meßbarer Funktionen dar. Die Grenzfunktion $\int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx$ ist in $C(Q)$ meßbar. Desgleichen ist $\int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy$ in $C(N)$ meßbar. Die Integrale $\int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx$ stellen in $C(Q)$ eine konvergente monoton wachsende Reihe von Funktionen dar. Dem zuletzt betrachtetem Hilfsatze zufolge ist

$$(22) \qquad \lim_{k=\infty} \int_L^{C(Q)} dy \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(Q)} dy \lim_{k=\infty} \int^{C(N)} f_k(x,y)\,dx = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx.$$

Hieraus und aus der Gleichung (21) ergibt sich nunmehr

$$(23) \qquad \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} dx \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \lim_{k=\infty} \int^{C(Q)} f_k(x,y)\,dy =$$
$$= \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy.$$

1) Vgl. den entsprechenden Satz von Herrn W. H. Young, On a Change usw. p. 373.

Digitized by Google

Da die Mengen N und Q vom Maße Null sind, so kann man in ihnen den in (23) zu integrierenden Funktionen beliebige Werte geben und einfacher schreiben:

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 L}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1 L}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x,y)\,dy. \tag{24}$$

Da $f(x,y)$ nicht negativ ist, so sind die beiden Integrale (24) zugleich endlich, oder bestimmt unendlich.[1])

Es sei nunmehr $f(x,y)$ nicht mehr $\geqq 0$. Die Aussage des Satzes III ist alsdann wie folgt abzuändern.

IV. *Die Integrale*

$$J_1(x) = \int_V^{C(Q)} f(x,y)\,dy,$$

$$J_2(y) = \int_V^{C(N)} f(x,y)\,dx$$

sind in C(N) und C(Q) meßbare Funktionen von x und y. Hat eins der beiden Integrale

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} |f(x,y)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy \tag{25}$$

einen bestimmten endlichen Wert, so haben auch die beiden Integrale

$$\int_L^{C(N)} J_1(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_L^{C(Q)} J_2(x)\,dy \tag{26}$$

bestimmte endliche Werte und sind einander gleich.[2])

Es sei

$$f^{(1)}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{wenn } f > 0, \\ 0, & \text{wenn } f \leqq 0, \end{cases}$$

$$f^{(2)}(x,y) = \begin{cases} -f(x,y), & \text{falls } f < 0, \\ 0, & \text{falls } f \geqq 0. \end{cases} \tag{27}$$

Wir finden

$$f(x,y) = f^{(1)}(x,y) - f^{(2)}(x,y) \quad \text{und} \quad |f(x,y)| = f^{(1)}(x,y) + f^{(2)}(x,y). \tag{28}$$

Die Integrale (25) haben einen endlichen Wert. Offenbar haben die Integrale, die man erhält, wenn man in (25) für $|f(x,y)|$ entsprechend

---

1) Der Satz III gilt unverändert, wenn die Funktion $f(x,y)$ Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, jedoch einer der beiden Ungleichheitsbedingungen $f(x,y) > -m$, oder $f(x,y) < n$, in denen m und n gewisse endliche Größen bedeuten, genügt.

2) Vgl. hierzu W. H. Young, On a Change usw. S. 363—364.

Digitized by Google

$f^{(1)}(x, y)$ und $f^{(2)}(x, y)$ einsetzt, dieselbe Eigenschaft. Dem Satze III zufolge ist

$$(29)\quad \begin{cases} \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f^{(1)}(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f^{(1)}(x, y)\, dx, \\ \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f^{(2)}(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f^{(2)}(x, y)\, dx. \end{cases}$$

Hieraus und aus (28) folgt schließlich

$$(30)\quad \int_L^{C(N)} dx \int_V^{C(Q)} f(x, y)\, dy = \int_L^{C(Q)} dy \int_V^{C(N)} f(x, y)\, dx.$$

Der Satz IV gilt, wie man sich leicht überzeugt, stets, wenn das Integral $\int_V^{C(N)} |f(x, y)|\, dx$ eine in $C(Q)$ beschränkte Funktion von y, oder das Integral $\int_V^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy$ eine in $C(N)$ beschränkte Funktion von x darstellt.[1])

Durch eine geringfügige Abänderung des vorhin angewandten Beweisverfahrens erhält man den folgenden Satz:

V. *Die in dem Gebiete* (14) *erklärte nicht beschränkte Funktion* $f(x, y)$ *möge für alle* y *in* $C(Q)$ *das uneigentliche Integral* $\int_V^{C(N)} f(x, y)\, dx$ *und für alle* x *in* $C(N)$ *das Lebesguesche Integral* $\int_{y_1}^{y_2} \int_L f(x, y)\, dy$ *besitzen.*

Hat eins der beiden Integrale

$$(31)\quad \int_{y_1}^{y_2} \int_L^{C(N)} |f(x, y)|\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\, dy$$

einen bestimmten endlichen Wert, so haben die beiden Integrale

$$(32)\quad \int_{y_1}^{y_2} \int_L^{C(N)} f(x, y)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

bestimmte endliche Werte und sind einander gleich.

---

1) Vergleiche den Satz III meines Aufsatzes in den Göttinger Nachrichten. An jener Stelle habe ich vorausgesetzt, daß die *beiden* Integrale $\int_{x_1}^{x_2} |f(x, y)|\, dx$ und $\int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)|\, dy$ beschränkte Funktionen darstellen.

Digitized by Google

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn eins der beiden Integrale

$$(33) \qquad \int_{V}^{C(N)} |f(x,y)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1 L}^{y_2} |f(x,y)|\,dy$$

eine beschränkte Funktion von y oder von x darstellt.

Hat die Funktion $f(x,y)$ eine endliche untere oder endliche obere Grenze, so sind die beiden Integrale (32) *stets entweder endlich und einander gleich, oder bestimmt unendlich.*

4. Wir geben nunmehr den folgenden Satz an[1]):

VI. *Es sei $f(x,y)$ eine in dem Gebiete*

$$(34) \qquad \begin{aligned} x_1 &\lessgtr x, \\ y_1 &\lessgtr y \leqq y_2 \end{aligned}$$

erklärte nicht notwendig beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:

Für alle y in $C(Q)$ und alle $X \geqq x_1$ sind die Integrale

$$(35) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1 V}^{X} f(x,y)\,dx, \quad \int_{V}^{C(Q)} f(x,y)\,dy, \\ \displaystyle\int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx = \lim_{X=\infty} \int_{x_1 V}^{X} |(f(x,y)|\,dx \end{cases}$$

vorhanden. Hat eins der beiden Integrale

$$(36) \qquad \int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy = \lim_{X=\infty} \int_{x_1 L}^{X} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x,y)|\,dy \quad \text{und} \quad \int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx$$

einen bestimmten endlichen Wert, so sind die beiden Integrale

$$(37) \qquad \int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_{V}^{C(Q)} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

vorhanden und einander gleich.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es eine Zahl M gibt, sodaß für alle $X > x_1$ und alle y in (34)

$$(38) \qquad \int_{x_1 V}^{X} |f(x,y)|\,dx < M$$

ist. *Nimmt die Funktion $f(x,y)$ für alle $X \geqq x_1$ und alle y in $C(Q)$ nur die Werte eines Vorzeichens an, so haben die beiden Integrale* (37) *bestimmte endliche Werte und sind einander gleich, oder sie sind bestimmt unendlich.*

---

1) Vgl. zu V und VI die Sätze IV und V meiner Göttinger Arbeit, sowie die Sätze von Herrn H. W. Young, On a Change of Order . . ., S. 363—369.

Digitized by Google

Es möge zunächst das Integral

$$\int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy \tag{39}$$

einen endlichen Wert haben. Damit ist stillschweigend gesagt, daß das Integral

$$\int_{x_1 L}^{X} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy \tag{40}$$

eine beschränkte Funktion von X darstellt. Dem Satze III zufolge ist daher

$$\int_{x_1 L}^{X} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy = \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx, \tag{41}$$

somit

$$\int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy = \lim_{X=\infty} \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx. \tag{42}$$

Das Integral

$$\int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx$$

ist eine in $C(Q)$ monoton wachsende Funktion von X. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_{V}^{C(Q)} |f(x, y)|\, dy &= \lim_{X=\infty} \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx = \int_{L}^{C(Q)} dy \Big[\lim_{X=\infty} \int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx \Big] \\ &= \int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x, y)|\, dx.^{1}) \end{aligned} \tag{43}$$

Es möge jetzt zweitens der Ausdruck

$$\int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x, y)|\, dx \tag{44}$$

einen endlichen Wert haben. Dem Satze III zufolge ist für alle X

$$\int_{L}^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x, y)|\, dx \tag{45}$$

vorhanden und endlich, oder bestimmt unendlich. Im vorliegenden Falle ist

---

1) Bei der Ausführung des Grenzprozesses ist für X eine beliebige Folge diskreter positiver ins Unendliche wachsender Zahlen einzusetzen.

Digitized by Google

(45) für alle X gewiß endlich, andernfalls das Integral (44) a fortiori unendlich groß sein würde. Wir finden daher

$$\int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{\infty} |f(x,y)|\,dx = \lim_{X=\infty} \int_L^{C(Q)} dy \int_{x_1 V}^{X} |f(x,y)|\,dx =$$

(46)

$$= \lim_{X=\infty} \int_{x_1 L}^{X} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dx = \int_{x_1 L}^{\infty} dx \int_V^{C(Q)} |f(x,y)|\,dx .$$

Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß in jedem der beiden soeben betrachteten Fälle a fortiori die beiden Integrale (37) existieren und einander gleich sind.

Es möge schließlich $f(x, y)$ nur Werte eines Vorzeichens annehmen; es sei z. B. $f(x, y) \geqq 0$, somit $f(x, y) = |f(x, y)|$. Es ist dann einleuchtend, daß die Integrale (37) nur entweder endlich, oder bestimmt unendlich sein können. Ist ein Integral endlich, so ist, wie wir bereits gesehen haben, auch das andere Integral endlich. Hieraus folgt bereits, daß die Integrale (37) nur beide zugleich unendlich groß sein können.

Es sei nun zum Schluß bemerkt, daß der vorstehende Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn man als das Gebiet der Variablen x nicht die Strecke $(x_1, +\infty)$, sondern eine Punktmenge annimmt, die so beschaffen ist, daß ihre zu $(x_1, +\infty)$ gehörige Komplementärmenge in jedem in (x_1, ∞) enthaltenen Teilintervalle vom Maße Null ist.

5. Es sei $f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen, die entsprechend in den in (1) gelegenen Gebieten $C(N_1)$, $C(N_2), \ldots$ vom Maße $x_2 - x_1$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind und daselbst den Ungleichheitsbedingungen

$$|f_k(x)| < m, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

worin m eine gewisse positive Größe bedeutet, genügen. In dem Gebiete $C(N_1 + N_2 + \cdots)$ mögen die Funktionen $f_k(x)$ gegen eine Grenzfunktion $f^{(1)}(x) = \lim_{k=\infty} f_k(x)$ konvergieren. In Anlehnung an die bekannte Klassifikation von Herrn Baire kann man die Funktion $f^{(1)}(x)$ als eine Funktion der Klasse I′ bezeichnen. Die in der Menge $C(N_1 + N_2 + \cdots)$ vom Maße $x_2 - x_1$ definierte Funktion $f^{(1)}(x)$ ist daselbst beschränkt.

Es sei $f_k^{(1)}(x)$, $(k = 1, 2, \ldots)$, eine unendliche Folge von Funktionen der Klasse I′, die entsprechend in den Gebieten $C(N_k')$, $(k = 1, 2, \ldots)$, vom Maße $x_2 - x_1$ definiert sind und daselbst einer Ungleichheitsbedingung

$$|f_k^{(1)}(x)| < m', \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

genügen. In dem Gebiete $C(N_1' + N_2' + \cdots)$ mögen diese Funktionen gegen eine Grenzfunktion $f^{(2)}(x) = \lim_{k=\infty} f_k^{(1)}(x)$ konvergieren. Die Funktion $f^{(2)}(x)$ möge eine Funktion der Klasse II′ heißen.

So geht man weiter. Offenbar sind die Funktionen aller Klassen im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Alle beschränkten Funktionen der Baireschen Klassifikation sind unter den hier betrachteten Funktionen enthalten.

Digitized by Google

Es läßt sich nunmehr ein Kriterium für die Integration eines Lebesgueschen Integrals in bezug auf einen Parameter angeben, das über das in dem Satze I angegebene hinausgeht.

VII. *Es sei $f(x, y)$ eine für alle Werte von x in $C(N)$ und alle y in (M) definierte beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:*

Als Funktion von x aufgefaßt, gehört $f(x, y)$ einer bestimmten Klasse von der Ordnung ν' an. Als Funktion von y aufgefaßt, ist $f(x, y)$ schlechthin im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

Es wird behauptet:

Die Integrale

$$\int_L^{(M)} f(x, y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx$$

sind im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f(x, y)\,dy = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx. \tag{47}$$

Wir beweisen, daß, wenn diese Behauptungen für alle Funktionen der Klasse $\nu' - 1$ gelten, sie auch für Funktionen der Klasse ν' gültig bleiben. Es sei also für alle x in $C(N)$ und alle y in (M)

$$f(x, y) = \lim_{k=\infty} f_k(x, y), \quad |f_k(x, y)| < m_0.$$

Offenbar sind die Funktionen

$$\int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx$$

und

$$\int_L^{(M)} f(x, y)\,dy = \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy$$

im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Nach der Voraussetzung ist

$$\int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{48}$$

daher auch

$$\lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} f_k(x, y)\,dy = \int_L^{C(N)} dx \int_L^{(M)} f(x, y)\,dy =$$
$$= \lim_{k=\infty} \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx = \int_L^{(M)} dy \lim_{k=\infty} \int_L^{C(N)} f_k(x, y)\,dx = \int_L^{(M)} dy \int_L^{C(N)} f(x, y)\,dx. \tag{49}$$

Digitized by Google

Da nun nach I die zu beweisende Behauptung für Funktionen $f(x, y)$, die in $C(N)$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind, gilt, so gilt sie allgemein für Funktionen aller Klassen.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich sinngemäß auf die Integrale nicht beschränkter Funktionen übertragen.

Die Betrachtungen dieser Arbeit, insbesondere die Sätze I und II dürften für die Theorie der *linearen Integralgleichungen* nicht ohne Interesse sein.

Es sei

$$\varphi(s) = \int_{aL}^{b} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{50}$$

eine lineare nicht homogene Integralgleichung. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall und nehmen die Funktionen $f(s)$ und $K(s, t)$ als beschränkt an. In der Regel werden folgende Voraussetzungen gemacht: $K(s, t)$ stetig, $f(s)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar. *Es genügt vorauszusetzen: $K(s, t)$ als Funktion von s für alle t in $C(Q)$ und als Funktion von t für alle s in $C(N)$ entsprechend in den Punktmengen $C(N)$ und $C(Q)$ im Riemannschen Sinne integrierbar, $f(s)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar.*[1])

In der Tat kommt es bei der ersten Iteration darauf an, die Zulässigkeit der Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int_{aL}^{b} dt \int_{aL}^{b} K(s, t)K(t, t_1)f(t_1)dt_1 = \int_{aL}^{b} dt_1 \int_{aL}^{b} K(s, t)\,K(t, t_1)\,f(t_1)\,dt \tag{51}$$

nachzuweisen. Dem Satze I zufolge ist

$$\int^{C(N+Q)} dt \int_{L}^{C(Q)} K(s, t)K(t, t_1)f(t_1)dt_1 = \int_{L}^{C(Q)} dt_1 \int^{C(N+Q)} K(s, t)K(t, t_1)f(t_1)dt. \tag{52}$$

Hierfür kann man augenscheinlich die zu beweisende Beziehung (51) setzen.

Der erste iterierte Kern

$$K^{(1)}(s, t) = \int^{C(N+Q)} K(s, r)K(r, t)\,dr = \int_{aL}^{b} K(s, r)K(r, t)\,dr \tag{53}$$

ist nach II in bezug auf s in $C(N)$, in bezug auf t in $C(Q)$ im Riemannschen Sinne integrierbar, hat somit genau dieselben Eigenschaften wie der Kern $K(s, t)$ selbst.

---

1) Es wird hier $a = x_1 = y_1$, $b = x_2 = y_2$ angenommen.

Digitized by Google

Zum Gedächtnis von Dr. Arthur Hamburger.

Von E. Lampe.

Der Aufforderung des Herrn Vorsitzenden, unserem in dem jugendlichen Alter von dreißig Jahren plötzlich uns entrissenen Mitgliede, dem Dr. Arthur Hamburger, in der heutigen Sitzung einige Worte der Erinnerung zu widmen, bin ich aus einem gewissen Gefühle der Verpflichtung gern nachgekommen. Habe ich doch den Vater, unser vor kaum acht Jahren verstorbenes hochgeschätztes Mitglied, zuerst in einem Kolleg von Weierstraß schon im Wintersemester 1859/60 kennen gelernt und bin ihm später als gewissenhaftem und zuverlässigem Mitarbeiter des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik freundschaftlich näher getreten, konnte ihn dann auch endlich als Kollegen an der Technischen Hochschule begrüßen. Dadurch wurde von selbst ein freundschaftliches Verhältnis zu seiner Familie angebahnt, und besonders nach dem Tode des kenntnisreichen und bescheidenen Gelehrten und Freundes fühlte ich mich veranlaßt, dem begabten und wissensdurstigen Sohne, der auf den Wunsch seines Vaters an meinen Übungen zur höheren Mathematik teilgenommen und sich eifrig darin betätigt hatte, mit meinem Rate zur Seite zu stehen.

Das kurze Leben von Arthur Hamburger verlief ohne besonders bemerkenswerte Vorgänge in den üblichen Bahnen. Am 6. März 1881 in Berlin geboren, besuchte er von Ostern 1887 an drei Jahre lang die hiesige jüdische Knabenschule, an der sein Vater bis zum Tode 1903 als Lehrer gewirkt hat. Das Friedrichsgymnasium durchlief er von Ostern 1890 an in regelmäßiger Weise und verließ es zu Ostern 1899 mit einem sehr guten Reifezeugnis, das für den achtzehnjährigen Jüngling wegen seines Fleißes, seines sittlichen Verhaltens und seiner Begabung eine gute Zukunft erhoffen ließ. Auf der Berliner Friedrich-Wilhelms-Universität, die er nun bezog, studierte er Mathematik, Physik und Philosophie bis Ostern 1903 mit Unterbrechung von einem Semester im Winter 1901/2, wo er beurlaubt war.

Zur Hausarbeit aus der Philosophie hatte er für die nun folgende Oberlehrerprüfung als echter Sohn seines Vaters, der ein ausgezeichneter Kenner Kants und Anhänger seiner Lehre vom kategorischen Imperativ war, sich ein Thema über den Königsberger Philosophen erbeten und erhielt als Aufgabe, das Verhältnis von Kausalität und Finalität nach der Kantischen Auffassung darzustellen. Auf Grund dieser Arbeit und der in der mündlichen Prüfung bewiesenen umfassenden philosophischen Kenntnisse wurde ihm von seinem Examinator Paulsen die Lehrbefähigung in der philosophischen Propädeutik zuerkannt. Das Thema für die Hausarbeit in der Mathematik, das er von Herrn Schwarz erhielt, ist so interessant, daß sein Vater in der letzten Unterhaltung, die ich mit ihm hatte, mir seine Freude über die hübsche Aufgabe aussprach. Die gelungene Lösung, die der junge Kandidat lieferte, zeigte seine vielseitigen Kenntnisse, wie man sie ihm bei einer ersten oberflächlichen Bekanntschaft kaum zugetraut hätte; daher erlaube ich mir, den Wortlaut dieser Aufgabe, trotz seiner Länge, hier mitzuteilen.

Digitized by Google

Es ist bekannt, daß und wie die Bestimmung der stationären galvanischen Strömung in der leitend betrachteten Oberfläche eines Kreisringes mit kreisförmigem Querschnitt zurückgeführt wird auf die Lösung einer analogen Aufgabe für die Fläche eines Rechtecks, wobei für die Begrenzung desselben gewisse Bedingungen der Periodizität zu erfüllen sind. Die Lösung dieser Aufgabe führt bekanntlich auf elliptische Integrale mit reellem Modul, so daß für die rechnungsmäßige Behandlung keine Schwierigkeit entsteht. Bis jetzt fehlt es an sorgfältig und in hinreichend großem Maßstabe ausgeführten *Zeichnungen*, durch welche eine solche stationäre galvanische Strömung für die Fläche eines Rechtecks (bei Beschränkung der Zahl der Elektroden auf zwei) *zur Anschauung* gebracht werden kann. Es würden hierbei mindestens zwölf Strömungskurven und eine angemessene Zahl von isogonalen Trajektorien derselben zu zeichnen sein. Es wird nun die Aufgabe gestellt: „Für einen passend gewählten Fall sollen die Rechnungen wirklich ausgeführt werden, welche erforderlich sind, um eine Zeichnung der erwähnten Art in nicht zu kleinem Maßstabe ausführen zu können."

Da auch die mündliche Prüfung den Kandidaten als wohlbewandert in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und der Physik erwies, so errang er im Februar 1904 mit der Lehrbefähigung in diesen beiden Fächern und in der philosophischen Propädeutik ein Prüfungszeugnis: „Mit Auszeichnung bestanden."

Während er in der mathematischen Prüfungsarbeit sich als einen gelehrigen Schüler des Herrn Schwarz gezeigt hatte, griff er bei der Wahl des Gegenstandes für seine Inauguraldissertation in dem folgenden Jahre auf das Gebiet der Differentialgleichungen, in das er noch durch den Meister auf diesem Felde L. Fuchs, den Freund seines Vaters, auf der Universität eingeführt war, ein Gebiet, auf dem ja sein Vater, der die Erfolge des Sohnes nicht mehr schauen durfte, die meisten Lorbeeren gepflückt hatte. Aus dem persönlichen Umgange mit Herrn Kneser erwuchsen die Untersuchungen, deren Ergebnisse in der Dissertation niedergelegt sind: „Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung", Berlin 1905. Indem hier Gedanken weiter verfolgt werden, die Poincaré 1886 zuerst angeregt hatte, für die W. Jacobsthal in seiner Dissertation (Straßburg 1899) ein durchgeführtes Beispiel gegeben hatte, nahm Arthur Hamburger ein bezügliches allgemeines Problem auf, welches von Kneser zuerst 1896 behandelt und in nachfolgenden Artikeln tiefer erforscht war. Es betrifft die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)+u\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right)=0,$$

deren Koeffizienten Potenzreihen sind, die in der Umgebung von $x=\infty$ konvergieren. Durch die Substitution

$$y=u\,e^{\frac{1}{2}\int(b_0+b_1/x+b_2/x^2+\ldots)\,dx}$$

wird die Differentialgleichung (A) auf die Form gebracht:

$$\text{(B)} \qquad y''=y\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right).$$

Digitized by Google

A. Hamburger stellt zunächst allgemein eine Reihenentwicklung auf, die formal der Gleichung (B) genügt, und betrachtet die Formen, welche man ihr geben kann, wenn bestimmte Voraussetzungen über die Realität der Koeffizienten getroffen werden. Dann werden diese Reihen mit gewissen Integralen von (B) in Beziehung gesetzt; diese Integrale werden durch die Reihen asymptotisch dargestellt. Der Rest der asymptotischen Darstellung wird in den Fällen abgeschätzt, die von Kneser behandelt sind. Zuletzt wird eine Erörterung über die Abschätzung des Restes im allgemeinen Falle gegeben.

Neue Anregungen zur wissenschaftlichen Beschäftigung mit Gebieten der Mathematik, die unserem Freunde weniger nahe gelegen hatten, besonders mit der Geometrie, erhielt er, als ich ihn zur Mitarbeit am Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik heranzog. Er faßte seine Pflichten hierbei sehr ernst auf und ergänzte durch eifriges Studium die Lücken seines Wissens. Seine Referate waren sachgemäß, und er selbst hatte Freude an dieser Arbeit.

Dem Pflichtbewußtsein, das ihn erfüllte, entsprach es aber, daß er seine Hauptkraft in den Dienst des Lehrerberufes stellte, für den er bis zu seinem Ende begeistert war, und auf dem er bittere Enttäuschungen erfahren mußte. Seine Sprechweise in hoher Fistelstimme und seine etwas eckigen Umgangsformen nebst einer gewissen Hilflosigkeit bei Äußerungen des Übermutes der Schüler bewirkten schon im Seminarjahr an dem Andreas-Realgymnasium, daß sein Unterricht hinter den zu stellenden Anforderungen weit zurückstand. Trotz der entgegenstehenden Bedenken des Seminarleiters wurde er zur Ableistung des Probejahrs an der Luisenstädtischen Oberrealschule zugelassen, und da hier die zu rügenden Erscheinungen weniger hervortraten, so erhielt er nach Ablauf des Probejahrs Ostern 1906 das Zeugnis der Anstellungsfähigkeit. Als Hilfslehrer hat er dann an einer Reihe von Anstalten unterrichtet: Im Sommer 1906 an der Hohenzollernschule zu Schöneberg, vom Schuldienst beurlaubt im Winter 1906/7 als Assistent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, im Sommer 1907 an der Realschule in Weißensee, von Oktober 1907 bis 1908 am Friedrichsgymnasium in Berlin, im Winter 1908/9 an der Goetheschule in Wilmersdorf, im Sommer 1909 am Gymnasium in Luckau, im Winter 1909/10 in Cottbus, endlich zu Anfang des Sommerhalbjahres 1910 am Kaiser-Wilhelm-Realgymnasium in Berlin. An den meisten Stellen hatte er bald mehr, bald weniger mit der Disziplin zu kämpfen, und darunter litt natürlich der Erfolg des Unterrichtes; deshalb erhielt er im Sommer 1910 den Rat, von einer Anstellung als Oberlehrer abzusehen.

Durch solche Mißerfolge niedergedrückt, zog er sich zurück, um zunächst seinen angegriffenen Gesundheitszustand zu kräftigen. Er wog die Pläne ab über die Wege, die er einschlagen könnte, ob er vielleicht zur Versicherungsmathematik übergehen sollte oder zu einer rein wissenschaftlichen Tätigkeit, oder wie es doch noch anzufangen wäre, die Lehrtätigkeit, zu der er sich trotz des Scheiterns der wiederholten Versuche mit rührender Neigung hingezogen fühlte, mit Erfolg wieder aufzunehmen. Zu diesem Behufe hatte er, um ausgiebiger verwendet werden zu können, im Januar 1910 noch eine Ergänzungsprüfung in der Chemie und Mineralogie abgelegt.

Durch den Aufenthalt in einem Sanatorium scheinbar in den Besitz seiner vollen Kräfte gelangt, feierte er mit den Seinigen am 6. März in froher

Digitized by Google

Stimmung die Vollendung seines dreißigsten Lebensjahres. Gleich darauf ergriff ihn unvermutet eine akute Lungenentzündung, und wenige Tage genügten zur Zerstörung des jungen Lebens und aller sich daran knüpfenden Hoffnungen. Am 11. März schlossen sich seine Augen für immer, und am 14. geleiteten wir ihn in Weißensee zur letzten Ruhestätte an der Seite seines dort vor acht Jahren gebetteten Vaters.

Ein ideal veranlagter Mensch ist damit von uns geschieden, ein Wesen, das man näher kennen lernen mußte, um es zu schätzen und zu lieben. Hinter dem eckigen Gebahren, das oft linkisch erschien, war ein kindlich reines Gemüt verborgen; in seiner Herzensgüte lag ihm jeder böse Gedanke fern, und trotz aller Enttäuschungen sah er in unverwüstlichem Optimismus mit fester Hoffnung einer besseren Zukunft entgegen. Seiner Schwächen sich bewußt, arbeitete er unverdrossen daran, sie abzustellen. Um sich seine hochstimmige Sprechweise abzugewöhnen, begab er sich während des Winterurlaubs 1906/7 in ärztliche Behandlung und erzielte dadurch eine erfreuliche Besserung. Jeder Vorhaltung, die ihn auf einen ihm anhaftenden Mangel aufmerksam machte, lieh er gern das Ohr, und statt darüber Empfindlichkeit zu äußern, wie das junge Leute meistens tun, war er für solche Zurechtweisungen dankbar und suchte Nutzen aus ihnen zu ziehen. Gerade diese Bescheidenheit in der Anschauung seiner eigenen Natur hat ihm zuerst meine Zuneigung verschafft. Wenn er mich auf dem Heimwege aus der Hochschule, wo er in meinen Übungen zur höheren Mathematik als Assistent tätig war, begleitete und von seinen pädagogischen Sorgen erzählte, habe ich ihm immer rückhaltlos meine Meinung gesagt und bei seiner kindlichen Offenherzigkeit tiefe Einblicke in sein Inneres tun können. Die Weichheit seines Charakters und sein Glaube an das Gute im Menschen bewirkten, daß er den Ungezogenheiten seiner Schüler waffenlos und hilflos gegenüberstand und bei Anwendung der üblichen Zuchtmittel den richtigen Augenblick verpaßte. Noch auf einem der letzten Gänge, zu dem er mich wieder einmal aus der Technischen Hochschule abholte, sagte er, er bewundere die Schlagfertigkeit, mit der ich jeder unliebsamen Erscheinung aus der Mitte der Studierenden erfolgreich begegnete. So etwas sei ihm ganz versagt.

In engstem Anschluß an einen zärtlich besorgten Vater aufgewachsen, dem gleichzukommen sein sehnlichstes Verlangen war, von der herzlichen Liebe einer Mutter und der warmen Zuneigung von vier Schwestern umgeben, ist er aus dem engen Kreise der liebenden Familie bis zum Eintritt in das Lehramt wenig herausgetreten. Nach dem Tode seines Vaters, der kurz vor diesem Zeitpunkte eintrat, schloß er sich um so fester an seine Mutter und seine Schwestern an und suchte ihnen alle Aufmerksamkeiten zu erweisen, die bei dem innigen Familiensinn, der sie alle verband, erdenkbar sind. Wenn er das Elternhaus einige Zeit verlassen hätte und dadurch etwas mehr auf sich selbst gestellt worden wäre, so wäre er vielleicht besser zum Kampfe mit den Widerwärtigkeiten des wirklichen Lebens gestählt gewesen. Sein innerstes Wesen würde jedoch kaum dadurch umgestaltet worden sein. Wir beklagen sein Schicksal, seinen frühen Tod und trauern mit seinen Lieben um den Verlust so vieler Hoffnungen. Wir wollen uns aber auch freuen, daß es noch immer Naturen gibt, die kraft ihrer Herzensreinheit in unversieglichem Vertrauen auf das Gute im Menschen durch die Widerwärtigkeiten des Lebens sich nicht niederdrücken lassen. Und wenn wir um die Zerstörung eines Ta-

Digitized by Google

lentes klagen, von dem unsere Wissenschaft Förderung erhoffen durfte, so müssen wir in Demut uns beugen vor der grimmen Macht des Schicksals; teilt er doch das Schicksal von Abel, Galois, Eisenstein, und Fiesko sagt, einen Vers des Homer wiederholend: Auch Patroklus ist gestorben, und war mehr als du. Mit dem Redner auf dem Friedhofe zu Weißensee wollen wir uns trösten: Der Verstorbene hat einen schönen Aufstieg im Leben nehmen können und war dabei glücklich; ein häßlicher Abstieg ist ihm erspart geblieben.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

89. Sitzung am 26. April 1911.

Vorsitzender: Herr Weiß.

Anwesend: 28 Herren.

Wahl eines Mitgliedes der Revisionskommission: Anstelle des an die Bergakademie Clausthal berufenen Herrn Emde wird Herr Singer gewählt.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Kötter: 1. Über gewisse Formeln der Flächentheorie, welche für die Statik stark gekrümmter elastischer Platten von Wichtigkeit sind. 2. Über die Spannungen in vergleichsweise schmalen, stark gekrümmten Platten.

Herr Jonas: Über die Komposition der Moutardschen Transformation (s. u.).

Herr Koppe: Beweis des Pohlkeschen Satzes (s. u.).

90. Sitzung am 27. Mai 1911.

Vorsitzender: Herr Güntsche.

Anwesend: 102 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr Timerding: Über die Einführung in die Infinitesimalrechnung an den höheren Lehranstalten.

Digitized by Google

Über ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln, Kubikwurzeln usw. aus gegebenen Zahlen.

(Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn O. Parlow.)

Von E. Lampe.

Vor mehr als Jahresfrist wurde vom königlichen Landmesser Herrn Parlow in Königsberg i. Pr. für das Archiv der Mathematik an mich ein Aufsatz eingeschickt, in welchem zur Berechnung von Wurzeln aus gegebenen Zahlen ein eigentümliches Verfahren entwickelt wurde, das mir für Unterrichtszwecke ganz lehrreich zu sein schien. Die Darstellung ließ jedoch den zugrundeliegenden Gedanken nicht deutlich erkennen, und die beigefügten Zahlenbeispiele, die in aller Ausführlichkeit mitgeteilt waren, nahmen einen Raum ein, der für den Abdruck nicht bewilligt werden konnte. Daher sandte ich das Manuskript an den Verfasser zurück und ersuchte ihn, sich mit Königsberger Mathematikern, die ich ihm nannte, zu beraten, damit er eine für die Veröffentlichung geeignete Abfassung herstellen könnte. Ungeachtet der freundlichen Anweisungen, die Herr Saalschütz dem Verfasser bereitwillig erteilte, besaß aber die Umarbeitung des in solchen Veröffentlichungen offenbar nicht geschulten Autors noch immer nicht die zum Abdrucke nötigen Eigenschaften. Deshalb bin ich selbst dem Gegenstande näher getreten und teile die Hauptsachen aus jenen Aufsätzen in dem Vortrage mit. Für Unterrichtszwecke dürfte die Bedeutung der Methoden, die ich im Anschlusse an das Verfahren des Herrn Parlow gebe, darin bestehen, daß der Schüler bei der Berechnung einfacher Beispiele daran gewöhnt wird, im Gebrauche von angenäherten Zahlen einen Überschlag über den Fehler der Zahlenergebnisse zu machen. Die hierzu nötigen Überlegungen sind ja bei allen Rechnungen mit abgekürzten Zahlen: Logarithmen, Wurzelwerten, physikalischen und chemischen Konstanten usw., von Wichtigkeit und schützen vor der Einbeziehung bedeutungsloser Stellen in die Zahlenangaben der Resultate.

1. Für die Ausziehung der Quadratwurzel entwickelt Herr Parlow eine Formel, die ein gewisses mathematisches Interesse besitzt, weil sie die Quadratwurzel aus einer Zahl in der Gestalt eines rasch konvergierenden unendlichen Produktes darstellt, das eine ganz willkürlich gewählte Zahl enthält. Die Ableitung dieses Produktes gebe ich in veränderter Form.

In der Identität

$$1 - \frac{4}{b} = \frac{(b-2)^2}{b^2} - \frac{4}{b^2} = \frac{(b-2)^2}{b^2}\left(1 - \frac{4}{(b-2)^2}\right)$$

setze man $b - 2 = \beta$, so folgt:

$$(1) \qquad 1 - \frac{4}{b} = \frac{\beta^2}{b^2}\left(1 - \frac{4}{\beta^2}\right).$$

Demnach hat man für $\beta^2 - 2 = \beta_1$ ebenso:

$$1 - \frac{4}{\beta^2} = \frac{\beta_1^2}{\beta^4}\left(1 - \frac{4}{\beta_1^2}\right).$$

Digitized by Google

So fortfahrend setze man $\beta_1^2 - 2 = \beta_2$, $\beta_2^2 - 2 = \beta_3, \cdots$; dann erhält man entsprechend:

$$1 - \frac{4}{\beta_1^2} = \frac{\beta_2^2}{\beta_1^4}\left(1 - \frac{4}{\beta_2^2}\right),$$

$$1 - \frac{4}{\beta_2^2} = \frac{\beta_3^2}{\beta_2^4}\left(1 - \frac{4}{\beta_3^2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (1) ergibt sich demnach

$$1 - \frac{4}{b} = \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta^2}\right)^2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_1^2}\right)^2 \left(\frac{\beta_3}{\beta_2^2}\right)^2 \cdots$$

und nach Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\sqrt{\frac{b-4}{b}} = \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\beta_1}{\beta^2} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2^2} \cdots$$

$$(2) \qquad = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{2}{\beta_2^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{2}{b}\right)\left(1 - \frac{2}{(b-2)^2}\right)\left(1 - \frac{2}{[(b-2)^2-2]^2}\right)\left(1 - \frac{2}{\{[(b-2)^2-2]^2-2\}^2}\right)\cdots.$$

Hierbei ist natürlich $b > 4$ anzunehmen. Nun sei

$$b = 4\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2, \quad \frac{b-4}{b} = \frac{4pq}{(p+q)^2}, \quad \sqrt{\frac{b-4}{b}} = \frac{2\sqrt{pq}}{p+q}.$$

Dadurch wird aus (2) sofort

$$(3) \quad \sqrt{p} = \frac{p+q}{2\sqrt{q}}\left(1 - \frac{2}{b}\right)\left(1 - \frac{2}{(b-2)^2}\right)\left(1 - \frac{2}{[(b-2)^2-2]^2}\right)\cdots\left[b = 4\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2\right].$$

Die Formel (3) gibt $\sqrt{p}$ in der Gestalt eines unendlichen Produktes, in welches die beliebige Zahl q eingeht. Wählt man q als eine Quadratzahl in der Nähe von p, so wird b eine große Zahl, und die Nenner der Brüche in den Klammern nehmen sehr schnell zu; daher konvergiert das Produkt ungemein rasch.

Um z. B. $\sqrt{2}$ zu berechnen, setzt Herr Parlow $\sqrt{2} = \frac{1}{7}\sqrt{98}$ und berechnet $\sqrt{98}$, indem er $q = 98{,}01 = (9{,}9)^2$ setzt. Dann wird mit Benutzung des ersten Faktor $1 - 2/b$ in (3)

$$\sqrt{2} = \frac{76839840{,}1}{54333972} = 1{,}414213562373095049$$

auf 18 Stellen genau. Bei Hinzunahme des folgenden Faktors würde man 36 Stellen genau erhalten, usw. Für besonders günstig gewählte Zahlen sind ferner berechnet

$$\sqrt{89996} = \frac{4049820001}{134997} = 299{,}993333259257613\,13,$$

ebenfalls mit bloßer Benutzung des Faktors $1 - 2/b$; die 17. Stelle ist in Wahrheit 2. Endlich ist bei Berücksichtigung von zwei Faktoren ($93 = 100 - 7$):

$$\sqrt{93} = 9{,}643650760993.$$

Digitized by Google

Um den Gang der Rechnung näher zu zeigen, füge ich eine andere Berechnung von $\sqrt{2}$ hinzu: $p = 2$, $q = 1$. Man erhält:

$$\sqrt{2} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{17}{18} \cdot \tfrac{577}{578} \cdot \tfrac{665857}{665858} \cdots.$$

2. Als Mangel des Verfahrens ist nun aber der Umstand zu betrachten, daß Herr Parlow keinen Versuch gemacht hat, den Fehler abzuschätzen, der dadurch begangen wird, daß nur eine endliche Anzahl von Faktoren in (3) zur Berechnung benutzt ist. Zu diesem Zwecke werde das Verfahren noch näher betrachtet.

Als erste Näherung für $\sqrt{p}$ erhält man aus (3) den Wert $(p+q)/2\sqrt{q}$; daraus würde folgen $\sqrt{pq} = \frac{1}{2}(p+q)$; d. h. ein angenäherter Wert für das geometrische Mittel zweier Zahlen ist das arithmetische Mittel, ein Satz, der bekanntlich nur dann von Nutzen ist, wenn $p - q$ im Verhältnis zu p und q klein ist. Ist q^2 eine Quadratzahl, so hat man also als erste Annäherung

$$\sqrt{p} = \frac{p+q^2}{2q} = q_1.$$

Man bilde nun $\frac{p+q_1^2}{2q_1} = q_2$, $\frac{p+q_2^2}{2q_2} = q_3, \cdots$, so folgen die Werte von $q_1, q_2, q_3, \cdots$ durch Iteration, gerade wie die Faktoren des Produktes in (3) durch Iteration der Formel (1) entstanden sind. So folgen als Näherungswerte für $\sqrt{2}$, mit $q = 1$ beginnend:

$$\sqrt{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = q_1,$$

$$\sqrt{2} = \frac{2+9/4}{2 \cdot 3/2} = \frac{17}{12} \left(= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{18}\right) = q_2,$$

$$\sqrt{2} = \frac{2+189/144}{2 \cdot 17/12} = \frac{577}{408} \left(= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{577}{578}\right) = q_3,$$

$$\sqrt{2} = \frac{2+(577/408)^2}{2 \cdot 577/408} = \frac{665857}{470832} = q_4 \text{ usw.}$$

Bekanntlich hat Luca Paciulo schon dieses Verfahren zur Berechnung irrationaler Quadratwurzeln gelehrt. Dieselben Zahlen folgen aber auch aus einer anderen Überlegung. Offenbar ist $\sqrt{2} - 1 = \varepsilon$ ein echter Bruch ($\varepsilon = 0{,}4142\cdots$). Daraus folgt:

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \varepsilon^2, \qquad \sqrt{2} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$(\sqrt{2}-1)^4 = 17 - 12\sqrt{2} = \varepsilon^4, \qquad \sqrt{2} = \tfrac{17}{12} - \tfrac{1}{12}\varepsilon^4,$$

$$(\sqrt{2}-1)^8 = 577 - 408\sqrt{2} = \varepsilon^8, \qquad \sqrt{2} = \tfrac{577}{408} - \tfrac{1}{408}\varepsilon^8,$$

$$(\sqrt{2}-1)^{16} = 665857 - 470832\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2} = \frac{665857}{470832} - \frac{\varepsilon^{16}}{470832}.$$

. . . . . .

Allgemein, wenn q ein Näherungswert von $\sqrt{2}$ ist, d. h. $\sqrt{2} - q = \pm\varepsilon_1$, so folgt $2 + q^2 - 2q\sqrt{2} = \varepsilon_1^2$, also $\sqrt{2} = \frac{2+q^2}{2q} - \frac{\varepsilon_1^2}{2q}$. Das Fehlerglied $\varepsilon_1^2/2q$ setzt nun zwar die Kenntnis von $\sqrt{2}$ voraus; statt des genauen Wertes von $\sqrt{2}$ kann aber der angenäherte $\frac{2+q^2}{2q}$ genommen werden; dadurch gewinnt

Digitized by Google

man eine ganz brauchbare Fehlerschätzung. So folgt in den obigen Näherungsformeln für $\sqrt{2}$ aus

$$\sqrt{2} = \tfrac{3}{2}, \quad \sqrt{2} - 1 = \tfrac{1}{2} = \varepsilon, \qquad \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 = 0{,}125;$$
$$\sqrt{2} = \tfrac{17}{12}, \quad \sqrt{2} - 1 = \tfrac{5}{12} = \varepsilon, \qquad \tfrac{1}{12}\varepsilon^4 = 0{,}00251;$$
$$\sqrt{2} = \tfrac{577}{408}, \quad \sqrt{2} - 1 = \tfrac{169}{407} = \varepsilon, \qquad \tfrac{1}{408}\varepsilon^8 = 0{,}0000021; \text{ usw.}$$

Daraus ersieht man z. B., daß 17/12 = 1,41666 ... nur in den beiden ersten Dezimalen richtig ist. Subtrahiert man $\varepsilon^4/12 = 0{,}00251$, so folgt 1,41415, ein Wert, dessen letzte Stelle unsicher ist, weil der benutzte Wert nur drei richtige Zahlen (1,41) besitzt.

3. Durch diese Betrachtung ist die Rechnung auf ganz elementare Prozesse zurückgeführt, und zugleich erhält man Abschätzungen für die Größe des begangenen Fehlers.

Da hierbei die Wurzelwerte in Gestalt rationaler Brüche erhalten werden, so liegt darin ein Hinweis auf einen Zusammenhang dieser Rechnung mit der Entwicklung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch. Dies möge an einem Beispiele beleuchtet werden. Wenn man $\sqrt{3}$ nach dem bekannten Verfahren in einen Kettenbruch verwandelt, so erhält man als Näherungswerte:

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{19}{11}, \tfrac{26}{15}, \tfrac{71}{41}, \tfrac{97}{56}, \tfrac{265}{153}, \tfrac{362}{209}, \tfrac{571}{989}, \tfrac{1351}{780}, \ldots$$

Ist $\sqrt{3} - 1 = \varepsilon$, so folgt

$$\varepsilon^2 = 2(2 - \sqrt{3}), \qquad \varepsilon^3 = 2(3\sqrt{3} - 5), \qquad \varepsilon^4 = 2^2(7 - 4\sqrt{3}),$$
$$\varepsilon^5 = 2^3(11\sqrt{3} - 19), \quad \varepsilon^6 = 2^4(26 - 15\sqrt{3}), \quad \varepsilon^7 = 2^4(41\sqrt{3} - 71),$$
$$\varepsilon^8 = 2^5(97 - 56\sqrt{3}), \quad \varepsilon^9 = 2^5(153\sqrt{3} - 265), \quad \varepsilon^{10} = 2^6(362 - 209\sqrt{3}),$$
$$\varepsilon^{11} = 2^6(571\sqrt{3} - 989), \quad \varepsilon^{12} = 2^7(1351 - 780\sqrt{3}).$$

Aus der letzten Gleichung folgt als Näherungswert

$$\sqrt{3} = 1351/780 = 1{,}732051282. \text{ Der Fehler ist } \varepsilon^{12}/2^7 \cdot 780.$$

Aus jedem Näherungswerte einer Quadratwurzel läßt sich noch ein zweiter herleiten. So folgt z. B. durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ aus

$$\sqrt{2} = \tfrac{17}{12} - \tfrac{1}{12}\varepsilon^4 \text{ sofort } 2 = (\tfrac{17}{12} - \tfrac{1}{12}\varepsilon^4)\sqrt{2},$$

also

$$\sqrt{2} = \frac{24}{17 - \varepsilon^4} = \tfrac{24}{17}\left(1 + \frac{\varepsilon^4}{17} + \frac{\varepsilon^8}{17^2} + \cdots\right)$$
$$= \tfrac{24}{17} + \tfrac{24}{289}\varepsilon^4 + \cdots,$$

d. h. $\frac{24}{17}$ als ein anderer Näherungswert. Das arithmetische Mittel aus beiden Werten ist aber

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{17}{12} + \tfrac{24}{17}) = \tfrac{577}{408},$$

ein Näherungswert, der aus $(\sqrt{2} - 1)^8$ entspringt.

Es ist jedoch durchaus nicht nötig, daß die nach diesem Verfahren erhaltenen Näherungswerte der Quadratwurzeln mit denen übereinstimmen, die

Digitized by Google

man als Näherungswerte der Kettenbrüche nach dem üblichen Verfahren erhält. So sind die Näherungswerte für $\sqrt{19}$ nach dem Kettenbruchverfahren

$$\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}, \frac{61}{14}, \frac{170}{39}, \frac{1421}{326}, \ldots$$

Dagegen ist für $\sqrt{19} - 4 = \varepsilon$:

$$\varepsilon^2 = 35 - 8\sqrt{19}, \quad \varepsilon^3 = 67\sqrt{19} - 292, \quad \varepsilon^4 = 2441 - 560\sqrt{19},$$

und hieraus folgen als Näherungswerte für $\sqrt{19}$:

$$\frac{35}{8}, \frac{292}{67}, \frac{2441}{560}, \ldots$$

Es ist vielleicht am Platze, eine historische Bemerkung hier einzuschalten. Aus einigen Näherungswerten für $\sqrt{2}$ ($\frac{7}{5}$ und $\frac{17}{12}$) sowie für $\sqrt{3}$ ($\frac{7}{4}$ und $\frac{26}{15}$), die im Altertume bei griechischen Mathematikern vorkommen, glaubt Hr. M. Cantor (Vorlesungen über Geschichte der Math. Bd. I, 3. Aufl., S. 317 u. 318) die Vermutung abziehen zu dürfen, daß diese Werte vielleicht durch eine dem Kettenbruchverfahren entsprechende Schlußweise gefunden sein könnten. Nun sind aber die nämlichen Werte auch aus $(\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7$, $(\sqrt{2} - 1)^4 = 17 - 12\sqrt{2}$ erhältlich, und das Vorkommen dieser Werte bei Hrn. Parlow, der von diesem historischen Zusammenhange offenbar keine Ahnung hat, zeigt uns, wie ein unbefangener Mensch auch noch auf andere Weise zu jenen Werten gekommen ist. Und wenn Hr. Parlow durch geschicktes Probieren Näherungswerte ermittelt, die, in seine Formeln eingesetzt, eine schnelle Konvergenz erzeugen, so könnte man vielleicht meinen, daß die alten griechischen Mathematiker ihre Näherungswerte durch bloßes Probieren mit kleinen Brüchen gefunden haben können. Da ferner $(\frac{3}{2})^2 > 2$, $(\frac{4}{3})^2 < 2$, $\frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$, $(\frac{5}{3})^2 < 3$, $(\frac{9}{5})^2 > 3$, $\frac{1}{2}(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}) = \frac{26}{15}$, so ließe sich folgern, daß den alten Griechen der Satz bekannt gewesen sein könnte, es sei das geometrische Mittel aus zwei naheliegenden Zahlen angenähert dem arithmetischen Mitteln aus ihnen gleich. Man vergleiche hierzu Cantors Vorlesungen über Geschichte der Math. Bd. I, S. 373 u. 374.

4. Der dem obigen Verfahren zugrunde liegende Satz, daß, wenn ε ein echter Bruch ist, ε^n mit wachsendem n sich der Null nähert, läßt sich nun auch zur Berechnung höherer Wurzeln verwenden; doch muß dazu das Verfahren etwas verallgemeinert werden. Es sei $\sqrt[3]{2}$ zu berechnen; man setze $\sqrt[3]{2} - 1 = \varepsilon$, so ist

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^2 = \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1 = \varepsilon^2,$$
$$(\sqrt[3]{2} - 1)^4 = 6\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} - 7 = \varepsilon^4,$$
$$(\sqrt[3]{2} - 1)^8 = 100\sqrt[3]{2} - 80\sqrt[3]{4} - 1 = \varepsilon^8,$$
$$(\sqrt[3]{2} - 1)^{16} = 9840\sqrt[3]{4} + 13000\sqrt[3]{2} - 31999 = \varepsilon^{16}.$$

Jede Gleichung, die aus der Potenzierung von $\sqrt[3]{2} - 1$ hervorgeht, enthält sowohl $\sqrt[3]{2}$ als auch $\sqrt[3]{4}$. Multipliziert man aber eine solche Gleichung mit $\sqrt[3]{2}$, so erhält man eine zweite Gleichung mit denselben beiden Wurzeln; aus beiden Gleichungen lassen sich daher diese Wurzeln berechnen.

Digitized by Google

So entsteht aus der ersten der oberen Gleichungen das Gleichungspaar

$$\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 1 = \varepsilon^2,$$
$$-2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2 = \varepsilon^2\sqrt[3]{2}.$$

Daraus berechnet man:

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{\varepsilon^2}{3}(2 + \sqrt[3]{2}), \quad \sqrt[3]{4} = \tfrac{5}{3} - \tfrac{\varepsilon^2}{3}(1 + 2\sqrt[3]{2});$$
$$2\varepsilon^3 - \varepsilon^2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{2} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2(\sqrt[3]{4} - 1),$$
$$\sqrt[3]{4} = \tfrac{8}{5} - \tfrac{\varepsilon^2}{5}(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}).$$

Die beiden letzten Formeln geben als Näherungswerte von $\sqrt[3]{2} = 1{,}25$, $\sqrt[3]{4} = 1{,}6$. Entnimmt man hieraus $\varepsilon = 0{,}25$, $\varepsilon^2 = 0{,}0625$, so hat das Fehlerglied, gehörig zu $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}$ den Wert $\frac{1}{4} \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}6 = 0{,}0094$. Mit Hinzurechnung dieses Betrages wäre also $\sqrt[3]{3} = 1{,}2594$. Für $\sqrt[3]{4}$ findet man $1{,}6 - 0{,}011 = 1{,}589$. Benutzt man die letzte der obigen Formeln, so ergibt sich

$$\varepsilon^{16}(325 - 246\sqrt[3]{2}) = 12\,096\,754\sqrt[3]{2} - 15\,240\,955,$$

und hieraus folgt angenähert

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{15\,240\,955}{12\,096\,754} = 1{,}259\,921\,049\,894\,872.$$

Berechnet man das Fehlerglied, so findet man als erste geltende Ziffer eine 1 in der fünfzehnten Dezimale. In der Tat hat Hr. Parlow nach seinem Verfahren, das weiter unten zur Darstellung kommt, eine 3 in dieser Stelle gefunden. Aus dem obigen Werte für $\sqrt[3]{2}$ folgt ebenso angenähert

$$\sqrt[3]{4} = \tfrac{24\,193\,508}{15\,240\,955} = 1{,}587\,401\,051\,968\,200.$$

In ähnlicher Weise findet man aus $(2 - \sqrt[3]{7})^6 = \varepsilon^6 = -1007 + 228\sqrt[3]{7} + 156\sqrt[3]{49}$

$$\sqrt[3]{7} = \tfrac{33\,329}{17\,423} + \frac{\varepsilon^4(19 - 13\sqrt[3]{7})}{17\,423}$$
$$= 1{,}912\,931\,182\,919$$

$-$ (146) in den letzten drei Dezimalen und

$$\sqrt[3]{49} = \tfrac{121\,961}{17\,423} = 3{,}659\,305\,709\,74$$

$+$ (29) in den letzten zwei Dezimalen.

Da man hiernach zugleich die Kubikwurzel aus einer Zahl und aus ihrem Quadrate findet, so kann man auch von dem Quadrate der Zahl ausgehen; dies empfiehlt sich besonders, wenn das Quadrat in der Nähe eines Kubus liegt. So erreicht man eine schnellere Annäherung bei der Berechnung von $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{9}$, wenn man von $\sqrt[3]{9} - 2$ ausgeht. Der bequemeren Bezeichnung wegen werde $\sqrt[3]{3} = x$ gesetzt; dann ist $x^3 - 2 = \varepsilon$ und

$$(x^3 - 2)^2 = 3x - 4x^2 + 4 = \varepsilon^2, \quad 4x + 3x^2 - 12 = \varepsilon^2 x.$$

Hieraus folgt

Digitized by Google

$$x = \tfrac{36}{25} + \tfrac{\varepsilon^2}{25}(3 + 4x) = 1{,}44 + 0{,}00\,224,$$

$$x^2 = \tfrac{52}{25} + \tfrac{\varepsilon^2}{25}(3x - 4) = 2{,}08 + 0{,}000\,082,$$

ferner

$$x = \tfrac{13}{9} - \tfrac{\varepsilon^2}{9}(x^2 + 1), \quad x^2 = \tfrac{27}{13} + \tfrac{\varepsilon^2(3x + x^2)}{13}.$$

Ebenso

$$(x^2 - 2)^3 = 1 - 18x + 12x^2 = \varepsilon^3, \quad 36 + x - 18x^2 = \varepsilon^3 x.$$

Folglich

$$x = \tfrac{75}{52} - \tfrac{\varepsilon^3}{52}(3 + 2x) = 1{,}442\,307\,7 - 0{,}000\,058\,8$$
$$= 1{,}442\,2489,$$

$$x^2 = \tfrac{649}{312} - \tfrac{\varepsilon^3}{312}(18x + 1) = 2{,}080\,128\,2 - 0{,}000\,044\,2$$
$$= 2{,}080\,084.$$

Aus $(x^2 - 2)^6 = -1295 + 396x + 348x^2 = \varepsilon^6$ folgt

$$x = \tfrac{73\,011}{50\,623} + \tfrac{\varepsilon^6(33 - 29x)}{50\,623} = 1{,}442\,249\,570\,3,$$

$$x^2 = \tfrac{151\,869}{73\,011} = 2{,}080\,083\,823.$$

Endlich entspringt aus $(x^2 - 2)^8 = -6477x + 7760x^2 - 6800 = \varepsilon^2$

$$x = \tfrac{136\,609\,200}{94\,719\,529} = 1{,}442\,249\,570\,307\,724,$$

$$x^2 = \tfrac{284\,158\,587}{136\,609\,200} = 2{,}080\,083\,823\,051\,45.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus

$$(3 - \sqrt[3]{25})^6 = 4 + 2025\sqrt[3]{25} + 3645\sqrt[3]{5} = \varepsilon^6,$$

$$\sqrt[3]{5} = \tfrac{7\,203\,655}{4\,212\,723} + \frac{\varepsilon^6(425 - \sqrt[3]{5} \cdot 213)}{4\,212\,723}$$
$$= 1{,}709\,975\,946\,676\,294\,62$$
$$+ 0, \qquad\qquad 2\,685\,9$$
$$= 1{,}709\,975\,946\,678\,980\,5$$

$$\sqrt[3]{25} = \tfrac{21\,063\,615}{7\,203\,655} = 2{,}924\,017\,738\,2.$$

In dem Vorangehenden sind die Wurzeln stets durch rationale Brüche dargestellt worden. Beachtet man, daß in den durch Potenzierung erhaltenen Gleichungen neben der Kubikwurzel aus einer Zahl z auch die aus z^2 vorkommt, so kann man jede dieser Gleichungen als quadratische Gleichung für $z^{1/3}$ auffassen und lösen. So ergibt (vgl. oben):

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^{16} = 9840\sqrt[3]{4} + 13\,000\sqrt[3]{2} - 31\,999 = \varepsilon^{16}$$

für $\sqrt[3]{2}$ den Wert 1,259 921 049 894 861 682 5

$$+ \qquad\qquad 11\,482\,4$$
$$= 1{,}259\,921\,049\,894\,873\,164\,9,$$

wo nur die letzte Stelle unsicher ist.

Digitized by Google

Geht man nun auch nach der Berechnung der Kubikwurzeln zu höheren Wurzeln über unter Festhaltung desselben Grundgedankens, so treten bei der Potenzierung von $\sqrt[n]{z} - a$ in den erhaltenen Formeln alle Potenzen von $\sqrt[n]{z}$ bis zur $(n-1)$ten einschließlich auf. Durch Multiplikation der ersten erhaltenen Gleichung mit $\sqrt[n]{x^k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n-2$ erhält man dann $n-1$ Gleichungen, aus denen sich die $n$ten Wurzeln aus z^p für $p = 1, 2, \ldots, n-1$ berechnen. Das Verfahren möge an der Berechnung von $\sqrt[5]{2} = x$ erläutert werden. Wir beginnen mit $(x-1)^5$, obschon man auch mit einer früheren Potenz anfangen könnte:

$$\begin{aligned}
(x-1)^5 = -\ 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1 &= \varepsilon^5,\\
10x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 1x - 10 &= \varepsilon^5 x,\\
-10x^4 + 5x^3 + 1x^2 - 10x + 20 &= \varepsilon^5 x^2,\\
5x^4 + 1x^3 - 10x^2 + 20x - 20 &= \varepsilon^5 x^3.
\end{aligned}$$

Betrachtet man diese vier Gleichungen — unter vorläufiger Absehung von den rechten Seiten — als Bestimmungsgleichungen für x^4, x^3, x^2, x, so hat man also vier lineare Gleichungen mit vier Unbekannten zu lösen. Will man x finden, so multipliziere man sie der Reihe nach mit den bezüglichen Unterdeterminanten 265, 345, 175, -75 und addiere, so folgt $x = \frac{363}{316} - \frac{\varepsilon^5}{316}(53 + 69x + 35x^2 - 15x^3)$.

Angenäherte Werte für x^2, x^3, x^4 erhält man, indem man die rechten Seiten gleich Null nimmt; dadurch ergibt sich $x^2 = \frac{417}{316}$, $x^3 = \frac{479}{316}$, $x^4 = \frac{2751}{1580}$. Diese Werte ermöglichen eine angenäherte Berechnung des Faktors von $\frac{\varepsilon^5}{316}$. Die Klammergröße wird $\frac{49205}{316}$; ε ist angenähert $\frac{363}{316} - 1 = \frac{47}{316}$. Somit ist angenähert

$$\begin{aligned}
x = \sqrt[5]{2} &= 1{,}14873418 - 0{,}00003587\\
&= 1{,}14869831
\end{aligned}$$

statt 1,1486984, wie durch Rechnung mit siebenstelligen Tafeln folgt.

5. Während ich also die Methode zur Berechnung der Wurzeln auf den Satz stütze, daß die Potenzen ε^n eines echten Bruches ε mit wachsendem n sich der Null nähern, und damit zugleich auch ein Maß für den Fehler gewinne, der bei der Vernachlässigung von ε gemacht ist, hat Herr Parlow nicht einen so einfach einleuchtenden Gedanken benutzt, und ich gebe im folgenden zunächst seine Darstellung für die Berechnung der Kubikwurzeln, jedoch mit bedeutenden Kürzungen. Durch sein iteriertes Verfahren wird jede Wurzel in ein unendliches Produkt verwandelt.

Soll aus einer Zahl c die Kubikwurzel gezogen werden, so stelle man sie als die Differenz zweier Zahlen $a - b = c$ dar, von denen die eine, z. B. a, willkürlich gewählt werden kann. Nun ist

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3a-2b}{3a-b}\right)^3 &= \frac{a-b}{a} + \left(\frac{3a-2b}{3a-b}\right)^3 - \frac{(a-b)}{a}\\
&= \frac{a-b}{a} + \frac{a(3a-2b)^3 - (a-b)(3a-b)^3}{a(3a-b)^3}\\
&= \frac{c}{a} + \frac{b^3(2a-b)}{a(3a-b)^3},
\end{aligned}$$

Digitized by Google

also

$$(1) \qquad \sqrt[3]{c + \frac{b^3(2a-b)}{(3a-b)^3}} = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{3a-2b}{3a-b}.$$

Es sei jetzt $a = d^3$, wo d eine solche rationale Zahl ist, daß $b = a - c = d^3 - c$ erheblich kleiner als a. Dann ist mit Vernachlässigung des kleinen Wertes $\frac{b^3(2a-b)}{(3a-b)^3}$ näherungsweise

$$(2) \qquad \sqrt[3]{c} = d\,\frac{3a-2b}{3a-b}.$$

Ist z. B. $c = 25$, so setze man $a = d^3 = 27$; dann ist $b = 2$, und nach (2) $\sqrt[3]{25} = 3 \cdot 71/79 = 2{,}924$. Zur genaueren Bestimmung setze man weiter $a_1 = c + \frac{b^3(2a-b)}{(3a-b)^3}$, also $b_1 = a_1 - c = \frac{b^3(2a-b)}{(3a-b)^3}$; dann ist nach (2)

$$\sqrt[3]{c + \frac{b_1^3(2a_1-b_1)}{(3a_1-b_1)^3}} = \sqrt[3]{a_1}\,\frac{3a_1-2b_1}{3a_1-b_1}$$
$$= d\,\frac{3a-2b}{3a-b} \cdot \frac{3a_1-2b_1}{3a_1-b_1}.$$

In ähnlicher Weise fortfahrend, setze man $a_2 = c + \frac{b_1^3(2a_1-b_1)}{(3a_1-b_1)^3}$, und es kommt ($b_2 = a_2 - c$):

$$\sqrt[3]{c + \frac{b_2^3(2a_2-b_2)}{(3a_2-b_2)^3}} = d\,\frac{3a-2b}{3a-b} \cdot \frac{3a_1-2b_1}{3a_1-b_1} \cdot \frac{3a_2-2b_2}{3a_2-b_2}.$$

Da bei Fortsetzung des Verfahrens

$$\lim_{(n \to \infty)} \frac{b_n^3(2a_n-b_n)}{(3a_n-b_n)^3} = 0$$

wird, so erhält man schließlich

$$(4) \qquad \sqrt[3]{c} = d\,\frac{3a-2b}{3a-b} \cdot \frac{3a_1-2b_1}{3a_1-b_1} \cdot \frac{3a_2-2b_2}{3a_2-b_2} \cdot \frac{3a_3-b_3}{3a_3-b_3} \cdots,$$

wo $d^3 = a$ und

$$a_n = c + \frac{b_{n-1}^3(2a_{n-1}-b_{n-1})}{(3a_{n-1}-b_{n-1})^2}, \quad b_n = a_n - c$$

gesetzt ist. Zur Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ schreibe man $2 = \frac{1000}{500} = \frac{10^3}{500}$, $\sqrt[3]{2} = \frac{10}{\sqrt[3]{500}}$.

Ferner ist $500 = 512 - 12$; bei der Bestimmung von $\sqrt[3]{500}$ ist also zu nehmen $c = 500$, $b = 12$, $a = 512 = 8^3$. Allgemein ist

$$\frac{3a_1-2b_1}{2a_1-b_1} = \frac{3c(3a-b)^3 + b^3(2a-b)}{3c(3a-b)^3 + 2b^3(2a-b)}.$$

Aus Formel (4) folgt daher:

$$\sqrt[3]{500} = 8 \cdot \tfrac{1512}{1524}\,\frac{1500 \cdot 1524^3 + 12^3 \cdot 1012}{1500 \cdot 1524 + 2 \cdot 12^3 \cdot 1012}$$
$$= 8 \cdot \tfrac{126}{127}\,\frac{375 \cdot 127^3 + 253}{375 \cdot 127^3 + 2 \cdot 253} = \tfrac{768143878}{768144131} \cdot \tfrac{1008}{127}$$

Mithin ist aus $\sqrt[3]{2} = 10/\sqrt[3]{500}$:

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{975543046370}{774289029094} = 1{,}259\,921\,049\,894\,873\,164\,737.$$

Digitized by Google

Da kein Kriterium für die Fehlergröße gegeben ist, hat Herr Parlow den Kubus dieser Zahl wirklich berechnet und findet 1,999 999 999 999 999 998 8. Er meint hieraus folgern zu dürfen, daß „vor der 20-sten Dezimale kaum eine Differenz gegenüber der wirklichen $\sqrt[3]{2}$ vorhanden sein könne." Mit Hilfe der Newtonschen Korrektion findet man jedoch aus $x^3 - 2 = 0$ die Korrektion $h = -\frac{x^3-2}{3x^2}$, und wenn man im Nenner $x = 1{,}26$ nimmt: $\frac{0{,}(17)12}{4{,}70} = 0{,}(18)252$, wobei die 2 der letzten Stelle ganz unsicher ist, d. h. es ist statt 737 in den drei letzten Ziffern zu setzen 989.

Hätte man sich mit dem Näherungswerte $8 \cdot 126/127$ für $\sqrt[3]{500}$ begnügt, so wäre daraus erhalten

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{10 \cdot 1270}{8 \cdot 126} = \tfrac{635}{504} = 1{,}259\,920\,6\,.$$

Derselbe Näherungswert entspringt auch aus der Gleichung (vgl. oben):

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^8 = 100\sqrt[3]{2} - 80\sqrt[3]{4} + 1 = \varepsilon^8,$$

in Kombination mit

$$\sqrt[3]{2} + 100\sqrt[3]{4} - 160 = \varepsilon^8\sqrt[3]{2}\,.$$

Es ist nämlich $\varepsilon^8(5 + 4\sqrt[3]{2}) = -635 + 504\sqrt[3]{2}$,

also $$\sqrt[3]{2} = \tfrac{635}{504} + \tfrac{\varepsilon^8}{504}(5 + 4\sqrt[3]{2}).$$

Rechnet man das Fehlerglied mit $\varepsilon = 0{,}26$ und $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$ aus, so ergibt sich im Überschlag eine 4 in der siebenten Stelle. Hierdurch wird ersichtlich, daß das oben gezeigte Verfahren auf dieselben Zahlenwerte führt wie die Formel (4); außerdem ist aber dort gezeigt, wie die Fehlergröße zu bestimmen ist.

Auch $\sqrt[3]{25}$ wird von Herrn Parlow berechnet. Er setzt $a = 27$, $b = 2$; dadurch wird

$$\sqrt[3]{25} = 3 \cdot \tfrac{77}{79} \cdot \tfrac{36\,978\,341}{36\,978\,741} = \tfrac{8\,541\,996\,771}{2\,921\,321\,803} = 2{,}924\,017\,738\,2\,,$$

genau wie oben auf anderem Wege aus kleineren Zahlen berechnet ist.

6. Zur Ausdehnung der Methode auf höhere Potenzen setzt Herr Parlow

$$\left(\frac{5a-2b}{5a-b}\right)^5 = \frac{a-b}{a} + \left(\frac{5a-2b}{5a-b}\right)^5 - \frac{a-b}{a}$$

$$= \frac{a-b}{a} + \frac{5^5(5a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4) - b^5(6a+b)}{a(5a-b)^5} =$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{f}{ag}, \quad \text{wo} \quad f = 5^5(5a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4) - b^5(6a+b),$$

$$g = (5a-b)^5.$$

Dann ist

$$\sqrt[5]{c + f/g} = \sqrt[5]{a}\,\frac{5a-2b}{5a-b}$$

ein Näherungswert für $\sqrt[5]{c}$, und somit folgt in ähnlicher Weise wie bei der Kubikwurzel:

$$\sqrt[5]{c} = \sqrt[5]{a}\,\frac{5a-2b}{5a-b} \cdot \frac{5a_1-2b_1}{5a_1-b_1} \cdot \frac{5a_2-2b_2}{5a_2-b_2} \cdots;$$

Digitized by Google

allgemein für die n-te Wurzel

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a}\,\frac{na-2b}{na-b}\cdot\frac{na_1-2b_1}{na_1-b_1}\cdot\frac{na_2-2b_2}{na_2-b_2}\cdots$$

Als Beispiel berechnet er $\sqrt[5]{223}$, $a = 3^5 = 243$, $b = 20$, $c = 223$. Der erste Näherungswert wird aus $\sqrt[5]{c} = \sqrt[5]{a}\,\frac{5a-2b}{5a-b}$:

$$\sqrt[5]{223} = 3\cdot\tfrac{1215-40}{1215-20} = \tfrac{705}{239} = 2{,}9497.$$

Dann setzt er $a = (2{,}95)^5$ und benutzt diesen Wert in der nämlichen Formel. Daraus folgt

$$\sqrt[5]{223} = \tfrac{26{,}343\,300\,115\,375}{8{,}933\,242\,99} = 2{,}948\,906\,7.$$

Sein Schlußresultat ist demnach die einfache Regel, daß man die $n$te Wurzel aus einer Zahl c durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a}\,\frac{na-2b}{na-b}$$

berechnen kann. Hierbei ist $a = d^n$ möglichst nahe an c zu nehmen, b ist $= a - c$. Jeder gefundene Näherungswert von $\sqrt[n]{c}$ ist als d zur genaueren Bestimmung zu verwerten.

Da mir diese Formel neu war und die gewählten Zahlenbeispiele eine überraschend schnelle Annäherung an die gesuchten Wurzelwerte zeigen, hielt ich die Arbeit des Herrn Parlow für interessant genug, um die Grundgedanken in Kürze auseinander zu setzen. Der Mangel des Verfahrens ist das Fehlen eines Kriteriums für die erreichte Genauigkeit. Die Berechnung des folgenden Näherungswertes kann allerdings darüber einigen Aufschluß geben. Die von mir eingeschobenen Betrachtungen zeigen die Beziehung des Verfahrens zu anderen Theorien, weisen besonders auf einen Zusammenhang mit der Theorie des Kettenbruchalgorithmus hin, der aber in seiner von Jacobi und anderen verallgemeinerten Form aufzufassen sein dürfte, falls es sich um Wurzeln von höherem Grade als dem zweiten handelt. Zur Vertiefung dieser Fragen gebricht es mir an Zeit; ich wollte die Veröffentlichung aber nicht länger hinausschieben.

Nachtrag. 7. Die Abschätzung des Fehlers der Formel

$$\text{(A)}\qquad \sqrt[n]{a-b} \sim \sqrt[n]{a}\cdot\frac{na-2ab}{na-b}$$

läßt sich leicht gewinnen. Aus der Binominalreihe folgt

$$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a}\Big[1 - \frac{b}{na} - \frac{n-1}{2!}\Big(\frac{b}{na}\Big)^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{3!}\Big(\frac{b}{na}\Big)^3 - \cdots\Big].$$

Andererseits ist

$$\sqrt[n]{a}\cdot\frac{na-2b}{na-b} = \sqrt[n]{a}\Big[1 - \frac{b}{na} - \Big(\frac{b}{na}\Big)^2 - \Big(\frac{b}{na}\Big)^3 - \cdots\Big].$$

Also ergibt sich

$$\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a}\cdot\frac{na-2b}{na-b} - \sqrt[n]{a}\cdot\Big(\frac{b}{na}\Big)^2\Big[\frac{n-3}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)-6}{6}\Big(\frac{b}{na}\Big)\cdots\Big].$$

Das subtraktive Glied der rechten Seite dieser Gleichung liefert die vermißte Fehlerbestimmung. Zugleich erkennt man aber auch die Möglichkeit einer Ver-

Digitized by Google

besserung der Formel (A). Es handelt sich nämlich im Grunde um den Ersatz der Binomialreihe in x durch den Quotienten zweier Polynome in x:

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots \sim \frac{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_q x^q}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe für gegebene Werte von p und q läßt sich nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten elementar ermitteln. Folgende Formeln sind die einfachsten:

$$(1+x)^n \sim \frac{2 + (n+1)x}{2 - (n-1)x} \sim \frac{6 + 4(n+1)x + n(n+1)x^2}{6 - 2(n-2)x}$$
$$\sim \frac{6 + 2(n+2)x}{6 - 4(n-1)x + n(n-1)x^2} \sim \frac{12 + 6(n+2)x + (n+1)(n+2)x^2}{12 - 6(n-2)x + (n-1)(n-2)x^2}$$
$$\sim \frac{120 + 60(n+3)x + 12(n+2)(n+3)x^2 + (n+1)(n+2)(n+3)x^3}{120 - 60(n-3)x + 12(n-2)(n-3)x^2 - (n-1)(n-2)(n-3)x^3}.$$

Die Fehlerglieder sind aus den Reihenentwicklungen dieser Brüche durch Vergleichung mit der Binomialreihe leicht zu berechnen. Aus diesen Ausdrücken ergeben sich folgende Formeln, für welche bei den ersten beiden das erste Fehlerglied angegeben ist:

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\frac{2na + (n+1)b}{2na + (n-1)b} + \frac{n^2-1}{12}\left(\frac{b}{na}\right)^3 - \cdots\right].$$

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\frac{6n^2a^2 + 4n(n+1)ab + (n+1)b^2}{2na(3na + (2n-1)b)} - \frac{2(n-1)(n^2-1)}{72}\left(\frac{b}{na}\right)^4 \cdots\right].$$

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a}\left[\frac{2na(3na + (2n+1)b)}{6n^2a^2 + 4n(n-1)ab - (n-1)b^2} \cdots\right].$$

$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a}\left[\frac{12n^2a^2 + 6n(2n+1)ab + (2n+1)(n+1)b^2}{12n^2a^2 + 6n(2n-1)ab + (2n-1)(n-1)b^2} \cdots\right].$$

Die einfachste Näherungsformel ist demnach

$$\text{(B)} \qquad \sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{2na + (n+1)b}{2na + (n-1)b}.$$

Das erste Glied der Korrektion für sie ist von der dritten Ordnung in b/na, während in der Formel (A) des Herrn Parlow, ausgenommen für $n = 3$, das erste Korrektionsglied in b/na quadratisch ist. Die Formel (B) liefert also genauere Werte als die Formel (A).

Der hier benutzte Gedanke der Approximierung der Binomialformel durch den Quotienten zweier Polynome ist, wie ich nachträglich gefunden habe, besonders für Kubikwurzelausziehungen, ausgesprochen von J. H. Lambert, „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Zweyter Theil. Erster Abschnitt". Berlin 1773, S. 152 u. 153 in dem Kapitel: „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen." Die Formel (B) steht ferner in dem Mathematischen Wörterbuch von Ludwig Hoffmann, Band I, S. 249.

Endlich möge noch ein anderes Verfahren erwähnt werden, das sich auf denselben Gedanken stützt wie die sogenannte Newtonsche Näherungsmethode bei der Auflösung numerischer Gleichungen. Es sei für $b < a^n (n > 2)$:

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + x.$$

Digitized by Google

Dann ist unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von x

$$a^n + b \sim a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung für x folgt

$$x = -\frac{a}{n-1} + \frac{a}{n-1}\left[1 + \frac{2b(n-1)}{na^n}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Und hieraus erhält man, nachdem man die Quadratwurzel nach der Binomialformel in eine Reihe entwickelt hat:

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + x - a\left(\frac{b}{na}\right)^2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)(9n-7)}{24}\frac{b}{na} \cdots\right].$$

Mithin ist $a + x$ ein guter Näherungswert für $\sqrt[n]{a^n + b}$. Für $\sqrt[5]{33}$ findet man aus $a=2$, $b=1$, $n=5$ den Wert $x=0{,}0123476$, also $\sqrt[5]{33}=2{,}0123476$. Während aber die Formel (B) rationale Näherungswerte für die gesuchte Wurzel liefert, sind die nach diesem Verfahren gefundenen Zahlen irrational.

Die Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie.

Von Georg Scheffers.

Die Darstellung räumlicher Gebilde mittels senkrechter Axonometrie ist für die Wiedergabe metrischer Beziehungen im Raume in manchen Fällen die einzig brauchbare Art der Abbildung. Im Folgenden möchte ich auseinandersetzen, wie ich die Grundaufgabe dieser Projektionsart in meinen Vorträgen zu bringen pflege, unter Vermeidung trigonometrischer Beziehungen und mit möglichst geringem Aufwande von Konstruktionen. Etwas wesentlich Neues soll hier nicht geleistet werden; es handelt sich nur um eine, wie ich glaube, geschicktere Anordnung für praktische Zwecke. Anhangsweise soll an einige ebenfalls wohlbekannte Vorteile beim axonometrischen Zeichnen erinnert werden.

1. *Bezeichnungen.* Unter einem *Achsenkreuze* wird der Inbegriff dreier zueinander senkrechter gleichlanger Strecken OX, OY, OZ durch einen gemeinsamen Punkt O, den *Anfangspunkt*, verstanden. Die Strecke $OX=OY=OZ$ heiße die *wahre Achsenlänge* a. Wie üblich, soll der Punkt P' die senkrechte Projektion eines Punktes P des Raumes auf die Zeichenebene oder *Tafel* bedeuten. Die *verkürzten Achsenlängen*, d. h. die Längen der Projektionen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ seien mit l, m, n bezeichnet. Die *Spurpunkte* der Geraden OX, OY, OZ, also ihre Schnittpunkte mit der Tafel, mögen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ heißen. Das Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ werde dementsprechend das *Spurdreieck* des Achsenkreuzes genannt.

2. *Verschiedene Voraussetzungen, von denen man ausgehen kann.* Bei der Lösung der Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie, die ja darin besteht, eine *senkrechte* Projektion $O'X'Y'Z'$ irgendeines Achsenkreuzes $OXYZ$ herzustellen, kann man von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen. Am nächsten liegt es, anzunehmen, daß das Spurdreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ gegeben sei. In der Tat erkennt man leicht, daß es, sobald nur dies gegebene Dreieck keinen

Digitized by Google

stumpfen Winkel hat, immer zugehörige Achsenkreuze gibt, und daß O' im Höhenschnittpunkte des Spurdreiecks liegt. Aber diese Voraussetzung, das Spurdreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ zu geben, ist nicht praktisch. Vielmehr wird man entweder ein Achsenkreuz mit gegebenen Verhältnissen der verkürzten Achsenlängen l, m, n oder ein Achsenkreuz mit gegebenen Richtungen der Achsen im Bilde zu zeichnen wünschen. Deshalb richten wir unsere Bestrebungen dahin, unter einer dieser beiden Voraussetzungen die Grundaufgabe zu lösen. Dazu bedarf es einiger einfacher Vorbereitungen.

3. *Der Hilfspunkt.* Auf dem projizierenden Strahle von O, d. h. auf OO', werde von O aus die wahre Achsenlänge a bis zu einem *Hilfspunkte* H abgetragen. Die Lote von H auf die wahren Achsen OX, OY, OZ mögen die Fußpunkte H_x, H_y, H_z haben. Da $OH = a$ die Diagonale des Rechtflaches mit den drei Kanten OH_x, OH_y, OH_z ist, ergibt sich:

$$(1) \qquad a^2 = OH^2 = OH_x^2 + OH_y^2 + OH_z^2.$$

4. *Grundgleichung der senkrechten Axonometrie.* Die Ebene der Zeichnung in Fig. 1 sei die projizierende Ebene von OX; der Schnitt dieser Ebene mit der Tafel ist durch die Schraffur angedeutet. Die Zeichenebene der Figur enthält die Punkte O, O', X, X', H, H_x und $\mathfrak{X}$. Dabei ist $OX = OH = a$ und $O'X' = l$. Man erkennt sofort aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, daß $HH_x = l$, also

$$OH_x^2 = a^2 - l^2$$

ist. Da ganz entsprechend $OH_y^2 = a^2 - m^2$ und $OH_z^2 = a^2 - n^2$ ist, liefert das Einsetzen dieser Werte in (1) sofort die *grundlegende Gleichung*:

$$(2) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 2a^2.$$

Sie zeigt, wie sich die wahre Achsenlänge a aus den drei verkürzten Achsenlängen l, m, n bestimmen läßt.

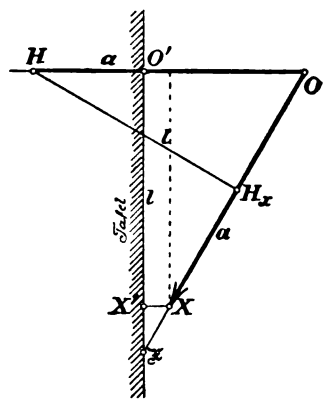


Fig. 1.

5. *Inwieweit man die verkürzten Achsenlängen l, m, n beliebig wählen darf.* Weil l die senkrechte Projektion von $OX = a$ auf die Tafel ist, muß $l \leqq a$ sein; ebenso auch $m \leqq a$ und $n \leqq a$. Wenn man in (2) rechts a durch l, m oder n ersetzt, ergibt sich daher jedesmal eine Ungleichung:

$$(3) \quad l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2l^2, \quad l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2m^2, \quad l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2n^2.$$

Ihre Auflösung nach einem der drei Quadrate, etwa nach n^2, gibt:

$$(4) \qquad n^2 \geqq l^2 - m^2, \quad n^2 \geqq m^2 - l^2, \quad n^2 \leqq l^2 + m^2.$$

Es wird sich nun später zeigen, daß es stets ein Achsenkreuz gibt, wenn man l, m, n irgendwie, aber so gewählt hat, daß diese drei Bedingungen erfüllt sind. Diesen drei Ungleichungen können wir aber wie folgt Genüge leisten: Wir wählen l und m beliebig, etwa — um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, $l > m$. Dann wird die zweite Ungleichung (4) erfüllt, wie wir auch immer n wählen mögen. Die erste und dritte Ungleichung (4) zeigen: Die dritte Strecke n muß zwischen zwei Grenzen gewählt werden, die untere

Digitized by Google

Grenze u ist die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse l und der anderen Kathete m, die obere Grenze v ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten l und m, siehe Fig. 2. Wird also die Strecke n irgendwie zwischen u und v angenommen, so sind alle drei Ungleichungen (4) befriedigt.

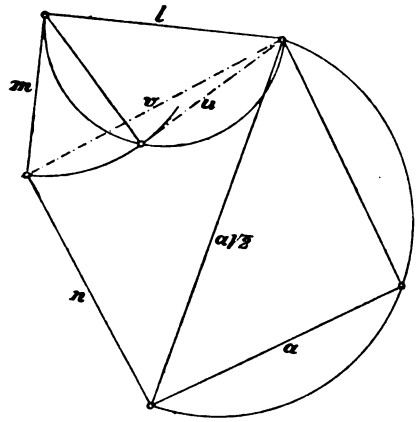


Fig. 2.

6. *Konstruktion der wahren Achsenlänge a aus den verkürzten Achsenlängen l, m, n.* Auf Grund der Formel (2) ergibt sich nunmehr auch leicht a: Es wird das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten v und n gezeichnet. Das Quadrat seiner Hypotenuse ist $l^2 + m^2 + n^2$, daher nach (2) die Hypotenuse gleich $a\sqrt{2}$ (siehe immer noch Fig. 2). Mithin geht a selbst als Kathete des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit jener Hypotenuse hervor. Man sieht, daß diese konstruierte Strecke a nie kleiner als eine der drei Strecken l, m, n sein kann. Denn da die Gleichung (2) befriedigt wird und auch die drei Ungleichungen (4) oder (3) erfüllt sind, geht aus (2) und der ersten Ungleichung (3) sofort $a^2 \geqq l^2$ hervor. Ebenso ergibt sich $a^2 \geqq m^2$ und $a^2 \geqq n^2$.

7. *Zweckmäßige Wahl der Länge einer Seite des Spurdreiecks $\mathfrak{XYZ}$.* Das Bild $O'X'Y'Z'$ eines Achsenkreuzes $OXYZ$ bleibt augenscheinlich unverändert, wenn das Achsenkreuz ohne Drehung in der Richtung senkrecht zur Tafel verschoben wird. Dabei wird aber das Spurdreieck $\mathfrak{XYZ}$ ähnlich vergrößert oder verkleinert. Deshalb darf eine Seite des Spurdreiecks beliebig lang angenommen werden. *Es empfiehlt sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, die Seite $\mathfrak{XY}$ gerade gleich $a\sqrt{2}$ zu wählen.* Dies nehmen wir daher an.

8. *Erster geometrischer Ort von O'.* Wir entnehmen der Fig. 2 die Strecke $a\sqrt{2}$ und zeichnen sie als Seite $\mathfrak{XY}$ des Spurdreiecks irgendwohin, siehe Fig. 3. Da $\sphericalangle\, \mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ ein rechter sein soll, muß der Anfangspunkt O auf derjenigen Kugel liegen, die $\mathfrak{XY}$ zum Durchmesser hat. Wenn O *zunächst irgendwo* auf der Kugel gewählt wird, liegt O' innerhalb des *Kreises* in Fig. 3, dessen Durchmesser $\mathfrak{XY}$ ist. Die Gerade $\mathfrak{X}O'$ treffe diesen Kreis in K. Die Ebene, die längs $\mathfrak{X}K$ auf der Tafel senkrecht steht, schneidet die Kugel in einem Kreise mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}K$. Dieser Kreis ist in Fig. 3 um $\mathfrak{X}K$ herum in die Tafel geklappt worden (nur die eine Hälfte ist angedeutet und zwar gestrichelt). Dabei ist O in die Lage (O) gelangt, indem $\sphericalangle\, \mathfrak{X}O'(O)$ ein rechter sein muß. Wird a auf $(O)\mathfrak{X}$ bis (X) abgetragen, so muß X' der Fußpunkt des Lotes von

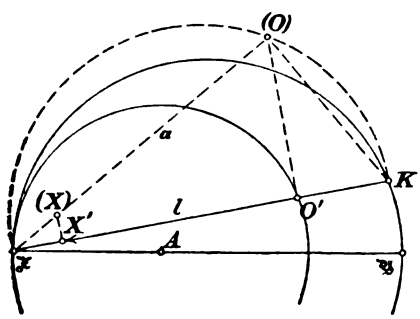


Fig. 3.

Digitized by Google

(X) auf $\mathfrak{X}O'$ sein. Wir haben aber zu fordern: $O'X' = l$. Demnach entnehmen wir der Figur die Proportionen:

$$\frac{\mathfrak{X}(O)}{\mathfrak{X}K} = \frac{\mathfrak{X}O'}{\mathfrak{X}(O)} = \frac{l}{a}, \tag{5}$$

aus denen folgt:

$$\mathfrak{X}O' \cdot \mathfrak{X}K = \frac{l^2}{a^2}. \tag{6}$$

O' muß also auf der Sehne $\mathfrak{X}K$ so liegen, daß sich $\mathfrak{X}O'$ zur ganzen Sehne wie l^2 zu a^2 verhält. Umgekehrt: Wenn O' dies tut, gilt die Proportion (6). Außerdem ist dann aber auch

$$\mathfrak{X}O' \cdot \mathfrak{X}K = \mathfrak{X}(O)^2, \tag{7}$$

so daß aus (6) und (7) durch Multiplikation folgt:

$$\mathfrak{X}O'^2 = \frac{l^2}{a^2}\mathfrak{X}(O)^2, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathfrak{X}O'}{\mathfrak{X}(O)} = \frac{l}{a}.$$

Mithin ist dann in der Tat die Achse $O\mathfrak{X}$ so zur Tafel geneigt, daß die auf ihr liegende Strecke $a = OX$ in der Projektion gerade die Länge l bekommt.

Die Bedingung (6) besagt, da uns die Lage von K noch nicht bekannt ist: Für O' liegt ein geometrischer Ort vor; er entsteht aus dem Kreise über $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ als Durchmesser, indem alle von $\mathfrak{X}$ ausgehenden Sehnen dieses Kreises nach einem gegebenen Verhältnisse verkürzt werden, d. h. der geometrische Ort von O' ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt A so auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = a\sqrt{2}$ liegt, daß

$$\frac{2\mathfrak{X}A}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}} = \frac{l^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{X}A = \frac{l^2}{a\sqrt{2}} \tag{8}$$

ist. Fig. 3 diente nur zur Gewinnung dieses Ergebnisses, zur eigentlichen Konstruktion wird sie nicht gebraucht.

Vielmehr beginnen wir eine neue Fig. 4 mit der Strecke $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = a\sqrt{2}$, die aus Fig. 2 entnommen wird, und mit dem Kreise über $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ als Durchmesser. Der Mittelpunkt A des Kreises, auf dem O' liegen muß, ergibt sich jetzt sehr einfach so: Die Strecke l wird von $\mathfrak{X}$ aus als Sehne in den gezeichneten Kreis eingetragen. Dann trifft das Lot vom Endpunkte L dieser Sehne auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ gerade in A ein, wie man sofort aus dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{X}L\mathfrak{Y}$ erkennt, indem $\mathfrak{X}L = l$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = a\sqrt{2}$ ist, vgl. (8). Der geometrische

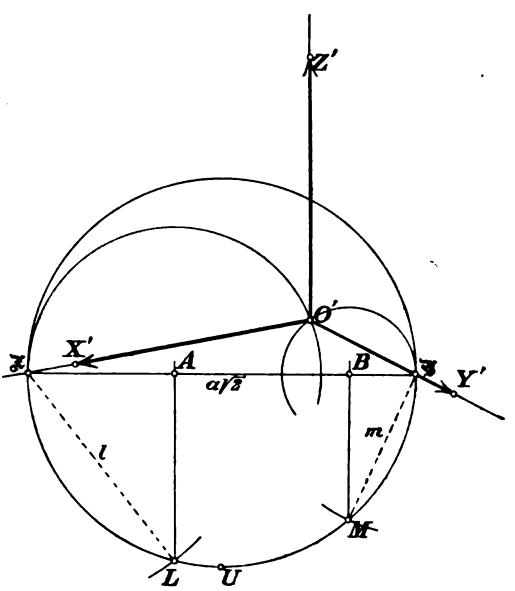


Fig. 4.

Digitized by Google

Ort von O' ist nunmehr derjenige Kreis mit dem Mittelpunkte A, der durch $\mathfrak{X}$ geht. Wählt man O' irgendwo auf diesem Kreise und O senkrecht über der Stelle O' der Tafel und zwar auf der Kugel mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, so steht fest, daß erstens $O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Y}$ einen rechten Winkel miteinander bilden und daß zweitens die auf $O\mathfrak{X}$ aufgetragene Strecke $OX = a$ eine Projektion $O'X'$ von der vorgeschriebenen Länge l hat.

9. *Zweiter geometrischer Ort von O'.* Ganz entsprechend liefert jetzt die Benutzung von m statt l einen zweiten Kreis als geometrischen Ort von O'. Dieser zweite Kreis geht durch $\mathfrak{Y}$, und sein Mittelpunkt B liegt auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Der Mittelpunkt wird gefunden, indem man m als Sehne $\mathfrak{Y}M$ in den Kreis über $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ einträgt und den Fußpunkt B des Lotes von M auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ bestimmt. Wird O' irgendwie auf diesem neuen Kreise und O senkrecht darüber im Raume auf der Kugel mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ angenommen, so steht fest, daß erstens der Winkel $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ ein rechter ist und zweitens die Projektion $O'Y'$ der auf $O\mathfrak{Y}$ abgetragenen Strecke $OY = a$ gerade die vorgeschriebene Länge m hat.

10. *Beide geometrische Örter für O' schneiden einander.* Der Punkt U nämlich, der den Halbkreis über $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ halbiert, liegt stets zwischen L und M, denn es ist $\mathfrak{X}U = \mathfrak{Y}U = a$ und $\mathfrak{X}L = l < a$ und $\mathfrak{Y}M = m < a$. Demnach folgen die Punkte auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ stets in der Reihenfolge $\mathfrak{X}AB\mathfrak{Y}$ aufeinander. Nun ist $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = a\sqrt{2}$ und nach (8)[1]:

$$\mathfrak{X}A = \frac{l^2}{a\sqrt{2}}, \qquad \mathfrak{Y}B = \frac{m^2}{a\sqrt{2}}, \tag{9}$$

folglich

$$AB = a\sqrt{2} - \frac{l^2}{a\sqrt{2}} - \frac{m^2}{a\sqrt{2}} = \frac{2a^2 - l^2 - m^2}{a\sqrt{2}}$$

oder nach (2):

$$AB = \frac{n^2}{a\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Die beiden Kreise um A und B treffen einander dann und nur dann, wenn ihre Zentrale AB nicht größer als die Summe ihrer Radien ist, d. h. also nach (10) und (9), wenn

$$\frac{n^2}{a\sqrt{2}} \leqq \frac{l^2}{a\sqrt{2}} + \frac{m^2}{a\sqrt{2}}$$

ist. Dieser Fall liegt aber nach der dritten Ungleichung (4) vor.

11. *Beendigung der Konstruktion des Achsenkreuzes.* Von den beiden Schnittpunkten der Kreise um A und B wählen wir einen als Punkt O' aus. Dann muß O im Raume senkrecht über O' auf der Kugel mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ liegen. Dreierlei ist nun sicher: Erstens ist $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ ein rechter Winkel, zweitens hat die auf $O\mathfrak{X}$ aufgetragene Strecke $OX = a$ in der Projektion die Länge $O'X' = l$ und drittens hat die auf $O\mathfrak{Y}$ aufgetragene Strecke $OY = a$ in der Projektion die Länge $O'Y' = m$. Nun handelt es sich nur noch um die Konstruktion der *dritten* Achse. Durch O geht eine und nur eine zur Ebene $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ senkrechte Gerade; auf ihr tragen wir $OZ = a$ ab. Die Pro-

1) Alle Strecken werden absolut gemessen, es soll also $\mathfrak{Y}B$ nichts anderes als $B\mathfrak{Y}$ bedeuten.

Digitized by Google

jektion dieser Geraden ist nach einem wohlbekannten Satze senkrecht zu $\mathfrak{XY}$. Da OX, OY, OZ ein Achsenkreuz bilden und OX und OY in der Projektion die Längen l und m haben, während $OX = OY = OZ = a$ ist, besteht nach (2) die Beziehung:

$$l^2 + m^2 + O'Z'^2 = 2a^2.$$

Ihre Vergleichung mit (2) lehrt, daß $O'Z' = n$ ist. *Mithin liegt jetzt in Fig. 4 das Bild eines Achsenkreuzes mit den vorgeschriebenen verkürzten Achsenlängen l, m, n vor. Es hat sich gezeigt, daß l und m beliebig gewählt werden dürfen, während man n alsdann beliebig zwischen zwei gewissen Grenzen annehmen darf.*

Da $\mathfrak{Z}$, der Spurpunkt von OZ, auf $O'Z'$ liegt, ist O' nach Fig. 4 auf der von $\mathfrak{Z}$ ausgehenden Höhe des Spurdreieckes $\mathfrak{XYZ}$ gelegen; ebenso hätte man schließen können, daß O' auf den von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ausgehenden Höhen liegt. Mithin ergibt sich nebenbei die schon oben erwähnte Tatsache, daß O' der Höhenschnittpunkt des Spurdreieckes $\mathfrak{XYZ}$ ist.

12. *Konstruktion des Bildes des Achsenkreuzes aus den im Bilde gegebenen Achsenrichtungen.* Wir nehmen jetzt an, von dem Achsenkreuze sei nur das eine bekannt, daß die Projektionen der Achsen auf drei gegebenen von einem Punkte O' ausgehenden Strahlen liegen. Es fragt sich, ob es ein zugehöriges Achsenkreuz gibt und wie man sein Bild zu konstruieren hat.

Zunächst ist klar: Gibt es ein zugehöriges Achsenkreuz, so kann man seine wahre Achsenlänge a immer noch beliebig groß wählen. Deshalb dürfen wir $a\sqrt{2}$ beliebig groß wählen. Folglich gehen wir so vor: Aus den gegebenen drei von O' ausgehenden Strahlen stellen wir rückwärts wieder die Fig. 4 her, siehe Fig. 5.

Wir wählen zunächst $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf den beiden ersten Strahlen so, daß $\mathfrak{XY}$ zur dritten Richtung senkrecht ist, und konstruieren darauf den Halbkreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{XY}$. Dann wählen wir $a\sqrt{2} = \mathfrak{XY}$. Da O' auf den beiden Kreisen der Fig. 4 mit den Mittelpunkten A und B liegen soll und diese Kreise durch $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ gehen, finden wir A und B in Fig. 5 rückwärts als Schnittpunkte von $\mathfrak{XY}$ mit den Mittelloten von $O'\mathfrak{X}$ und $O'\mathfrak{Y}$. Weiterhin ergeben sich L und M auf dem Kreise über $\mathfrak{XY}$, indem wir in A und B die Lote auf $\mathfrak{XY}$ errichten. Alsdann ist $\mathfrak{X}L = l$ und $\mathfrak{X}M = m$. Nach dem Früheren aber müssen wir voraussetzen: Die drei Strahlen von O' aus müssen so gegeben sein, daß A zwischen $\mathfrak{X}$ und der Mitte von $\mathfrak{XY}$ sowie B zwischen $\mathfrak{Y}$ und der Mitte von $\mathfrak{XY}$ liegt. Anders ausgesprochen: Der Winkel $\mathfrak{X}O'\mathfrak{Y}$ darf nicht kleiner als ein rechter sein. Wenn also die drei von O' ausgehenden Richtungen beliebig gegeben sind und die beiden ersten Richtungen einen spitzen Winkel miteinander bilden, werden wir eine von ihnen durch die entgegengesetzte (über O' hinaus) zu ersetzen haben, ehe die Konstruktion beginnt. Alsdann sind wir auch dessen sicher, daß L zwischen $\mathfrak{X}$ und U sowie M zwischen $\mathfrak{Y}$ und U liegt, wenn U die Mitte des Halbkreisbogens über $\mathfrak{XY}$ bedeutet. Wegen $\mathfrak{XY} = a\sqrt{2}$ ist jetzt $\mathfrak{X}U = a$, also wegen $l = \mathfrak{X}L \leqq \mathfrak{X}U$ und $m = \mathfrak{Y}M < \mathfrak{Y}U$

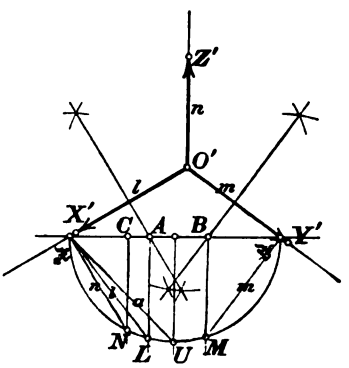


Fig. 5.

Digitized by Google

auch $l \leqq a$ und $m \leqq a$. Mithin wird $l^2 + m^2 \leqq 2a^2$. Es gibt folglich eine Strecke n derart, daß sie der Grundgleichung (2) oder also der Gleichung

$$n^2 = 2a^2 - l^2 - m^2$$

genügt. Übrigens läßt sie sich leicht in Fig. 5 konstruieren. Denn darin ist, wie sich unter (10) ergab, $AB = n^2 : a\sqrt{2}$. Wir nehmen deshalb AB in den Zirkel und tragen diese Strecke von X aus auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ bis C ab. Wird nun in C das Lot auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ errichtet, so schneidet es den Halbkreis über $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ in einem Punkte N so, daß $\mathfrak{X}N = n$ ist. Daß n hierbei nicht größer als a ausfällt, liegt auf der Hand, denn sonst wäre $\mathfrak{X}C$ oder AB größer als die Hälfte von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Dies aber ist nicht der Fall, denn wir haben ja im Dreieck ABO' die Ungleichung:

$$AO' + BO' \geqq AB,$$

also wegen $AO' = \mathfrak{X}A$ und $BO' = \mathfrak{Y}B$ die Ungleichung:

$$\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B \geqq AB.$$

Tragen wir schließlich die gefundenen Strecken $l = \mathfrak{X}L$, $m = \mathfrak{Y}M$ und $n = \mathfrak{X}N$ auf den drei von O' ausgehenden Richtungen von O' aus bis X', Y', Z' ab, so liegt die Projektion $O'X'Y'Z'$ des Achsenkreuzes vor. Dabei ist die wahre Achsenlänge $a = \mathfrak{X}U$.

13. *Erster Zusatz: Der Verkürzungsmaßstab.* Der Vollständigkeit halber machen wir, wie angekündigt, einige zusätzliche Bemerkungen über die Benutzung des konstruierten Bildes des Achsenkreuzes. Die erste bezieht sich darauf, wie man in dies Bild Zeichnungen räumlicher Objekte mittels ihrer Koordinaten einträgt. Ein Punkt P des Raumes habe in bezug auf das Achsenkreuz $OXYZ$ die Koordinaten x, y, z. Sie werden im Bilde verkürzt, etwa gleich x', y', z'. Dabei muß $x' : x = l : a$, $y' : y = m : a$ und $z' : z = n : a$ sein. Um diese verkürzten Koordinaten leicht zu finden, konstruiert man einen Viertelkreis mit dem Radius a, siehe Fig. 6, trägt auf dem einen, etwa verti-

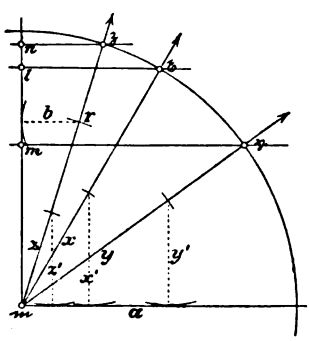


Fig. 6.

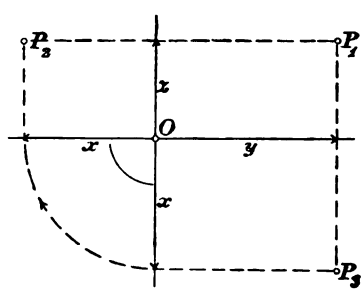


Fig. 7.

kalen, Endradius von der Mitte $\mathfrak{m}$ aus die Strecken l, m, n ab und zieht durch die Endpunkte die horizontalen Geraden. Sie mögen den Viertelkreis in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ treffen. Nunmehr zieht man noch die Strahlen $\mathfrak{m}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{z}$. Um x' zu finden, kann man jetzt so vorgehen: Man trägt mit dem Zirkel die Strecke x auf $\mathfrak{m}\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ aus ab und ermittelt den Abstand x' des Endpunktes vom horizontalen

Digitized by Google

Radius mit Hilfe des Zirkels, *ohne diesen Abstand wirklich zu zeichnen.* (Wir haben ihn deshalb in Fig. 6 nur gestrichelt.) Entsprechend findet man y' aus y und z' aus z, indem man nur jeweils die richtigen Hilfstrahlen $\mathfrak{m}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{z}$ statt $\mathfrak{m}\mathfrak{x}$ benutzt.

Ist ein Punkt P im Raume durch seine drei Projektionen auf die Ebenen OYZ, OZX und OXY, d. h. durch seine Projektionen P_1, P_2, P_3 auf die zueinander senkrechten Tafeln gegeben, siehe Fig. 7, so greift man darin x, y und z mittels des Zirkels ab, konstruiert, wie schon angegeben, mit Hilfe von Fig. 6 die verkürzten Koordinaten x', y' z' und führt sie in bekannter Weise in das Bild $O'X'Y'Z'$ des Achsenkreuzes ein, siehe Fig. 8. Dadurch erhält man das Bild P' des angenommenen Punktes P.

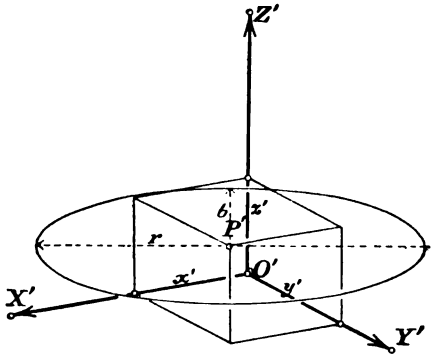


Fig. 8.

14. *Zweiter Zusatz: Besondere Vorteile beim axonometrischen Zeichnen.* Wir wissen: $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ ist zu $O'Z'$ senkrecht. Andererseits ist $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ diejenige Gerade der Ebene OXY, die auf der Tafel liegt. Daraus folgt: *Jede zur Tafel parallele Gerade in der Ebene OXY erscheint im Bilde senkrecht zu $O'Z'$.* Da sie als Parallele zur Tafel nicht verkürzt wird, folgt weiter: *Jede zur Tafel der Zeichnung und zur Achsenebene OXY parallele Gerade erscheint im Bilde unverkürzt und senkrecht zu $O'Z'$.* Entsprechendes gilt von denjenigen Geraden, die zur Tafel der Zeichnung und einer der beiden anderen Achsenebenen OYZ und OZX parallel sind.

Soll also z. B. ein *Kreis* abgebildet werden, dessen Mittelpunkt der vorhin konstruierte Punkt P ist, dessen Ebene etwa zur OXY-Ebene parallel liegt und dessen Radius eine gegebene Länge r hat, so ergibt sich sofort: Dieser Kreis erscheint als eine *Ellipse* mit der großen Halbachse r, und zwar liegt die große Achse senkrecht zu $O'Z'$ (siehe wieder Fig. 8). Die kleine Halbachse b erscheint demnach im Bilde parallel zu $O'Z'$. In Wahrheit ist sie parallel zu denjenigen Geraden in der Ebene OXY, die Linien stärksten Gefälles gegenüber der Tafel der Zeichnung sind. Daraus folgt leicht, daß man b mit Hilfe der Verkürzungsmaßstäbe in Fig. 6 so findet: Man trägt r auf $\mathfrak{m}\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{m}$ aus ab und ermittelt durch bloßes Abgreifen mit dem Zirkel die Entfernung des Endpunktes von dem *vertikalen* Radius. Diese Entfernung ist die halbe Nebenachse b der Ellipse.

Es ist demnach besonders bequem, die Bilder von Kreisen zu zeichnen, die einer der drei Ebenen des Achsenkreuzes parallel sind.

Auf weitere Vorteile des axonometrischen Zeichnens wollen wir nicht eingehen.

Digitized by Google

Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz.

Von J. Knoblauch.

Bei flächentheoretischen Untersuchungen, welcher Art sie auch sein mögen, ist man genötigt, sich so bald wie möglich für ein Formelsystem zu entscheiden, von dem aus man die Untersuchung beginnen will. Je nach der Natur der Aufgabe sehen solche Formelsysteme ganz verschieden aus und scheinen auf den ersten Anblick untereinander gar keinen Zusammenhang zu haben. Dadurch erhalten dann auch die Resultate einen Anschein von Vereinzelung, der den weiteren Fortschritt der Differentialgeometrie hindert. Diese Übelstände können in den weitaus meisten Fällen vermieden werden, wenn man sich beständig über folgende Fragen Rechenschaft gibt: 1. Sind die vorliegenden Gleichungen etwa bloße Identitäten, die mit der flächentheoretischen Bedeutung der darin vorkommenden Größen nichts zu tun haben? 2. Haben die Formeln, soweit sie nur partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Koordinaten enthalten, ihren Grund lediglich in der Benutzung von krummlinigen Koordinaten gleichzeitig mit den kartesischen? Mit anderen Worten, sind sie mit den Gauß-Weingartenschen Gleichungen identisch? 3. Sind die Relationen unter denjenigen geometrischen Größen, die von der Wahl der Koordinatensysteme nicht abhängen, rein algebraischer Natur, oder sind sie in den Fundamentalgleichungen enthalten, oder endlich aus diesen durch Weiterdifferentiieren entstanden? Erst wenn diese Fragen, von denen in jedem Falle mindestens eine zu bejahen ist, erledigt sind, kann man die neuen Voraussetzungen einführen, die das spezielle Problem mit sich bringt.

Über die erste ist kein Wort weiter zu verlieren. Die zweite und dritte Frage hängen auf das engste zusammen, weil die drei Fundamentalgleichungen bekanntlich für die Gauß-Weingartenschen partiellen Differentialgleichungen die Bedeutung von Integrabilitätsbedingungen haben. Man kann also nichts Besseres tun, als in den Inhalt der Gaußschen Gleichungen unter den allgemeinsten Voraussetzungen über die krummlinigen Koordinaten einzudringen. Die Weingartenschen Gleichungen können bereits aus den Gaußschen abgeleitet werden; dennoch ist es zweckmäßig, sie beständig gleichzeitig mit jenen in Betracht zu ziehen.

Wie man überhaupt Größen von anschaulicher Bedeutung in die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = J_1 \frac{\partial x}{\partial u} + J_2 \frac{\partial x}{\partial v} + LX, \ldots$$

einführen kann, ist längst bekannt. Man benutzt an Stelle der Ableitungen erster Ordnung die Richtungskosinus der Koordinatenlinien $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}$, und dann weiter z. B. an Stelle von $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ die Größe $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}\right)$. Aber auf diese Weise kommt man über die Koordinatenlinien nicht hinaus, von denen man doch ebensowenig etwas aussagen will wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie von den Koordinatenachsen. Was man sucht, sind Eigen-

Digitized by Google

schaften von Flächen oder Flächen selbst, deren Punkte auf ein beliebiges, der vorliegenden Untersuchung angepaßtes Kurvennetz bezogen sind. An dieser Stelle scheiden sich die Voraussetzungen der analytischen Geometrie von denen der Differentialgeometrie. Dort würde es nur in ganz besonderen Fällen, wie z. B. in der Theorie der konjugierten Durchmesser der Flächen zweiten Grades, von Nutzen sein können, ein schiefwinkliges Koordinatensystem anzuwenden. Hier dagegen braucht man sich nur der mannigfachen Aufgaben zu erinnern, die an die Asymptotenkurven anknüpfen, und zu bedenken, daß diese Kurven nur auf den Minimalflächen zueinander senkrecht sind, um zu sehen, daß man mit orthogonalen Kurvennetzen nicht auskommt. Versucht man dies trotzdem, so kann man sich nicht wundern, wenn dadurch die Aufgaben der Flächentheorie in ein falsches Licht gerückt werden. Und wenn dann noch die beiden Scharen orthogonaler Kurven als Koordinatenlinien angenommen werden, so ist es mit der Einsicht in den Inhalt der Formeln gewöhnlich vorbei. Cesàros Lezioni di geometria intrinseca liefern dafür lehrreiche Beispiele.

Sucht man nun nach einem Leitfaden, um sich in dem Labyrinth der flächentheoretischen Formeln zurechtzufinden, so kann es heute keinem Zweifel mehr unterliegen, daß man sich dazu der Gleichungen zu bedienen hat, die ich als die allgemeinen Frenetschen Formeln bezeichne. Eine Meinungsverschiedenheit kann höchstens darüber bestehen, ob man von diesen Formeln ausgehen oder sie erst im Laufe der Untersuchung einführen will.

In der allgemeinen Theorie der Raumkurven stehen auf den linken Seiten der Frenetschen Formeln die geometrischen Ableitungen erster Ordnung der Richtungskosinus der Tangente, Binormale und Hauptnormale, auf den rechten Seiten homogene lineare Funktionen dieser Kosinus selbst; die Koeffizienten sind geometrische Größen, die von der Wahl der Koordinaten nicht abhängen. Hiernach lassen sich die geometrischen Ableitungen beliebiger Ordnung durch ebensolche Funktionen darstellen. In der Theorie der Flächenkurven gibt es für jede Funktion $\chi(u, v)$ zwei erste geometrische Ableitungen, den gewöhnlichen Differentialquotienten $\frac{\partial \chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ entsprechend. Eins der Formelsysteme bezieht sich in dieser Theorie unter allen Umständen auf die Flächennormale, die beiden anderen auf bestimmte Richtungen längs der Fläche. Und die Brauchbarkeit der Formeln besteht gerade darin, daß man, ohne die Parameter irgendwie zu spezialisieren, diese Richtungen der jeweiligen Untersuchung entsprechend wählen kann. Bei gegebenem schiefwinkligen Kurvennetz wird man, wenn nicht besondere Gründe dagegen sprechen, naturgemäß die Tangenten der beiden Kurven selbst bevorzugen, die, dem Netze angehörig, sich in dem betrachteten Flächenpunkte schneiden.

Dies ist der Standpunkt, den Nicolaides in einer fast unbekannten Abhandlung „Sur les équations fondamentales des surfaces“ einnimmt (Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques, livraison $^{11}/_{12}$ u. $^{13}/_{14}$, Athen, (April) 1873). Nicolaides hat von dem Problem eine völlig richtige Auffassung, wenn auch nicht eine ganz präzise Vorstellung von der Tragweite der Fundamentalgleichungen, namentlich der ersten, gewöhnlich nach Gauß benannten. Hiermit hängt es zusammen, daß er diese Gleichungen nur unter der besonderen Annahme wirklich bildet, die Kurven des Netzes schnitten sich unter konstantem Winkel. Allerdings würde es zur endgültigen Aufstellung der allgemeinen Fundamentalgleichungen nur des Einsetzens be-

Digitized by Google

stimmter, in der Abhandlung angegebener Größen bedürfen (S. 323). Wenn Nicolaides dies unterläßt, so liegt dafür offenbar noch ein zweiter, wichtiger Grund vor: Es fehlen ihm nämlich die Mittel, die allgemeinen analytischen Ausdrücke der geometrischen Ableitungen zu bilden. Infolge davon findet er sich sogar veranlaßt, im weiteren Verlauf seiner Arbeit die geometrischen Ableitungen wieder zu verlassen und zu den gewöhnlichen zurückzukehren. Die dabei entstehenden Formeln sind für einzelne Anwendungen brauchbar, aber eine Einsicht allgemeinen Charakters vermitteln sie nicht, weil sie geometrische und analytische Größen gemischt enthalten.

Schon mehrere Jahre vor Nicolaides haben sich zwei andere Mathematiker mit der Theorie der schiefwinkligen Kurvennetze beschäftigt, Aoust und Gilbert. Sie legen freilich das Hauptgewicht nicht auf diese Theorie, sondern auf eine bestimmte geometrische Größe, die Aoust als courbure oblique, später als courbure inclinée bezeichnet hat, und die bei Gilbert déviation heißt. Es lohnt heute nicht mehr, von dem Prioritätsstreit Kenntnis zu nehmen, der sich zwischen den beiden Forschern über diesen Begriff entsponnen hat, zumal sie unzweifelhaft unabhängig voneinander dazu gelangt sind. Der Begriff hat sich nämlich aus gutem Grunde nicht durchsetzen können. Was also die hierher gehörenden Arbeiten der beiden Mathematiker angeht, so reicht es aus, je eine hervorzuheben: Aoust, Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque, Paris (Gauthier-Villars) 1869; Gilbert, Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque, 1868 (Mém. de l'Acad. des Sciences de Belgique, Bd. 37, 1869). In die dort gegebenen Auseinandersetzungen einzudringen, kostet einige Mühe, nicht sowohl wegen des Gegenstandes selbst, als wegen der großen Anzahl vielfach überflüssiger Formeln und, namentlich bei Aoust, auch wegen der Bezeichnungen. Das Resultat ist, daß sich alle drei Fundamentalgleichungen unter den allgemeinsten Voraussetzungen bereits bei Gilbert finden. Allerdings müßten sie noch von den Differentialen befreit werden, mit denen sie infolge der von Gilbert angewendeten Methode des Unendlichkleinen durchsetzt sind; eine Methode, die übrigens auch bei Aoust die Grundlage bildet. Über die Auffassung der Fundamentalgleichungen und über die Möglichkeit, die geometrischen Differentiationen allgemein durch bestimmte analytische Operationen darzustellen, gilt für Aoust und Gilbert dasselbe wie für Nicolaides.

Es seien nun c_1 und c_2 die durch einen beliebigen Flächenpunkt hindurchgehenden beiden Kurven des Netzes, $(A_1 B_1 C_1)$ und $(A_2 B_2 C_2)$ die Kosinus je einer bestimmten Richtung ihrer Tangenten. Der durch positive Drehung von c_1 nach c_2 entstandene Winkel heiße α. Unterwirft man die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Sigma A_1^2 = 1, \quad \Sigma A_2^2 = 1, \quad \Sigma X^2 = 1 \\ &\Sigma A_2 X = 0, \quad \Sigma A_1 X = 0, \quad \Sigma A_1 A_2 = \cos\alpha \end{aligned}$$

den geometrischen Differentiationen längs c_1 und c_2, die durch D_1 und D_2 gekennzeichnet werden sollen, und löst nach den einzelnen Ableitungen auf, so erhält man die allgemeinen Frenetschen Formeln. Diese sind namentlich auch aus dem Grunde wichtig, weil sie zeigen, welche geometrischen Größen in der Theorie der Flächenkurven ganz von selbst auftreten, auf welche Größen man also besonders zu achten hat, um andere von gleicher Ordnung auf sie zurückzuführen. Es sind für jede der beiden Kurven die Normalkrümmung n, die

Digitized by Google

Tangentialkrümmung $\mathfrak{g}$, die geodätische Windung t und die geometrische Ableitung von α, die übrigens immer nur in der Verbindung $\mathfrak{g} + D\alpha$ vorkommt. Die Formeln selbst lauten, wenn

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_1 \operatorname{ctg}\alpha - A_2 \operatorname{cosec}\alpha &= A', \ldots \\ A_2 \operatorname{ctg}\alpha - A_1 \operatorname{cosec}\alpha &= A'', \ldots \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$(3)\qquad \begin{aligned} D_1 A_1 &= -\mathfrak{g}_1 A' + \mathfrak{n}_1 X, \ldots \\ D_2 A_1 &= (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha) A' + (\mathfrak{n}_2 \cos\alpha - \mathfrak{t}_2 \sin\alpha) X, \ldots \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} D_1 A_2 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha) A'' + (\mathfrak{n}_1 \cos\alpha + \mathfrak{t}_1 \sin\alpha) X, \ldots \\ D_2 A_2 &= -\mathfrak{g}_2 A'' + \mathfrak{n}_2 X, \ldots \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} D_1 X &= -\mathfrak{n}_1 A_1 + \mathfrak{t}_1 A', \ldots \\ D_2 X &= -\mathfrak{n}_2 A_2 - \mathfrak{t}_2 A'', \ldots . \end{aligned}$$

Das Auftreten der Verbindungen (2) kennzeichnet die Bedeutung der Tangentialnormale für die Theorie der Flächenkurven.

Die Einführung der Winkelgröße α in die Ausgangsgleichungen (1) erscheint als durchaus natürlich. Will man sie dennoch im Hinblick auf den anderartigen Charakter der sonst vorkommenden Größen vermeiden, so kann man das mit Hilfe der Gleichung

$$(6)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_1},$$

die bei Gilbert vorkommt und bei Nicolaides systematisch benutzt wird.

Die Gleichungen (3), (4), (5) sind die Gauß-Weingartenschen in kovarianter Form.

Allerdings bedarf es noch der Darstellung der geometrischen Ableitungen durch allgemeine analytische Ausdrücke. Sie ist, wie man heutzutage fast als selbstverständlich betrachten darf, an die Theorie eines Paares quadratischer Differentialformen zu knüpfen; einerseits wegen der Bedeutung der Grundform A, als Quadrat des Linienelements der Fläche, und andererseits, weil das Kurvennetz meist durch eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$(7)\qquad \Lambda \equiv l_{11}du^2 + 2l_{12}dudv + l_{22}dv^2 = 0 \qquad (l_{11}l_{22} - l_{12}^2 < 0)$$

gegeben sein wird, z. B. für die Asymptotenlinien durch die Gleichung $\mathsf{B} = 0$.

Gefordert wird, zwei lineare Differentialformen

$$\mathfrak{N}_1 \equiv n_{11}du + n_{12}dv, \qquad \mathfrak{N}_2 \equiv n_{21}du + n_{22}dv$$

so zu bestimmen, daß bei passender Wahl der Koeffizienten a, b, c und λ die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= a\mathfrak{N}_1^2 + 2b\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + c\mathfrak{N}_2^2 \\ \Lambda &= \lambda\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 \end{aligned}$$

bestehen, worauf die Differentiationen längs bestimmter Richtungen der Kurven $\mathfrak{N}_2 = 0$ und $\mathfrak{N}_1 = 0$ durch die Gleichungen

Digitized by Google

$$(9)\qquad \begin{aligned} D_1\chi &= \frac{1}{n}\left(n_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u} - n_{21}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)\\ D_2\chi &= \frac{1}{n}\left(-n_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u} + n_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)\end{aligned} \qquad (n = n_{11}n_{12} - n_{12}^2)$$

gekennzeichnet werden.

Die übersichtlichste, wenn auch nicht theoretisch einfachste Art der Bestimmung der Formen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sowie der vorkommenden Koeffizienten geschieht mittels des Durchganges durch das landläufige Problem der simultanen Transformation von A und Λ in algebraische Summen von Quadraten, d. h. geometrisch, durch die Theorie der Winkelhalbierungslinien des betrachteten Kurvenpaares. Man setze

$$\mathsf{A} = \mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2$$
$$\Lambda = l_1\mathfrak{M}_1^2 + l_2\mathfrak{M}_2^2,$$

wo demnach l_1 und l_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} la_{11} - l_{11}, & la_{12} - l_{12}\\ la_{12} - l_{12}, & la_{22} - l_{22}\end{vmatrix} = 0$$

bedeuten, und stelle etwa durch die Annahme $l_1 > l_2$ eine bestimmte Folge zwischen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ fest. Alsdann lassen sich die Koeffizienten dieser Differentialformen und, damit unmittelbar zusammenhängend, die positiven Richtungen der aufeinander senkrechten Kurven $\mathfrak{M}_2 = 0$, $\mathfrak{M}_1 = 0$ so wählen, daß der im positiven Sinne von der ersten zur zweiten Kurve gezählte Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{nicht } \frac{3\pi}{2}\right)$ wird, daß also die beiden Kurven in dieser Folge mit den Koordinatenlinien $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ gleichen Sinnes sind. Diese Tatsache findet in der Ungleichung

$$m \equiv m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0$$

ihren Ausdruck.

Man setze dann weiter

$$(11)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{-l_2}}\,\mathfrak{M}_1 - \sqrt{\frac{l_1 - l_2}{l_1}}\,\mathfrak{M}_2\right)\\ \mathfrak{N}_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{-l_2}}\,\mathfrak{M}_1 + \sqrt{\frac{l_1 - l_2}{l_1}}\,\mathfrak{M}_2\right),\end{aligned}$$

so wird auch $n > 0$, und die beiden Kurven, auf die es eigentlich ankommt, ebenfalls den Koordinatenlinien äquivalent. Die Formeln (8) werden

$$(12)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathfrak{N}_1^2 - 2\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_2^2\\ \Lambda &= \frac{-4l_1l_2}{l_1 - l_2}\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2.\end{aligned}$$

Die erste von ihnen stellt nichts weiter dar als den Ausdruck eines beliebigen Linienelements auf der Fläche durch die Bogenelemente der beiden Kurven $\mathfrak{N}_2 = 0$ und $\mathfrak{N}_1 = 0$.

Um endlich aus den allgemeinen Frenetschen Formeln die Fundamentalgleichungen abzuleiten, braucht man die Vertauschungsformel. Sie lautet, wenn

Digitized by Google

$$(13)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha)\operatorname{cosec}\alpha + (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha &= \mathfrak{h}_1\\ (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha)\operatorname{ctg}\alpha + (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha)\operatorname{cosec}\alpha &= \mathfrak{h}_2\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$(14)\qquad D_2D_1\chi - D_1D_2\chi = \mathfrak{h}_1 D_1\chi - \mathfrak{h}_2 D_2\chi.$$

Die Fundamentalgleichungen selbst erhalten für

$$(15)\qquad \mathfrak{n}_1\cos\alpha + \mathfrak{t}_1\sin\alpha \equiv \mathfrak{n}_2\cos\alpha - \mathfrak{t}_2\sin\alpha = \mathfrak{m}$$

die Form

$$(16)\qquad \begin{aligned}&D_2\mathfrak{g}_1 + D_1\mathfrak{g}_2 + D_2D_1\alpha + \mathfrak{h}_2D_2\alpha - (\mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\cos\alpha + \mathfrak{h}_2^2)\operatorname{cosec}\alpha\\ &\quad = (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{m}^2)\operatorname{cosec}\alpha\end{aligned}$$

$$(17)\qquad \begin{aligned}&D_2\mathfrak{n}_1 - \operatorname{ctg}\alpha D_2\mathfrak{t}_1 + \operatorname{cosec}\alpha D_1\mathfrak{t}_2 - 2\mathfrak{h}_2\mathfrak{t}_2\operatorname{cosec}\alpha + \mathfrak{h}_1(\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}_1)\operatorname{cosec}^2\alpha = 0\\ &D_1\mathfrak{n}_2 + \operatorname{ctg}\alpha D_1\mathfrak{t}_2 - \operatorname{cosec}\alpha D_2\mathfrak{t}_1 + 2\mathfrak{h}_1\mathfrak{t}_1\operatorname{cosec}\alpha + \mathfrak{h}_2(\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2)\operatorname{cosec}^2\alpha = 0.\end{aligned}$$

Eine große Anzahl interessanter und wichtiger Sätze läßt sich durch Hinzunahme spezieller Voraussetzungen, sei es über das Kurvennetz oder über die Fläche selbst, aus ihnen ableiten.

Nachdem die allgemeinen Frenetschen Formeln einmal hergestellt sind, ist es leicht zu sehen, aus welchem Grunde die ausdrückliche Benutzung der Deviation sich nicht empfiehlt. Nach der von Aoust und Gilbert gegebenen Erklärung ist nämlich das Quadrat dieser Größe z. B. für die Kurve c_1 gleich $\Sigma(D_2A_1)^2$, d. h. nach der zweiten Gleichung (3) gleich $(\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha)^2 + (\mathfrak{n}_2\cos\alpha - \mathfrak{t}_2\sin\alpha)^2$. Ein beständiges Rechnen mit dieser Größe würde also auf dasselbe hinauskommen, als ob man in der allgemeinen Theorie der Raumkurven neben der Krümmung und der Windung auch immer grundsätzlich mit der ganzen Krümmung operieren wollte.

Über die Komposition der Moutardschen Transformationen.

Von Hans Jonas.

Im 2. Bande[1]) der neuen Auflage seiner Lezioni di geometria differenziale stellt Bianchi ein Kompositionstheorem für die Moutardschen Transformationen auf, das als eine Verallgemeinerung seines Vertauschbarkeitssatzes für die Bäcklundschen Transformationen angesehen werden kann. Bildet die Fläche S mit S_1 und S_2 die Brennflächen zweier W-Strahlensysteme, so läßt sich, wie Bianchi zeigt, unter Ausführung einer einzigen Quadratur eine einparametrige Schar von Flächen S' ermitteln, von denen ebenfalls jede sich mit S_1 und S_2 zu Brennflächen zweier neuer W-Strahlensysteme ergänzt. Vier so zusammenhängende W-Systeme will ich ein *W-Quadrupel* nennen. Ein solches enthält, wie aus dieser Entstehungsweise hervorgeht, ∞^2 windschiefe Vierecke, die jede der 4 Flächen S, S_1, S', S_2, auf denen die Asymptotenlinien und damit auch die Netze konjugierter Kurven einander entsprechen, mit zwei zusammenstoßenden Seiten berühren. Während Bianchi unter Benutzung der Parameter der Asymptotenlinien ein W-Quadrupel durch Zu-

1) § 247 und 248.

Digitized by Google

sammensetzung Moutardscher Transformationen aus 5 Lösungen einer Laplaceschen Gleichung mit Hilfe von 10 Quadraturen bestimmt, will ich im Folgenden zeigen, daß nach Einführung gewisser konjugierter Systeme und einer neuen Kongruenz, deren Strahlen ich als die *Träger des W-Quadrupels* bezeichne, die Lösung des Problems nur 3 Integrale einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung und 3 Quadraturen erfordert. Was die Behandlung spezieller Fälle anbetrifft, so beschränke ich mich in dieser Mitteilung auf den Fall pseudosphärischer Brennflächen. Hingewiesen sei aber auf das ausgedehnte Anwendungsgebiet, das Bianchis fundamentale Entdeckung derjenigen W-Quadrupel liefert, deren Brennflächen Biegungsflächen der allgemeinsten Fläche 2. Grades sind. Zum Schlusse stelle ich eine Transformation der partiellen Differentialgleichung und ihrer Lösungen auf, durch die ein W-Quadrupel in ein neues übergeführt wird.

1. Die zunächst herzuleitenden Formeln finden sich in der Hauptsache bei Bianchi. Die Abweichungen in der Bezeichnungsweise sind unerheblich. Der Kürze halber gebe ich durchweg von je 3 Formeln, die sich auf die Koordinatenrichtungen beziehen, nur die erste an.

Von der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = M(\alpha,\beta)$$

seien 5 Lösungen ξ, η, ζ sowie R_1 und R_2 bekannt. Unter Verwendung des Darbouxschen Symbols $\mathfrak{F}$ für die linke Seite und mit Rücksicht auf das soeben Bemerkte schreibe ich:

$$\mathfrak{F}(\xi) = \mathfrak{F}(R_1) = \mathfrak{F}(R_2). \tag{1}$$

Dann bestimmen die Lelieuvreschen Formeln

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = -\left(\eta\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial\beta} = \eta\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial\beta} \tag{2}$$

die laufenden Koordinaten x, y, z einer auf ihre Asymptotenlinien bezogenen Fläche S vom Krümmungsmaße $-\frac{1}{\varrho^2}$, wo

$$\varrho = \sum\xi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist und ξ, η, ζ den Richtungskosinus der Normalen proportional sind. Die zu R_1 und R_2 gehörigen Moutardschen Transformationen, d. h. das Formelsystem

$$\frac{\partial(\xi_1 R_1)}{\partial\alpha} = -R_1^2\frac{\partial\left(\frac{\xi}{R_1}\right)}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial(\xi_1 R_1)}{\partial\beta} = R_1^2\frac{\partial\left(\frac{\xi}{R_1}\right)}{\partial\beta} \tag{3}$$

und ein entsprechendes für den Index 2 liefern je 3 Lösungen ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 der transformierten Gleichungen

$$\mathfrak{F}(\xi_1) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_1}\right), \quad \mathfrak{F}(\xi_2) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_2}\right). \tag{4}$$

Die Koordinaten der hierdurch bestimmten Flächen S_1 und S_2 ergeben sich ohne Anwendung der Lelieuvreschen Formeln aus den endlichen Relationen

$$x_1 - x = \eta_1\zeta - \zeta_1\eta, \quad x_2 - x = \eta_2\zeta - \zeta_2\eta, \tag{5}$$

Digitized by Google

welche zeigen, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte von S und S_1, sowie von S und S_2 gemeinschaftliche Tangenten dieser Flächen sind, infolge der Korrespondenz der Asymptotenlinien also zwei *W-Systeme* bilden.

Bestimmt man nun R_1' und R_2' aus

$$(6)\quad \frac{R_1}{R_1'} = \frac{R_2}{R_2'} = \int\left[-\left(R_1\frac{\partial R_2}{\partial\alpha} - R_2\frac{\partial R_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \left(R_1\frac{\partial R_2}{\partial\beta} - R_2\frac{\partial R_1}{\partial\beta}\right)d\beta\right],$$

so wird:

$$(7)\qquad \mathfrak{F}(R_1') = \mathfrak{F}(R_2'),\quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_1'}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_1}\right),\quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_2'}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{R_2}\right).$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(8)\qquad R_1R_2' = R_2R_1' = \frac{\dfrac{\partial \lg\left(\frac{R_1}{R_1'}\right)}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial \lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\partial\alpha}} = -\frac{\dfrac{\partial \lg\left(\frac{R_1}{R_1'}\right)}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial \lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\partial\beta}} = \lambda,$$

so sind durch

$$(9)\qquad \xi' = \xi - \lambda(\xi_1 - \xi_2)$$

3 Lösungen ξ', η', ζ' der Laplaceschen Gleichung

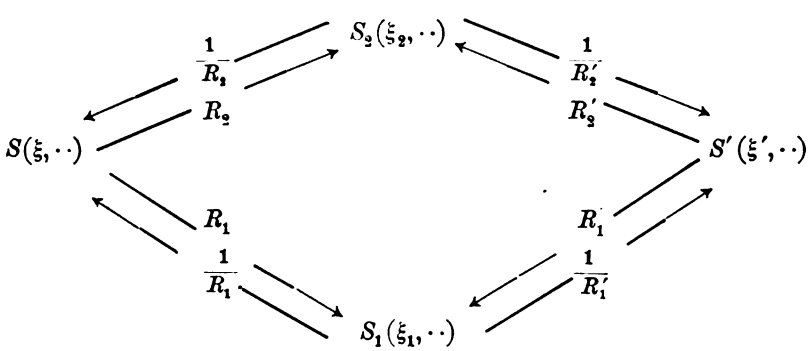
$$(10)\qquad \mathfrak{F}(\xi') = \mathfrak{F}(R_1') = \mathfrak{F}(R_2')$$

gegeben, die ihrerseits durch die zu R_1' und R_2' gehörigen Moutardschen Transformationen in jede der beiden Gleichungen (4) übergeführt wird. Für die Koordinaten der 4. Fläche S', die übrigens noch von der in (6) auftretenden Integrationskonstanten abhängt, gelten die zu (5) analogen Formeln

$$(11)\qquad x_1 - x' = \eta_1\zeta' - \zeta_1\eta',\quad x_2 - x' = \eta_2\zeta' - \zeta_2\eta',$$

aus denen die Existenz der beiden neuen W-Systeme hervorgeht.

Berücksichtigt man noch, daß, wie aus (3) zu ersehen ist, für die inversen Transformationen R_1, R_2, R_1', R_2', durch ihre reziproken Werte zu ersetzen sind, so kann man den Zyklus von Transformationen durch das folgende Schema veranschaulichen, das wohl keiner besonderen Erklärung bedarf:



(2), (3) und (6) bedingen 10 Quadraturen.

Digitized by Google

2. Als neue Parameter führe ich die Größen

$$u = \tfrac{1}{2} \lg\left(\frac{R_1}{R_2}\right), \qquad v = \tfrac{1}{2} \lg\left(\frac{R_1}{R_1'}\right) \tag{12}$$

ein, die, gleich Konstanten gesetzt, gewisse *konjugierte Kurvenscharen* auf den Brennflächenmänteln darstellen. Dann wird:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\lambda}\, e^{u+v}, \quad R_2 = \sqrt{\lambda}\, e^{-u+v}, \\ R_1' &= \sqrt{\lambda}\, e^{u-v}, \quad R_2' = \sqrt{\lambda}\, e^{-u-v}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Gleichungen (3) sowie die entsprechenden für die übrigen Moutardschen Transformationen sind auf die Variablen u und v zu bringen. Nur das erste, ξ und ξ_1 enthaltende Formelpaar möge hier Platz finden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} = \xi\left(\dfrac{\partial \lg \sqrt{\lambda}}{\partial u} + 1\right) - \lambda \xi_1 \left(\dfrac{\partial \lg \sqrt{\lambda}}{\partial v} + 1\right), \\ \lambda \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \lambda \xi \left(\dfrac{\partial \lg \sqrt{\lambda}}{\partial v} + 1\right) - \xi_1 \left(\dfrac{\partial \lg \sqrt{\lambda}}{\partial u} + 1\right). \end{cases} \tag{14}$$

Wir denken uns nun korrespondierende Punkte von S und S' einerseits, von S_1 und S_2 andererseits durch gerade Linien verbunden. Die Minimalabstände dieser Geradenpaare mögen die *Träger des W-Quadrupels* heißen. Sie bilden eine neue Linienkongruenz $\mathfrak{T}$. Die Größen Ξ, H, Z, definiert durch

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\xi - \xi') = \sqrt{\lambda}(\xi_1 - \xi_2), \tag{15}$$

sind proportional den Richtungskosinus der Strahlen von $\mathfrak{T}$.

Bildet man mit Hilfe der Formeln (14) und der analogen Systeme $\frac{\partial \Xi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Xi}{\partial v}$, so erhält man für ξ, ξ', ξ_1, ξ_2 die folgende Darstellung:

$$\begin{cases} \xi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\dfrac{\partial \Xi}{\partial v} + \Xi\right), \qquad \xi' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\dfrac{\partial \Xi}{\partial v} - \Xi\right), \\ \xi_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(-\dfrac{\partial \Xi}{\partial u} + \Xi\right), \qquad \xi_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(-\dfrac{\partial \Xi}{\partial u} - \Xi\right). \end{cases} \tag{16}$$

Ersetzt man in denselben Formeln $\xi, \ldots$ durch die Ausdrücke (16), so führen sie zur einen Hälfte auf Identitäten, zur anderen auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \Xi}{\partial u^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Xi}{\partial v^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\Xi. \tag{17}$$

Die Gleichungen (2) gehen in die folgenden über:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2} - H\right)\left(\dfrac{\partial Z}{\partial v} + Z\right) - \left(\dfrac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - Z\right)\left(\dfrac{\partial H}{\partial v} + H\right)\right], \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial Z}{\partial v} + Z\right) - \left(\dfrac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial Z}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial H}{\partial v} + H\right)\right]. \end{cases} \tag{18}$$

Digitized by Google

Wir haben damit das *Theorem* erhalten:

Sind Ξ, H, Z *Lösungen von* (17), *oder (ohne Benutzung von* λ*) ist:*

$$\frac{\frac{\partial^2\Xi}{\partial u^2}-\Xi}{\frac{\partial^2\Xi}{\partial v^2}-\Xi}=\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}-H}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}-H}=\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}-Z}{\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}-Z},$$

so werden aus (18) *mit Hilfe von 3 Quadraturen die Koordinaten einer auf ein besonderes konjugiertes System bezogenen Fläche (S) gewonnen, die als einer der vier Brennflächenmäntel einem W-Quadrupel angehört. Die endlichen Relationen* (5) *und* (11) *liefern unter Berücksichtigung von* (16) *die übrigen Brennflächen. Die gemeinsame Differentialgleichung der Asymptotenlinien lautet:*

$$\lambda^2 du - dv^2 = 0.$$

3. X, Y, Z seien die Richtungskosinus der Strahlen von $\mathfrak{T}$. Ich setze

$$\Xi = \sqrt{T}X, \tag{19}$$

wobei also

$$T = \Sigma\Xi^2$$

ist. Es sei ferner

$$\Sigma dX^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

das Linienelementquadrat der sphärischen Abbildung von $\mathfrak{T}$. Geht man mit (19) in die partielle Differentialgleichung (17) hinein, drückt dann unter Verwendung der für e, f, g gebildeten Christoffelschen Symbole die zweiten Ableitungen von X durch die ersten und X selber aus, so zerfällt (17) in die drei folgenden Relationen:

$$\frac{\partial \lg T}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \lambda^2\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}, \quad \frac{\partial \lg T}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}, \tag{20}$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\sqrt{T}}{\partial u^2} - \lambda\frac{\partial^2\sqrt{T}}{\partial v^2} = \left[\frac{e+1}{\lambda} - (g+1)\lambda\right]\sqrt{T}, \tag{21}$$

zu denen noch die Gaußsche Differentialgleichung für die Fundamentalgrößen e, f, g hinzukommt.

4. Sollen die Brennflächenmäntel das Krümmungsmaß -1 besitzen, so findet man mittels der aus (16) hervorgehenden Formeln

$$\varrho = \Sigma\xi^2 = \frac{\lambda T}{4}\left[g + \left(\frac{\partial \lg\sqrt{T}}{\partial v} + 1\right)^2\right] \text{ usw.}$$

zunächst:

$$T = \text{konst.}, \quad (e+1)(g+1) = \frac{16}{T^2}, \quad \lambda^2 = \frac{e+1}{g+1}.$$

(21) ist dann bereits erfüllt, während (20) auf

$$f = \text{konst.}$$

führt. Die Ermittlung *der W-Quadrupel mit pseudosphärischen Brennflächen,* wie sie Bianchi durch Komposition Bäcklundscher Transformationen erhält,

Digitized by Google

läßt sich demnach auf die Aufgabe zurückführen, *diejenigen Koordinatensysteme auf der Kugel aufzusuchen, für die* $(e+1)(g+1)$ *und* f *Konstanten werden.* Dadurch gelingt es, die Bianchischen Formelsysteme durch eine *einzige* partielle Differentialgleichung zu ersetzen. Definiert man die Konstanten μ_1 und μ_2 durch

$$\Sigma\xi\xi_1 = \Sigma\xi'\xi_2 = \frac{T}{4}(1-f) = \sin\mu_1,$$

$$\Sigma\xi\xi_2 = \Sigma\xi'\xi_1 = \frac{T}{4}(-1-f) = \sin\mu_2,$$

so wird:

$$e = \frac{\lambda}{\cos\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\sin\frac{\mu_1-\mu_2}{2}} - 1, \quad g = \frac{1}{\lambda\cos\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\sin\frac{\mu_1-\mu_2}{2}} - 1,$$

$$f = -\operatorname{tg}\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\mu_1-\mu_2}{2}.$$

Setzt man

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\cos\mu_1\cos\mu_2}}{\cos\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}, \quad \varkappa' = \frac{\sin\frac{\mu_1-\mu_2}{2}}{\cos\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\operatorname{dn}\psi}{\sqrt{\varkappa'}},$$

so gewinnt man die Gaußsche Differentialgleichung, von der allein das Problem noch abhängt, in der folgenden Gestalt[1]):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varkappa'}{\operatorname{dn}^2\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{dn}^2\psi}{\varkappa'}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) = -\frac{\varkappa^2\operatorname{sn}\psi\operatorname{cn}\psi}{\varkappa'\operatorname{dn}\psi}. \tag{22}$$

---

1) Ohne nähere Ausführungen bemerke ich, daß (22) auch durch eine einzige Differentialgleichung in bezug auf die Parameter α und β ersetzt werden kann:

$$\frac{\operatorname{dn}\psi}{\operatorname{sn}\psi\operatorname{cn}\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = \sqrt{\left[1-\varkappa^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2\right]\left[1-\varkappa^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2\right]}.$$

Wird:

$$\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \cos(\varphi+\varphi_1), \quad \varkappa\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \cos(\varphi-\varphi_1), \quad \operatorname{sn}\psi = \cos t, \quad \frac{\operatorname{cn}\psi}{\operatorname{dn}\psi} = \cos t_1$$

gesetzt, so sind

$$\theta = \varphi - t, \quad \theta' = \varphi + t, \quad \theta_1 = \varphi_1 - t_1, \quad \theta_2 = \varphi_1 + t_1$$

die zu den vier pseudosphärischen Flächen gehörigen Integrale von:

$$\frac{\partial^2 2\theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \sin 2\theta.$$

Hingewiesen sei auf die Tatsache, daß die Spezialisierung $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$ (22) nicht ändert, während

$$e = \frac{\lambda}{\varkappa'} - 1, \quad g = \frac{1}{\varkappa'\lambda} - 1, \quad f = 0$$

wird. Dem Zusammenhang, der für einen bestimmten Wert von $\varkappa$ zwischen dieser Form des Linienelements der Kugel und der oben gegebenen allgemeineren besteht, entspricht ein Zusammenhang der pseudosphärischen Brennflächen durch simultane Liesche Transformationen.

Digitized by Google

5. Wir kehren zur partiellen Differentialgleichung (17) der allgemeinen W-Quadrupel zurück. Ist Ω ein neues Integral derselben, so befriedigen, wie aus (16) zu ersehen ist,

$$\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \Omega\right), \qquad \omega' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} - \Omega\right),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \Omega\right), \qquad \omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \Omega\right)$$

die Laplaceschen Gleichungen der vier Brennflächen. Diese gehen durch Anwendung der zugehörigen Moutardschen Transformationen in die *Brennflächen* $\bar{S}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}'$, $\bar{S}_2$ *eines neuen W-Quadrupels* über. Ich teile die wichtigsten der sich dabei ergebenden Formeln mit.

Es sei gesetzt:

$$(23)\quad \begin{cases} e^{2\bar{u}} = e^{2u}\dfrac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} - \Omega}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial u} + \Omega}, \quad e^{2\bar{v}} = e^{2v}\dfrac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} - \Omega}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} + \Omega}, \quad \bar{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2 - \Omega^2}{\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2 - \Omega^2}. \\ \bar{\Omega} = \dfrac{\Omega}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2 - \Omega^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2 - \Omega^2\right]}}. \end{cases}$$

Dann wird:

$$(24)\qquad \frac{\partial \lg\bar{\Omega}}{\partial\bar{u}} = -\frac{\partial\lg\Omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial\lg\Omega}{\partial\bar{v}} = -\frac{\partial\lg\Omega}{\partial v},$$

und zu Ξ, H, Z erhält man durch die Formeln

$$(25)\quad \frac{\partial\left(\frac{\bar{\Xi}}{\bar{\Omega}}\right)}{\partial\bar{u}} = -\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2 - \Omega^2\right]\frac{\partial\left(\frac{\Xi}{\Omega}\right)}{\partial v}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\Xi}{\Omega}\right)}{\partial\bar{v}} = -\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2 - \Omega^2\right]\frac{\partial\left(\frac{\Xi}{\Omega}\right)}{\partial u}$$

drei Lösungen $\bar{\Xi}$, $\bar{H}$, $\bar{Z}$ der transformierten Gleichung

$$(26)\qquad \frac{1}{\bar{\lambda}}\frac{\partial^2\bar{\Xi}}{\partial\bar{u}^2} - \bar{\lambda}\frac{\partial^2\bar{\Xi}}{\partial\bar{v}^2} = \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \bar{\lambda}\right)\bar{\Xi},$$

der auch $\bar{\Omega}$ genügt. (25) kann auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$= -\frac{\Xi}{\Omega}\left(\Omega\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\Omega}{\partial u}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) + \int\left\{\left[\Xi\frac{\partial(\lambda\Omega_1)}{\partial v} - \lambda\Omega_1\frac{\partial\Xi}{\partial v}\right]du + \left[\Xi\frac{\partial\left(\frac{\Omega_1}{\lambda}\right)}{\partial u} - \frac{\Omega_1}{\lambda}\frac{\partial\Xi}{\partial u}\right]dv\right\},$$

wobei:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2} - \Omega\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2} - \Omega\right)$$

ist. Verifiziert man die Integrabilitätsbedingung, so bemerkt man, das Ω_1 die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\Omega_1}{\lambda}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2}(\lambda\Omega_1) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\Omega_1$$

erfüllt.

Digitized by Google

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Formeln (23)—(25) die Vertauschung der überstrichenen und nicht überstrichenen Größen zulassen, daß also die inverse Transformation, durch die aus einem Integral von (26) ein solches von (17) gewonnen wird, von der Lösung $\overline{\Omega}$ der Gleichung (26) abhängt. Ferner erkennt man, daß durch die 8 Flächen 12 W-Systeme bestimmt sind, die nicht 2, sondern insgesamt 6 W-Quadrupel bilden.

Übrigens weisen auf die Existenz der hier entwickelten Transformation der W-Quadrupel bereits die Ergebnisse Bianchis[1]) über *bewegliche Möbiussche Konfigurationen* hin.

Schließlich sei noch erwähnt, daß $\frac{\Xi}{\Omega}, \ldots$ und $\frac{\overline{\Xi}}{\overline{\Omega}}, \ldots$ als Koordinaten der Punkte zweier Flächen gedeutet werden können, welche *die sphärischen Bilder der konjugierten Kurvenscharen* $\alpha = konst.$ *und* $\beta = konst.$ miteinander gemein haben.

Beweis des Pohlkeschen Satzes.

Von M. Koppe.

Gehen vom Nullpunkt der komplexen Ebene I drei Strecken $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ aus, welche mit der Strecke der positiven Zahlen die Winkel α, β, γ bilden, so *können* diese die senkrechten Projektionen der Einheitsstrecken OX, OY, OZ eines im Raume schwebenden rechtwinkligen Koordinatensystems sein. Die Bedingung dafür ist nach Gauß, daß

$$(ae^{i\alpha})^2 + (be^{i\beta})^2 + (ce^{i\gamma})^2 = 0$$

ist. Ist diese Gleichung *nicht* erfüllt, so bilden nach Pohlke die beliebigen Strecken OA, OB, OC immer noch die *schiefe* Parallelprojektion eines solchen Koordinatensystems.

Zum *Beweise* dieses Satzes konstruiere man die Quadratwurzel aus der Summe der drei Quadrate als komplexe Zahl $de^{i\delta}$, so daß

$$(ae^{i\alpha})^2 + (be^{i\beta})^2 + (ce^{i\gamma})^2 = (de^{i\delta})^2.$$

Dreht man jetzt die Achse der positiven Zahlen in der Ebene I um den Winkel δ, so erhält man für A, B, C die transformierten Werte

$$p_1 + q_1 i = ae^{(\alpha-\delta)i}, \quad p_2 + q_2 i = be^{(\beta-\delta)i}, \quad p_3 + q_3 i = ce^{(\gamma-\delta)i},$$

und es ist

$$(p_1 + q_1 i)^2 + (p_2 + q_2 i)^2 + (p_3 + q_3 i)^2 = d^2,$$

folglich, da d^2 reell und positiv ist,

---

1) Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie. Rend. del. Circ. mat. di Palermo, Bd. 25 (1908). Vgl. auch Lezioni III, § 67 u. 67*.

Digitized by Google

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0, \tag{1}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{2}$$

Legt man durch die imaginäre Achse eine neue komplexe Ebene II, die mit der alten den Winkel ε bildet, und projiziert auf diese rechtwinklig die Punkte A, B, C nach A', B', C', so bleiben die imaginären Koordinaten unverändert, die reellen werden im Verhältnis $1 : \cos\varepsilon$ reduziert. Für die neuen Punkte A', B', C' hat man in der Ebene II die komplexen Zahlen

$$p_1 \cos\varepsilon + q_1 i, \quad p_2 \cos\varepsilon + q_2 i, \quad p_3 \cos\varepsilon + q_3 i.$$

Die Summe ihrer Quadrate wird:

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\cos\varepsilon^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + 2(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)\cos\varepsilon \cdot i.$$

Der imaginäre Teil ist nach (1) $= 0$, der reelle wird gleichfalls $= 0$, wenn

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

woraus nach (2) für ε ein reeller Wert folgt.

Es ist daher nach dem Gaußschen Satz ein rechtwinkliges Koordinatensystem $OXYZ$ vorhanden, dessen Einheitsstrecken sich auf die Ebene II senkrecht nach OA', OB', OC' projizieren. Die Projektionsstrahlen treffen aber die Ebene I unter schiefem Winkel in den Punkten O, A, B, C.

Hiermit ist der Satz von Pohlke bewiesen, zugleich eine einfache und genaue Konstruktion des gesuchten Achsensystems dargelegt, die auch durch Rechnung ersetzt werden kann.

Liegen O, A, B, C fast in einer Geraden, so steht die Ebene I fast senkrecht auf II, die drei Einheitsstrecken werden sehr klein im Vergleich zu den Strecken a, b, c, die Projektionsstrahlen treffen die Ebene II fast streifend.

Digitized by Google

Glückwunschadresse zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner

am 3. März 1911.

Eng sind die Beziehungen, die die Firma B. G. Teubner mit der Berliner Mathematischen Gesellschaft verknüpfen. Vom Jahre 1901 an, als die Gesellschaft durch die Herren Jahnke und Kneser ins Leben gerufen wurde, hat die Firma B. G. Teubner ihr stets ein tatkräftiges Interesse entgegengebracht. Unvergessen wird es bleiben, wie der Verlag der jungen Gesellschaft, mit weitem Blick ihren Aufschwung vorausschauend, in den ersten Jahren ihres Bestehens über mancherlei Schwierigkeiten hinweggeholfen hat.

Ganz besonders gedenkt die Berliner Mathematische Gesellschaft der Verdienste des Vertreters der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung des Verlags, ihres hochverehrten Mitgliedes Herrn Hofrat Dr. Ackermann. Ihr stets bereites Eingehen auf die Wünsche der Gesellschaft und ihrer einzelnen Mitglieder, hochverehrter Herr Hofrat, hat wesentlich dazu beigetragen, daß sich die Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft während der zehn Jahre ihres Bestehens zu einem angesehenen Organ der mathematischen Welt entwickelt haben.

Die Berliner Mathematische Gesellschaft ergreift daher mit Freuden die Gelegenheit, am heutigen Jubeltage der Firma B. G. Teubner ihre herzlichen Glückwünsche darzubringen und der zuversichtlichen Hoffnung Ausdruck zu geben, daß sich die beiderseitigen Beziehungen immer inniger gestalten mögen!

Die Berliner Mathematische Gesellschaft.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

91. Sitzung am 28. Juni 1911.

Vorsitzender: Herr Güntsche.

Anwesend: 66 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rüdenberg: Selbsterregte elektrische Schwingungen, besonders von Dynamomaschinen.

Herr Rogowski: Theorie der elektromagnetischen Schienenbremse.

Herr Wagner: Der Stromverlauf in Kabeln mit Rücksicht auf die Schaltung der Enden und die Sturm-Liouvilleschen Randwertprobleme mit verallgemeinerten Grenzbedingungen.

Beschlußfassung über die Feier des zehnjährigen Bestehens der Gesellschaft: Die Gesellschaft beschließt, ihr zehnjähriges Bestehen am 14. Oktober durch eine Festsitzung zu feiern, in der Herr Geheimer Bergrat Papperitz einen Vortrag über Projektionstechnik halten wird. Der Sitzung soll sich ein Festessen (mit Damen) im Russischen Hof anschließen.

Digitized by Google

Die Infinitesimalrechnung auf der Schule.

Vortrag,

gehalten in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 27. Mai 1911.

Von H. E. Timerding.

Hochgeehrte Herren!

Es hat immer etwas Bedenkliches, wenn ein Hochschullehrer sich einen Gegenstand des Schulunterrichtes zum Thema wählt. Das ist ähnlich als wenn der Berliner über die Aufgaben der Landwirtschaft philosophiert und den Landwirten klar und unwiderleglich nachweist, wie verkehrt und unökonomisch sie wirtschaften. Man wird nicht viel von einem solchen Nachweis halten, und die Landwirte werden wenig Neigung zeigen, sich die empfangene Belehrung zunutze zu machen. Es fehlt eben, um den Worten Gewicht zu geben, die mit saurem Schweiß erarbeitete Erfahrung einer jahrelangen Praxis, ohne die man zu einem Urteil über das, was erreicht werden kann und was erreicht werden soll, nicht befähigt und nicht berechtigt ist.

Viele von Ihnen, meine Herren, werden daher mit einigem Kopfschütteln die Ankündigung dieses Vortrages gelesen haben und nicht mit allzu großem Vertrauen hierher gekommen sein. In einer Beziehung wird es mir aber sicher gelingen, Sie angenehm zu enttäuschen. Ich will nicht die negative Tätigkeit der Kritik ausüben. Das wenige, was ich an Erfahrung gesammelt habe, hat mich doch das eine gelehrt, wie ungeheuer vorsichtig man mit wissenschaftlichen Forderungen pädagogischen Aufgaben gegenüber sein muß. Jedes Individuum verträgt nur ein bestimmtes wissenschaftliches Niveau. Wie die Fische des Meeres darauf eingerichtet sind, in einer bestimmten Wassertiefe zu leben, und sterben, wenn man sie in die Höhe zieht, so versagt auch jeder Mensch, wenn man versucht, ihn künstlich auf ein höheres Niveau der Auffassung und Erkenntnis hinaufzuziehen, als seiner Bildungsstufe und Bildungsart entspricht. Alles, was man daher im Unterricht fordern kann, ist nur, daß er nichts direkt Falsches lehrt; aber überall die volle logische Strenge und die volle Berücksichtigung aller begleitenden Umstände, aller möglichen Ausnahmen, aller notwendigen Einschränkungen verlangen zu wollen, ist unmöglich und unbillig.

Darum will ich mich von solchen Forderungen fernhalten. Ich will nicht mit dem Messer der Kritik in den Leib des Unterrichtes hineinschneiden. Ich will kein Schlächterhandwerk treiben. Meine Absicht ist eine friedlichere und freundlichere. Ich will eher auszugleichen und zu vermitteln suchen als schroff aburteilen, und wenn ich auch nicht wie das Mädchen aus der Fremde jedem eine Gabe, dem Blumen, jenem Früchte, darzureichen vermag, vielleicht ist es doch ein kleines Scherflein, das ich zu einer großen und schwierigen Aufgabe beisteuern kann.

Das Problem, über das ich sprechen will, die Behandlung der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen, steht recht eigentlich im Mittelpunkt der Bestrebungen, welche die Reform des mathematischen Schulunterrichtes zum Ziel haben, und hat es von Anfang an getan. Schon Seeger hatte es vor

Digitized by Google

fast einem halben Jahrhundert bei seiner reformierenden Tätigkeit in Güstrow hauptsächlich im Auge, und es ist seither beinahe ein Losungswort der Reformpartei geblieben. Indessen hat sich die Sachlage heute bedeutend verschoben, wesentlich durch das Emporkommen der Oberrealschulen. Wenn vor einigen Jahren die Frage noch lautete: Soll an den höheren Schulen Infinitesimalrechnung getrieben werden? so lautet sie heute eher: wie soll an den höheren Schulen Infinitesimalrechnung getrieben werden? Von der befriedigenden Beantwortung dieser Frage für die Schulen, die bereits die Infinitesimalrechnung in ihren Lehrplan aufgenommen haben, hängt meines Erachtens auch zum großen Teil ihre Einführung an den übrigen Schulen ab, die sich bis jetzt noch ablehnend gegen sie verhalten. Denn was der Einführung der Infinitesimalrechnung entgegengestanden hat, ist wesentlich die Befürchtung, daß sie für die Schule zu schwer ist, daß sie den mathematischen Unterricht ungebührlich belasten und dennoch unverstanden bleiben würde. Die Universität nimmt für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung zwei Semester und die volle Aufmerksamkeit von den Studierenden in Anspruch, die die Mathematik zum Lebensberuf gewählt haben oder ihrer wenigstens zur Begründung ihres Fachwissens bedürfen, von denen man also eine gewisse Begabung dafür erwarten und verlangen kann, und derselbe Gegenstand soll auf der Schule nebenbei, in wenig Stunden, mit zum Teil ganz unmathematischen Köpfen behandelt werden! Dabei kann doch, sagt man sich, nichts Gescheites herauskommen! Entweder vermögen nur ein paar begabte Schüler zu folgen, oder es wird eine Karikatur von Infinitesimalrechnung, was dabei entsteht, unvernünftiges oder unnützes Zeug, das mit der wirklichen Infinitesimalrechnung nur die Symbolik gemein hat.

Die pädagogische Erfahrung scheint aber diese schweren Bedenken doch beseitigt oder wenigstens gemildert zu haben. Am entscheidendsten ist für mich die Tatsache, daß die Infinitesimalbegriffe im Grunde, seit der mathematische Unterricht an den höheren Schulen aufgenommen ist, tatsächlich niemals vermieden worden sind, daß sie nur in anderer Benennung und Bezeichnung aufgetreten sind. In der Zeit, als die eingestandene Infinitesimalrechnung an den Schulen verboten war, hat Schellbach ein kunstreiches System ausgebildet, um ohne Differentiations- und Integrationssymbole in ausgedehntem Maße mit den Infinitesimalbegriffen zu operieren. Man braucht ja auch nur darüber nachzudenken, daß schon das Volumen der Pyramide sich nicht ohne Infinitesimalbetrachtungen berechnen läßt, mögen sie sich auch in der Form des Cavalierischen Prinzips verhüllen, um einzusehen, daß sich ernstlich garnicht daran denken läßt, die Infinitesimalbegriffe völlig zu vermeiden.

Die Notwendigkeit, sie hereinzuziehen, wird noch viel dringender durch die Bedürfnisse des physikalischen Unterrichtes. Wenn in diesem Unterricht überhaupt etwas an Mathematik benutzt werden soll, so braucht man Überlegungen, die wesentlich auf Infinitesimalbetrachtungen hinauslaufen.

Dadurch wird das an sich gewiß erstrebenswerte Ideal endgültig zerstört, die Schulmathematik in methodischer Reinheit, abgetrennt von den der Hochschule und dem Fachstudium vorbehaltenen Gebieten, auf der euklidischen Basis auszubilden. Die Frage bleibt nur noch: bedeutet die Verwendung der Leibnizschen Bezeichnungen eine erhebliche Erschwerung, so daß sie besser vermieden wird? Diese Frage glaube ich entschieden verneinen zu müssen. Die Leibnizschen Bezeichnungen haben Klarheit und Einfachheit in ein vorher unheimlich verworrenes Gebiet gebracht, und in den Wirrwarr zurückzutauchen,

Digitized by Google

statt die definitive Klärung der äußeren Darstellung sich zunutze zu machen, halte ich für verkehrt und unberechtigt. Haben wir den Begriff, brauchen wir auch nicht davor zurückzuschrecken, ihn zweckmäßig und unzweideutig in der allgemein üblichen Weise zu bezeichnen.

Wir brauchen uns gewiß nicht vor dem Integralzeichen zu fürchten, wenn wir mit dem Integralbegriff fertig werden. In dem letzteren freilich liegt eine wirkliche und nicht zu unterschätzende Schwierigkeit. Wir werden ihn nicht los, wenn er uns auch nur als Kreisumfang und Kreisinhalt entgegentritt. Wie aber wollen wir ihn dem Schüler begreiflich machen, ohne der wissenschaftlichen Strenge und wissenschaftlichen Würde etwas zu vergeben?

Daß dies immer wirklich in befriedigender Weise geschieht, hat mir die Durchsicht der zur ersten Einführung in die Infinitesimalrechnung bestimmten Lehrbücher nicht zu zeigen vermocht. Eines z. B. enthält in fettestem Drucke den Satz: „Ein Integral ist eine Summe von unendlich vielen Gliedern, deren jedes unendlich klein ist.“ Ein anderes erklärt den Differentialquotienten auf folgende Weise: „Sieht man unter dem Mikroskop am Ende eines Maßstabes mehrere Staubkörner, so bemerkt man, daß sie verschiedene Größe haben, daß das eine vielleicht zweimal so groß ist wie das andere. Das Verhältnis zweier sehr kleiner Größen ist also eine reelle Zahl, hier z. B. zwei. Nehmen wir jetzt schärfere Mikroskope, und betrachten wir mit ihnen immer kleinere Teilchen, so nähern wir uns den unendlich kleinen Größen immer mehr. Man kann also mit beliebiger Genauigkeit beweisen, daß das Verhältnis zweier unendlich kleinen Größen eine endliche Zahl ist.“

Ähnlich ist eine andere Erklärung, bei der gesagt wird, jede abnehmende Größe müsse, ehe sie verschwindet, alle Stufen des unendlich Kleinen durchlaufen, und darauf der Differentialquotient dy/dx gegründet wird, in dem dx eine konstante, dy eine variable unendlich kleine Größe bedeuten soll.

In einem sehr verbreiteten Lehrbuch wird die Definition des unendlich Kleinen zur bloßen Tautologie, indem gesagt wird, eine Größe werde unendlich klein, wenn sie der Null unendlich nahe kommt.

Wenn wir mit dem kritischen Geiste der modernen arithmetischen Schulung durchtränkt sind, so sind wir zunächst nicht geneigt, besonders milde und günstig über solche Versuche zu denken. Aber sehen wir uns an, in welcher Form der Entdecker der Differential- und Integralrechnung, Leibniz selbst, seine neue Wissenschaft zuerst veröffentlicht hat, und erkennen wir dabei, daß sie mit den oben angeführten Stellen eine auffallende Verwandtschaft zeigt, so werden wir vielleicht nachsichtiger, auf jeden Fall aber nachdenklicher gestimmt, und dies noch mehr, wenn wir bemerken, daß in jüngster Zeit Kowalewski, der durch mehrere Lehrbücher vielleicht am energischsten für die Exaktheit und Gewissenhaftigkeit auch bei der ersten Einführung in die Infinitesimalrechnung eingetreten ist, gleichzeitig in Ostwalds Klassikern die entscheidenden Schriften von Leibniz in deutscher Sprache neu herausgegeben und dadurch allgemein zugänglich gemacht hat.

Es ist bei aller kritischen Sichtung scharf zu scheiden zwischen dem, was Sache der Auffassung ist, und dem, was einen Fehler oder eine Lücke in der logischen Begründung bedeutet. Das ist nicht so leicht und einfach, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte. In den mathematischen Begriffen stecken unter Umständen metaphysische Lehrmeinungen, denen wir vielleicht nicht zustimmen können, die wir aber auch nicht kurzer Hand als falsch zu-

Digitized by Google

rückweisen können. Von dieser Art ist der Begriff des aktual Unendlichkleinen, der an alte scholastische Ideengänge anknüpft und im Mittelalter viel umstritten wurde. Er gewann dann eine neue Bedeutung im 17. Jahrhundert und erschien da im Lichte einer neuen Wissenschaft, bis die Aufklärung des 18. Jahrhunderts gegen ihn zu Feld zog; seine endgültige Aufhellung ist aber erst durch die moderne Mengenlehre erfolgt. Es können neben metaphysischen auch empirische Elemente in den mathematischen Entwicklungen stecken, und obschon die moderne kritische Arbeit darauf aus ist, diese empirischen Elemente klar zu bestimmen und auf ein Mindestmaß zurückzuführen, so dürfen wir doch nicht die empirische Begründungsweise, wo sie aus pädagogischen Gründen zur Vereinfachung und Verdeutlichung der Darstellung benutzt wird, einfach als verkehrt hinstellen.

Wie können wir hier völlig gerecht und unparteiisch sein? Es geht nur auf die eine Weise, daß wir von Anfang an unbefangen betrachten, wie die einzelnen Ideen aufgekommen sind, wie sie aufgefaßt und umgewandelt wurden, wie Meinung gegen Meinung gestanden hat. So allein können wir uns von aller persönlichen Überzeugung frei machen, so allein können wir auch die uns fern stehende Denkweise wenigstens in einer gewissen relativen Bedeutung erfassen und verstehen. Auf diesem Wege werden wir beinahe von selbst dazu geführt, die historische Betrachtung als die einzig mögliche Grundlage einer unbefangenen und unparteiischen Untersuchung über die Methoden der Infinitesimalrechnung zu wählen.

Uns interessiert diese Betrachtung allerdings nur insofern, als sie mit dem Unterricht an den höheren Schulen in Zusammenhang steht. Dieser führt aber nicht bloß vom methodischen, sondern auch vom sachlichen Gesichtspunkte auf die Methoden früherer Zeiten, denn es ist ja klar, daß mit der fortschreitenden Entwickelung der Mathematik der Inhalt der wissenschaftlichen Forschung immer mehr an Schwierigkeit zunimmt und über den Rahmen dessen, was sich auf der Schule behandeln läßt, weit hinauswächst. Dagegen werden die Dinge, die in früherer Zeit die Forscher beschäftigt haben, für die Schule von Wichtigkeit bleiben, weil sie elementarer und einfacher sind und damit die Grenzen des Erreichbaren nicht übersteigen. So ist es auch bei der Infinitesimalrechnung. Die Aufgaben, die sie sich zuerst stellte, sind gegenüber den späteren viel leichter zugänglich und gleichzeitig so wichtig, daß sie zunächst behandelt werden müssen. Außerdem aber hat man auch, um den schwierigen prinzipiellen Untersuchungen der neueren Zeit zu entgehen, die den Differentialquotienten und das Integral erst nach langer mühevoller Vorbereitung einzuführen gestatten, immer wieder zu den älteren Verfahren gegriffen, die darin viel unbekümmerter sind und einen viel leichteren Zugang zu der Infinitesimalrechnung eröffnen.

Es ist allerdings die schwerwiegende Frage, inwiefern die Richtigkeit und Zuverlässigkeit der Begründung hierunter leidet. Denn wir können heute die Auffassungen älterer Mathematiker — ich will nur an Euler erinnern — nicht anders hinnehmen wie als subjektive Ansichten, die mit einem noch nicht völlig geklärten Sachverhalt sich auf irgend eine Art abzufinden suchten.

Diese Bedenken werden allerdings etwas gemildert durch die Tatsache, daß bei ihrer ersten Entwickelung die Methoden der Infinitesimalrechnung in engem Zusammenhange mit den Problemen der Physik stehen.

Es bleibt ihnen daher, auch wenn die theoretische Begründung nicht ganz

Digitized by Google

zuverlässig ist, doch der sichere Boden der äußeren Erfahrung, auf den sie sich stützen können. Wir müssen ja auch in anderen Zweigen der Mathematik beim Schulunterricht auf eine völlig strenge theoretische Begründung verzichten.

So scheint es mir z. B. unmöglich, im geometrischen Unterricht von Anfang an das volle Verständnis für die logische Eigenart des geometrischen Lehrgebäudes eröffnen zu wollen. Von den axiomatischen Untersuchungen kann man höchstens in den oberen Klassen einen ungefähren Begriff, aber kaum eine vollständige Darstellung geben. Bei der ersten Einführung ist man jedenfalls gezwungen, der logischen Vollständigkeit manches abzubrechen. Zunächst müssen überhaupt erst die Begriffe klargestellt werden, ehe man an ihre logische Verbindung unter einander gehen kann, und dies kann nur geschehen durch ihre Anknüpfung an ihre erfahrungsgemäße Wirklichkeit.

In gleicher Weise, ja noch viel mehr wird man auch in der Infinitesimalrechnung nicht von Anfang an die volle methodische Strenge und Vollständigkeit erreichen und erstreben können. Wir werden nach einem möglichst einfachen und anschaulichen, d. h. mit der Wirklichkeit in möglichst enger Fühlung stehenden Verfahren suchen müssen, um den Schülern die Grundbegriffe klarzulegen.

Hier sehen wir nun wieder vor uns, was wir häufig beobachten können, daß die Art, wie die geschichtliche Entwicklung einer Wissenschaft verlaufen ist, auch den Weg zeigt, der am leichtesten das Verständnis für sie eröffnet. Wenn die Forschung selbst dazu drängt, einen definitiven Standpunkt zu erreichen und dann dauernd festzuhalten, so führt die Pädagogik immer wieder dazu, auch die früheren Auffassungen hervorzukehren, nicht um bei ihnen stehen zu bleiben, sondern um durch sie hindurch den Weg zu dem modernen Standpunkt zu finden und diesen dann auch in seiner ganzen Bedeutung, vielleicht allerdings nur als eine augenblicklich herrschende Lehrmeinung neben anderen möglichen Anschauungen zu erfassen. Wer auf der Höhe eines Berges weilt, der mag ruhig droben bleiben, sich des Lichtes freuen und auf die Menschen im Nebel des Tales verachtungsvoll herunterblicken. Wer aber andere Menschen auf den Berg hinaufführen soll, für den ist es nicht genug, wenn er sich oben hinstellt und ruft: kommt auch herauf, hier ist es schön! sondern er muß selbst den anderen von unten an den Weg zeigen und sie an der Hand hinaufgeleiten. Deshalb ist der Standpunkt des Lehrers ein wesentlich anderer als der des Gelehrten, und wir müssen sehr vorsichtig sein, wenn wir an seine Tätigkeit mit den Forderungen der modernen wissenschaftlichen Kritik herantreten, und etwa gar ein Verfahren, das er im Unterrichte einschlägt, als ein wissenschaftliches Bekenntnis ansehen.

Die Infinitesimalrechnung birgt allerdings eine ganz besondere Gefahr in sich, die ich, wenn ich sie einmal ganz drastisch bezeichnen darf, die Verführung zum Spiritismus nennen möchte. Das mag zunächst recht abenteuerlich klingen, aber ich hoffe doch, im weiteren Verlauf dieser kurzen Darlegung zeigen zu können, daß auch in der Mathematik unter Umständen ein gutes Stück Geisterglauben stecken kann.

Von vornherein scheint ja gewiß die Mathematik die Wissenschaft zu sein, die sich von allen religiösen und philosophischen Bekenntnissen am unabhängigsten hält. Zwei mal zwei ist vier, ob man Heide oder Christ, Materialist oder Idealist ist. Aber wenn man näher zusieht, liegt die Sache doch wesentlich anders. Es ist ja auch klar, daß, wenn die Mathematik sich wirklich im

Digitized by Google

Zusammenhange mit dem ganzen Kulturleben auffassen läßt, sie dann nicht unabhängig sein kann von den Überzeugungen, in denen sich sozusagen der ganze kulturelle Gehalt einer Zeit niederschlägt.

Dies zeigt sich schon ziemlich deutlich, wenn wir fragen, woher denn die Infinitesimalrechnung überhaupt stammt. Sie ist in ihren Quellen eine Tochter der Renaissance und aus dem Studium der alten griechischen Mathematiker erwachsen. Wir können aber klar erkennen, daß es gerade der Widerspruch gegen die Autorität des Aristoteles und gegen die scholastische Tradition war, der bei der Auffindung der Infinitesimalrechnung in ihrer ursprünglichsten Gestalt den Weg gewiesen hat.

Wenn wir sagen Infinitesimalrechnung, so ist das eigentlich nicht richtig, denn es handelte sich zunächst durchaus nicht um eine arithmetische, sondern ganz und gar um eine geometrische Disziplin, die gleichzeitig in engem Zusammenhange mit der physikalischen Betrachtung stand. Die reinliche Scheidung des Mathematischen und Physikalischen hat sich überhaupt erst langsam und allmählich vollzogen, bei Descartes z. B. ist sie noch nicht vorhanden. Die ursprünglichste Form der Infinitesimalbegriffe ist bekanntlich die der *Indivisibeln*. Diese Lehre war keineswegs neu; sie wurde nur aus der antiken Überlieferung heraus neu belebt und zwar, wie es scheint, hauptsächlich aus dem Grunde, weil Aristoteles ihr aufs heftigste widersprochen hatte. Woher stammt aber diese Lehre? Nach dem Zeugnis der Alten rührt sie von Pythagoras her, und wenn sie auch nicht ihn selbst zum Urheber hat, so war sie doch jedenfalls in seiner Schule zuhause. Nach dieser Lehre setzen sich alle Körper und zwar unterschiedslos die mathematischen und die physikalischen Körper in letzter Instanz aus Punkten zusammen, allerdings in drei Stufen. Erst reihen sich die Punkte zu Linien aneinander, dann schließen sich die Linien zu Flächen zusammen, und endlich legen sich die Flächen zu Körpern aneinander.

Wir finden so, daß die letzte Quelle der Infinitesimalrechnung dieselbe ist, aus der unsere ganze geistige Kultur geflossen ist und mit der auch unsere christliche Religion in einem nachweisbaren Zusammenhange steht, nämlich die pythagoräische Schule. Es ist also in der Tat von vornherein eine gewisse Verwandtschaft der Infinitesimalrechnung mit religiösen Elementen vorhanden, und dieser Zusammenhang hat sich in ihrer ganzen späteren Entwicklung nicht verleugnet. Es scheint, daß die Betrachtung der Dinge in ihren kleinsten Elementen und in ihrer größten Ausdehnung, kurz gesagt alles das, was wir an das Wort Unendlich, heiße es nun unendlich klein oder unendlich groß, anknüpfen, in enger Verbindung steht mit dem, was uns zur religiösen Stimmung anregt. Die Lehre von den Indivisibeln, die Galilei wieder erneuert und die dann Cavalieri zu einem Lehrsystem ausgebaut hat[1]), war auch von den Griechen

1) Das Hauptwerk führt den Titel: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiae 1643). Besonders bezeichnend für die prinzipielle Auffassung Cavalieris ist die folgende Stelle aus der Vorrede: „Ich habe mich eines ähnlichen Kunstgriffes bedient wie die Algebraiker ihn zur Lösung ihrer Aufgaben anzuwenden pflegen, indem sie mit den Wurzeln der Zahlen, obwohl sie unbekannt und unangebbar sind, trotzdem addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren und dabei zufrieden sind, wenn das gewünschte Resultat auf diese Weise richtig herauskommt. Ebenso habe ich die Anhäufungen der Indivisibeln, seien diese nun Linien oder ebene Flächen, gleichsam als ihre unbekannte und unnennbare, aber doch der Größe nach in leicht erkennbare Grenzen eingeschlossene Anzahl zur Messung der Continua benutzt."

Digitized by Google

bereits viel weiter ausgeführt worden als man damals ahnte, nur galt sie sozusagen nicht für literaturfähig. In der literarischen Darstellung wurde sie durch die sehr exakte, aber auch sehr umständliche Methode ersetzt, die man als Exhaustionsverfahren bezeichnet. Wenn man also die Methode der Indivisibeln bei ihrer Einführung für etwas Neues hielt, durch das man wesentlich über die Griechen hinaus kam, so ist das nur in sehr beschränktem Maße richtig. Man griff damit vielmehr nur ein Verfahren wieder auf, das die Griechen selbst wohl gekannt, aber als das weniger vollkommene zurückgestellt hatten. Für die Schärfe und Klarheit des griechischen Denkens war in jener Zeit das Verständnis noch nicht aufgegangen; wir können sagen, daß erst in der jüngsten Zeit die Erkenntnis dessen, was hierin die Griechen wirklich geleistet haben, völlig erschlossen worden ist. Ich kann dies an dem Beispiel des sogenannten Archimedischen Axioms belegen. Man hat früher sicher nie begriffen, warum Archimedes in dem Vorwort seiner Schrift über die Quadratur der Parabel so nachdrücklich hervorhebt, er habe bei seinen Beweisen die Voraussetzung angenommen, daß der Unterschied ungleicher Flächen so oft zu sich selbst hinzugefügt werden könne, daß er größer werde als jede beliebig vorgelegte begrenzte Fläche. Heute wissen wir, daß hierin vielleicht das entscheidende Moment der ganzen geometrischen Betrachtung liegt.

Deshalb glaube ich auch, daß man auf dem Gymnasium, wo ja das Eindringen in die Gedankenwelt der Alten als das Ziel hingestellt wird, nicht gerade an den Punkten vorbeigehen sollte, in denen die Alten der modernen Erkenntnis vielleicht am weitesten vorgearbeitet haben. Dies läßt die Behandlung der Infinitesimalrechnung auf dem Gymnasium von einem anderen Gesichtspunkte aus erscheinen als man sie gewöhnlich auffaßt. Sie wird sozusagen ein Erfordernis der klassischen Bildung. Wir sollen den mathematischen Unterricht in Übereinstimmung bringen mit dem Unterricht in den alten Sprachen, und diese Übereinstimmung finden wir sicher am ehesten in den Schriften, in denen sich die geometrische Wissenschaft der Griechen am vollendetsten darstellt. An diese Schriften aber lassen sich die Infinitesimalbegriffe in der modernen Form unmittelbar anschließen, ja es scheint fast unausweichlich bei einer Schrift wie der Parabelquadratur des Archimedes, auf den Begriff und die Bezeichnung des Integrals einzugehen, denn der Prozeß, dessen sich Archimedes bedient, ist ja kein anderer als der, auf den wir, wenn wir ihn in seiner allgemeinen Bedeutung nehmen, heute die Einführung der Integrals gründen.[1])

Man wird, wenn man so von Integralen spricht, natürlich nicht umhin können, auch die Differentialquotienten zu nennen. Der eigentlichen Infinitesimal-

1) Für die Beurteilung des Archimedes ist von außerordentlicher Wichtigkeit ein vor kurzem entdecktes Fragment. Vgl. Heiberg und Zeuthen, Eine neue Schrift des Archimedes, Leipzig 1907. In der neuen Ausgabe der Werke des Archimedes, die Heiberg vorbereitet, wird diese Neuentdeckung gebührend berücksichtigt werden. Von den länger bekannten Schriften des Archimedes kommen als Vorstufe der Infinitesimalrechnung hauptsächlich in Betracht die folgenden vier: über die Ausmessung des Kreises, über die Quadratur der Parabel, über die Kugel und den Zylinder, über Konoide und Sphäroide. Für die Kenntnis und richtige Wertung des Exhaustionsverfahrens ist auch von der größten Bedeutung das XII. Buch der Euklidischen Elemente, das die Volumenbestimung der Pyramiden und Kegel enthält. Seinen genauen Inhalt auf dem Gymnasium durchzunehmen, ist nach meiner Meinung unbedingt zu empfehlen.

Digitized by Google

rechnung kann man aber immer noch aus dem Wege gehen. Es wird nichts anderes in Frage kommen als etwa die Formeln, die bei den Fallgesetzen auftreten und die ja im Physikunterricht fast überall, auch wo man sich sonst ganz von Infinitesimalbetrachtungen und überhaupt von mathematischen Entwicklungen fernhält, gebracht zu werden pflegen. Im übrigen wird es sich nur um die Begriffe, nicht um die Übung in ihrer praktischen Handhabung handeln. Diese Begriffe sind aber als Stütze für den gleichzeitigen Physikunterricht von der größten Bedeutung. So gestattet der Differentialquotient z. B. den Begriff der Geschwindigkeit und der Beschleunigung in exakter Weise zu geben, und der Integralbegriff erlaubt, den Begriff der Arbeit allgemein einzuführen und damit auch die Begründung des Energieprinzips in ihrer einfachsten Form zu behandeln.

Der so bezeichnete Standpunkt ist nach meiner Überzeugung der Standpunkt, der für den Schulunterricht das Minimum an Infinitesimalrechnung beansprucht, das heißt eigentlich überhaupt keine Infinitesimalrechnung, sondern nur die Infinitesimalbegriffe. Diese Begriffe sind aber nicht bloß notwendig, um den Physikunterricht in geeigneter und zweckdienlicher Weise auszugestalten, sondern sie sind meines Erachtens auch so wichtige Kulturbegriffe, daß wir danach trachten müssen, sie allen denen mitzuteilen, die später die Gebildeten unserer Nation repräsentieren sollen.

Wenn dieser erste Standpunkt das Minimum bezeichnet, auf das wir unsere Ansprüche herabmindern können, so ist der nächste, etwas weitergehende Standpunkt der, daß wir auch die Entdeckungen bis zur Ausbildung der eigentlichen Infinitesimalrechnung berücksichtigen. Wir gehen hierbei demnach über das im 17. Jahrhundert Erreichte nicht hinaus. Dies ist der Standpunkt, der gewöhnlich eingenommen wird, wo nicht bis zu einer ausgesprochenen Infinitesimalrechnung vorgedrungen wird, aber versucht wird, in der Elementarmathematik möglichst weit zu kommen. Es besteht allerdings ein gewaltiger Unterschied in der Form, in der man dies zu erreichen sucht, nämlich je nachdem, ob man sich die Bezeichnungsweise der Infinitesimalrechnung zu nutze macht oder nicht. Neigung und Zwang haben früher entschieden zu der zweiten Form gedrängt; erst in der neuen Zeit hat sich die Überzeugung durchzusetzen begonnen, daß ein solches Verfahren vielleicht bei der ersten Einführung der Begriffe gerechtfertigt ist, daß aber das fortdauernde Vermeiden der Leibnizschen Bezeichnung keinen Zweck hat, sondern die Behandlung nur erschwert. In sachlicher Beziehung bildet das Ausscheiden der Infinitesimalbezeichnung keine Abgrenzung. Es führt nur dazu, mit den sogenannten elementaren Methoden auch in Gebiete hineinzugehen, in denen sie nur mit erheblichen Schwierigkeiten für das Verständnis und mit großer Umständlichkeit Anwendung finden können, von den Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten, die damit notwendig verknüpft sind, ganz zu schweigen. Dagegen leistet die Infinitesimalrechnung, auch in der Beschränkung auf die einfachsten Aufgaben, alles, was man verlangen kann. Dem Inhalte nach ist der Standpunkt in der Behandlung der Infinitesimalrechnung, von dem wir hier sprechen, dadurch charakterisiert, daß über die Differentialquotienten der einfachen Funktionen, nämlich der Potenz, der trigonometrischen Funktion, der Exponentialfunktion und des Logarithmus und die Integrale der drei ersten Funktionsarten nicht hinausgegangen und alle verwickelteren Ausdrücke vermieden werden.

In der Beschränkung auf diese wenigen Funktionen liegt eine gewisse

Digitized by Google

Sicherheit, welche die einführenden Lehrbücher der Infinitesimalrechnung gewöhnlich nicht erreichen, indem sie schlechthin von einer Funktion sprechen und dieser Funktion alle möglichen besonderen Eigenschaften, insbesondere daß sie stetig und überall differenzierbar ist, ohne weiteres zuschreiben. Es wird dann ohne jede Begründung, in Wirklichkeit als tatsächlich, der Meinung nach aber als selbstverständlich angeführt, daß der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$, wenn Δx gegen Null konvergiert, einer bestimmten Grenze zustrebt. Wieviel sicherer ist man, wenn die Funktionen, von denen man spricht, keine anderen sein sollen als

$$x^n,\ \cos x,\ \sin x,\ e^x,\ \log x!$$

Dann läßt sich das Verhalten der Funktion gegenüber ihrem Differenzenquotienten wirklich verfolgen. Man braucht ja nur zu bedenken, daß das Interpolieren, das bei den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln auf der Schule geübt wird, nichts anderes ist als eine lineare Approximation an die Funktion. Dieses Interpolieren setzt im Grunde die Differenzierbarkeit der Funktion voraus, und an ihm läßt sich schon erörtern, wie freundlich uns die Funktionen dadurch entgegenkommen, daß sie einen solchen regulären Verlauf zeigen.

Ich sehe es als ein großes Verdienst von Perry an, daß er in der von Fricke und Süchting deutsch bearbeiteten *Höheren Analysis für Ingenieure* (Zweite Auflage, Leipzig 1910) es unternommen hat, zu zeigen, was man auf diesem Wege erreichen kann. Man kommt damit kurz gesagt so weit, wie die größeren Handbücher der Experimentalphysik die Mathematik benutzen. Den Bedürfnissen des physikalischen Unterrichtes wird also auf diese Weise voll Rechnung getragen.

Wenn der zweite Standpunkt den Leistungen des 17. Jahrhunderts entspricht, so läßt sich aus den Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts, insbesondere den beiden großen Lehrwerken Eulers, der dritte Standpunkt begründen. Er umfaßt ungefähr den Lehrstoff, der in den Vorlesungen über höhere Mathematik an den technischen Hochschulen gegeben zu werden pflegt. Es handelt sich hier um die voll ausgebildete Differentialrechnung und die Integralrechnung, so weit sie sich mit den elementaren Funktionen bewältigen läßt. Dazu kommen dann vielleicht noch die einfachsten Differentialgleichungen. Es ist wohl von vornherein klar, daß dieser Standpunkt in vollem Umfange für die Schule nicht eingenommen werden kann. Er entspricht schon einer fachlichen Ausbildung wie der des Ingenieurs, und auch bei der Ausbildung des Mathematikers wird er gewöhnlich in den ersten beiden Semestern festgehalten.

Erst der vierte Standpunkt, der die ganze moderne Forschung mit einbezieht, ist der, der dem Mathematiker von Fach als definitiver Standpunkt allein angemessen ist. Danach müßte aber, bevor mit der eigentlichen Infinitesimalrechnung begonnen wird, eine Vorlesung voraufgehen, welche wesentlich die Klärung der arithmetischen Begriffe zur Aufgabe hat. Sie entspricht ungefähr dem, was z. B. Stolz und Gmeiner in ihrer *Theoretischen Arithmetik* bringen. Nach der neuesten Auffassung müßte auch die Mengenlehre hinzutreten. Wenn man es tatsächlich nicht so macht, so liegt es wohl außer der Rücksichtnahme auf die Physiker daran, daß der junge Student, der auf die Hochschule kommt, nach Differentialen und Integralen hungrig ist und nicht gerne noch eine lange Strecke Weges zurücklegen möchte, ehe er zu ihnen gelangt. Er sieht sie ja vorläufig noch als den Inbegriff der höheren

Digitized by Google

Mathematik an, und es braucht eine viel tiefere Einsicht und gründliches Studium, bis er erkennt, daß das „Höhere" nicht in der Formel, sondern in der Auffassung liegt, daß die höchsten und letzten Probleme doch wieder das betreffen, was er zunächst als das Einfachste und Elementarste anzusehen versucht ist.

Die didaktische Teilung der Infinitesimalrechnung nach ihrem Inhalte haben wir damit beendet. Wir können in die von uns bezeichneten vier Standpunkte jede mögliche Stellungnahme eingliedern und etwa durch eine Zahl unter 4 charakterisieren, indem wir den oben festgelegten Standpunkten die Nummern 1—4 geben. Es bekämen dann die Gymnasien wohl im allgemeinen die Nummern 0—1,5, die Realgymnasien und Oberrealschulen die Nummern 1,5—2,5.

Es bleibt uns nun noch die schwierigere, aber auch viel interessantere Frage nach der Methode zu erledigen. Zunächst wird wiederum zu sagen sein, daß wie die Schule dem Inhalte nach nicht die höchste Stufe erreichen kann und soll, sie auch der Methode nach zur völligen Exaktheit nicht vordringt. Man wird das im strengen theoretischen Sinne auch nicht fordern können, um so energischer ist aber darauf zu dringen, daß trotzdem alles Falsche, Unklare und Unehrliche nach Möglichkeit vermieden werden muß.

Es ist, wie wir schon sagten, außerordentlich schwer, bei der Infinitesimalrechnung eine Auffassung als die allein richtige hinzustellen, denn wenn man sich auch selbst von einer Darstellung vollständig befriedigt fühlt, so erkennt man doch bald, daß andere Leute anders denken. So hat die exakte arithmetische Theorie, an der man doch kaum etwas Unklares und Unbewiesenes wird nachweisen können, keineswegs eine allseitige Zustimmung erfahren. Man hat sie von einigen Seiten als eine Umschreibung und nicht als eine Durchbildung der Infinitesimalbegriffe angesehen. Es scheint, daß der alte Streit über das Unendliche, der sich in den Bezeichnungen des aktual und potentiell Unendlichen ausprägt, nie ganz verschwinden wird, daß kein mathematischer Beweis gefunden werden kann, der für alle und jeden den Begriff des aktual Unendlichen aus dem Bereich der wissenschaftlichen Untersuchung entfernt. Dieser Gegensatz der Auffassungen entspricht zwei verschiedenen Richtungen des menschlichen Denkens überhaupt, die in ewigem Widerstreit nebeneinander herlaufen. Die eine Richtung ist die metaphysische oder wenn man will mystische, die andere die empirische oder aufklärerische, die es ablehnt, über die Grenzen der Erfahrung hinauszugehen. Von alters her werden für diese beiden Richtungen die philosophischen Bezeichnungen des Immanenten und Transzendenten verwendet, man hat für sie in letzter Zeit auch vielfach die Schlagwörter des phänomenologischen und ontologischen Standpunktes gebraucht, die ihr Wesen recht gut bezeichnen. Es ist wohl eine innere Veranlagung des Einzelnen, die ihn auf den einen oder anderen Weg hinweist. Dabei bleibt es von großer Bedeutung, daß auf solche Weise auch die mathematische Auffassung mit dem ganzen Überzeugungsgehalt eines Menschen in innigen Zusammenhang tritt. In diesem Sinne ist es nicht eine bloße Redewendung, wenn man im 18. Jahrhundert von der Metaphysik der unendlich kleinen Größen gesprochen hat. Es handelt sich wirklich um Metaphysik. Die Metaphysik steht aber schon der religiösen Überzeugung bedenklich nahe. So bekommt das Mathematische geradezu einen religiösen Einschlag, es bleibt nicht unabhängig von der religiösen Überzeugung des Einzelnen.

Digitized by Google

Daß dies nicht eine bloße Phantasie ist, kann ich vielleicht am besten an den Männern zeigen, denen wir das Aufkommen der exakten arithmetischen Auffassung vornehmlich verdanken, d'Alembert und Cauchy. Die beiden standen bekanntlich in religiöser Beziehung auf diametral entgegengesetzten Standpunkten. D'Alembert war ebenso irreligiös, wie Cauchy strenggläubig war. Merkwürdigerweise haben sie diese verschiedenen Anschauungen zu denselben mathematischen Konsequenzen geführt. D'Alembert sah den mystischen Zug in der zu seiner Zeit herrschenden Auffassung des unendlich Kleinen und kämpfte von seinem sensualistischen Standpunkt dagegen an, indem er ganz in der modernen Weise den Differentialquotienten als einen Grenzbegriff definierte. Cauchy dagegen hatte die Versuche der Aufklärer vor Augen, mit Hilfe der Mathematik die Fragen nach dem Warum und Wozu aus der Welt zu schaffen und alles Geschehen auch im sozialen und sittlichen Leben auf ein bloßes Rechenexempel zurückzuführen — wir dürfen dabei vor allen Dingen an Laplaces *Théorie des Probabilités* denken, die in der Tat weit hinein in die Erscheinungen des gesellschaftlichen Lebens vordringt. Dagegen sträubte sich sein Empfinden, er hielt es für notwendig, die Mathematik in die ihr gesteckten Grenzen zurückzuweisen, und an die Stelle der unklaren Übertreibung die volle, zielbewußte Strenge des Beweises auf dem eigentlichen Gebiete der Mathematik treten zu lassen.[1])

So kam er zu seiner Auflösung des Unendlichkeitsbegriffes. Er hat damit den entscheidenden Schritt zu dessen moderner Ausgestaltung getan, denn von ihm rührt der Gedanke her, das unendlich Kleine auf einen bestimmten Prozeß, der ohne Ende fortsetzbar ist, zurückzuführen. Das unendlich Kleine ist danach nicht etwa eine neue Größenart, sondern eine nie abbrechende, regelmäßige Folge von endlichen Größen, die kleiner und kleiner werden, so daß in der Zahlenfolge stets eine Stelle gefunden werden kann, von der ab die Größen der Folge kleiner sind als eine noch so kleine vorgegebene Zahl.

Es ist wohl kein Zweifel, daß dieser einfache und klare Gedanke für die meisten modernen Menschen erlösend wirkt gegenüber einer solchen Anschauung, wie sie etwa Euler vertritt. Dieser deutet bekanntlich die unendlich kleinen Größen als Nullen und für ihn ist die ganze Infinitesimalrechnung sonach ein Rechnen mit Nullen, das aber ganz anderen Regeln unterworfen ist, als für die Null in der Arithmetik gelten. Die Nullen bekommen, trotzdem sie Null sind, eine quantitative Verschiedenheit, ja es läßt sich auch durch Addition einer unendlichen Menge von ihnen wieder die endliche Größe gewinnen. Man steht einer solchen Auffassung zunächst ratlos gegenüber, bis man sie im Lichte anderer gleichzeitiger oder früherer Anschauungen zu verstehen beginnt. In Eulers Ansicht steckt die Newtonsche Theorie der letzten Verhältnisse, die sich direkt in seiner Bezeichnung der unendlich kleinen Größen als verschwindende Größen zu erkennen gibt, und in Newtons Lehre

1) D'Alembert hat seine Auffassung der Infinitesimalrechnung entwickelt in den *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie* (Nouv. édit. Amsterdam 1767, p. 239) und in dem Artikel *Différentiel* der Encyclopédie méthodique (Paris 1785). Von Cauchy kommen vornehmlich in Betracht die didaktischen Werke: *Cours d'Analyse* (Paris 1821) und *Leçons sur le Calcul Différentiel* (Paris 1823). Mit d'Alemberts Äußerungen ist die Ansicht zu vergleichen, die Kästner in seinen *Dissertationes mathematicae* (Altenburg 1771, Diss. V: De vera infiniti notione) entwickelt hat. Für das Aufkommen der streng arithmetischen Schule des 19. Jahrhunderts hat in Deutschland am meisten Lejeune Dirichlet getan.

Digitized by Google

der Begriff der Indivisibeln, der bei Euler schließlich nur in einer anderen Bezeichnung wieder auftritt, und wenn ihn Euler direkt analytisch gefaßt hat, so hat ihn ungefähr gleichzeitig Torelli[1]) in der alten geometrischen Form, aber ebenfalls unter der Bezeichnung Nihil, also Nichts oder Null, wieder aufleben lassen, und diese Auffassungen bilden keineswegs bedeutungslose Nebenerscheinungen; sie waren in ihrer Zeit vielleicht die verbreitetsten und geachtetsten.[1])

Für uns ist nun die Frage: was haben alle diese Auffassungen für die Schule zu bedeuten? Hat es Zweck, sie überhaupt in Betracht zu ziehen? Wenn sich zwischen zwei verschiedenen Auffassungen die Entscheidung nicht treffen läßt, gibt es dann nicht wenigstens für jede dieser Auffassungen eine definitive Form, die allein für die Jetztzeit und damit auch für die moderne Schule in Betracht kommt? Es ist allerdings nicht zu leugnen, daß das Hineinziehen eines mystischen Elementes für die Jugend etwas Verführerisches und Gefährliches hat, umsomehr als sich der Lehrer durch das Betonen dieses mystischen Elementes bei den Schülern eine billige Sensation verschaffen kann. Es ist in ähnlicher Weise vielfach mit dem Unendlichen in der Geometrie herumgewirtschaftet worden, wenn es sich auch nur um den Satz handelte: zwei parallele Linien schneiden sich im Unendlichen, und das Erstaunen, das diese paradoxe Behauptung bei den Schülern hervorrief.

Wir dürfen gewiß nicht verkennen, daß es nicht bloß eine Metaphysik, sondern auch eine wirkliche Mathematik des Unendlichen gibt. Die Untersuchungen, die dies Gebiet betreffen, gehören ja zu dem Bedeutendsten, was die neueste mathematische Forschung geleistet hat. Der Mathematiker verlangt von den Begriffen, die er behandelt, nichts, als daß sie einer widerspruchsfreien logischen Verknüpfung fähig sind; um ihre reale Bedeutung kümmert er sich nicht. Was einer mathematischen Behandlung zugänglich ist, das darf auch einer mathematischen Behandlung unterworfen werden, ohne daß man irgendein Bedenken dagegen haben kann. Wir können deshalb mit transfiniten Zahlen ebenso gut wie mit endlichen Zahlen operieren, wenn die Regeln nur genau feststehen, nach denen wir zu operieren haben. Ebenso können wir auch von einer Analysis des unendlich Kleinen reden, ohne damit irgendwie den Gedanken einer metaphysischen Lehre verbinden zu wollen.

Ich glaube sogar, daß diese Analysis nicht bloß der neuesten Zeit angehört, sondern daß sich auch die Indivisibelnlehre des 17. Jahrhunderts zu einem logisch widerspruchsfreien System zusammenschließen läßt, das allerdings auf bestimmten Voraussetzungen über das Wesen der geometrischen Größen fußt und in seiner Ausdehnung auf die Mechanik auch zu ähnlichen Voraussetzungen bezüglich der Zeit greift. Diese Voraussetzungen aber stehen in enger Verbindung mit der heute allgemein anerkannten physiologischen Tatsache, daß das Gesichtsbild, das wir wahrnehmen, aus einzelnen kleinen Flecken zusammengesetzt ist, und daß ebenso alles, was uns unsere Sinne übermitteln,

1) Euler hat sich über seine Auffassung des unendlich Kleinen am Anfang seiner *Institutiones calculi differentialis* ausführlich ausgesprochen. Die Schrift von Torelli führt den Titel *De nihilo geometrico* (Verona 1758). Typisch ist die Definition: „Nichts ist das, durch das alles das, was nicht ist, Nichts genannt wird. Man sagt aber, etwas sei nicht, wenn es, während es vorher war, nicht mehr als seiend angenommen wird". Die Analogie mit der Theorie der letzten Verhältnisse, die Newton in seinem großen Werke *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) entwickelt hat, geht daraus schon hervor.

Digitized by Google

in zeitlicher Hinsicht aus einzelnen Eindrücken besteht. Wir drücken diese Tatsache im gewöhnlichen Leben durch die Wörter Punkt und Augenblick, die die letzten Elemente der Wahrnehmung bezeichnen, aus. Das hat, wie es scheint, Giordano Bruno bereits erkannt und zur Grundlage einer neuen Mathematik, die er in bewußtem Gegensatz gegen die überlieferte Wissenschaft entwickelte, gemacht.[1]) Für ihn waren die Raum- und Zeitatome, die er annahm, noch nicht unendlich klein. Er steht darin sozusagen dem Physiologischen noch näher als die nach ihm kommende und vielleicht auf ihm aufbauende Indivisibelnlehre, die den Vorläufer der modernen Analysis des Unendlichen bildet.

So interessant und wertvoll aber diese Analysis des Unendlichen ist und so unbedingt sie in die Wissenschaft hineingehört, so ist es nach meinem Dafürhalten doch nicht gut, dem Schüler solche Theorien beizubringen, denn er wird sie kaum richtig verstehen und nur eine Trübung seines Denkens dadurch erfahren; auch verbietet sich ihre volle Durchführuug auf der Schule durch ihre Langwierigkeit und Schwierigkeit. Wenn man auch die moderne exakte Begründung der Infinitesimalrechnung in Betracht zieht, so muß sie doch nach Möglichkeit vereinfacht und abgekürzt werden, es kann sozusagen nur ein populärer Auszug aus ihr gegeben werden. Sie ganz zu vermeiden liegt allerdings kein zwingender Grund vor, im Gegenteil ist nicht zu leugnen, daß auch das Herausgreifen einiger weniger Bestandteile von ihr außerordentlich erzieherisch wirken kann.

Diese erzieherische Wirkung besteht wesentlich darin, daß sie lehrt, in der Mathematik nichts als selbstverständlich hinzunehmen, weil es die Anschauung unmittelbar zeigt. In der Berufung auf die Anschauung liegt eine Verführung zur Oberflächlichkeit, die am wirksamsten bekämpft wird, wenn man wenigstens an einzelnen Punkten bis zur vollen logischen Durchbildung vordringt. Diese Durchbildung war ja auch in der Geometrie das Ziel bei der Begründung der modernen Axiomatik, und wie man die Axiomatik auf der Schule nicht von Anfang an und nicht bis in die letzten Konsequenzen durchführen kann, so wird man auch die arithmetische Theorie der Infinitesimalrechnung mit einer gewissen weisen Maßhaltung verwenden müssen.

Der Satz, der bei ihr die Grundlage bildet, ist bekanntlich der Satz, daß eine stetige Funktion nicht von einem Werte zu einem anderen Werte übergehen kann, ohne alle dazwischen liegenden Werte zu durchlaufen. Es wird gewiß mancher sagen: das ist ja selbstverständlich, das braucht doch nicht erst bewiesen zu werden. Aber selbstverständlich erschien auch der Satz, daß eine Funktion, wo sie stetig ist, immer einen Differentialquotienten besitzt, und doch hat er sich als falsch erwiesen.

Die Frage ist zunächst, wie der Begriff der stetigen Funktion, der von Hause aus auch ein anschaulicher war und als solcher gegeben wurde, exakt arithmetisch festgelegt werden soll. Die heute gebräuchliche Definition ist die von Cauchy angegebene, daß eine Funktion $f(x)$ für den Argumentwert x stetig heißt, wenn die Differenz

$$f(x+h) - f(x)$$

mit h gegen Null konvergiert. Der Satz, um den es sich handelt, kann dann so umgeformt werden, daß man sagt: eine stetige Funktion kann nicht von

1) *De triplici minimo*, Frankfurt 1591.

Digitized by Google

einem positiven zu einem negativen Werte übergehen, ohne mindestens einmal den Wert Null anzunehmen. Cauchy hat diesen Satz ausdrücklich formuliert, aber keinen Beweis dafür gegeben, sondern sich auf die geometrische Anschauung gestützt, die ihn bei der graphischen Darstellung als richtig erweist.

Daß hierin kein Beweis liegt, haben wir jetzt längst eingesehen. Von einem Beweise des Satzes müssen wir verlangen, daß er zeigt, wie der Satz aus der Definition der stetigen Funktion folgt, d. h. wie aus der Annahme, daß die Funktion nicht den Wert Null annimmt, mit Notwendigkeit folgen würde, daß sie gegen die Voraussetzung, sie sei eine einwertige stetige Funktion, für denselben Wert des Argumentes gleichzeitig positiv und negativ werden müßte. Der Beweis ist so einfach, daß man nicht einsieht, warum man ihn im Schulunterricht vermeiden soll. Er kann meines Erachtens gut gebracht werden und gibt dem Schüler ein klares Beispiel für das Wesen des mathematischen Beweises überhaupt. Trotzdem ist er selbst in umfangreichen Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung ausgelassen, vielleicht weil sie unmittelbar auf die Cauchysche Tradition zurückgehen. Auch daß die Stetigkeit wohl die notwendige, aber nicht die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Differentialquotienten ist, kommt häufig nicht deutlich zum Ausdruck, obwohl es sich an dem Verhalten der Funktion

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

an der Stelle $x = 0$ sofort klarlegen läßt und obwohl es eigentlich ganz selbstverständlich ist, daß wenn

$$f(x + h) - f(x)$$

mit h gegen 0 konvergiert, nicht auch gleichzeitig der Quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gegen eine feste Grenze zu konvergieren braucht. Trotzdem scheint es nicht zweckmäßig, ja ganz unmöglich, einen methodisch vollständigen Lehrgang auf dem Wege der exakt arithmetischen Theorie für die Schule zu versuchen. Man könnte dabei nur an die Oberrealschulen denken, denn den Gymnasien fehlt hierzu durchaus die Zeit. Man wird aber einwenden, daß wenn der ganze Charakter der Oberrealschulen darauf zugeschnitten sein soll, die Schüler zu praktischen Berufen und für das praktische Leben vorzubilden, auch eine praktischere Auffassung der Infinitesimalrechnung platzgreifen müsse.

Es bleibt ja, selbst wenn die Infinitesimalbegriffe vollkommen streng begründet sind, noch übrig zu zeigen, wie denn diese Begriffe einer praktischen Anwendung fähig sind. In allen diesen Anwendungen erscheinen die Integralbegriffe nicht rein, sondern in einer approximativen Umdeutung. In solcher Umdeutung operiert man ungeniert direkt mit Differentialen; die Differentiale sind aber nicht mehr als unendlich kleine, sondern als genügend kleine Größen aufzufassen. Jede metaphysische Ausdeutung ist damit beseitigt. Es lag daher auch von Anfang an nahe, diese Deutung der Infinitesimalrechnung zu bevorzugen. Was immer davon abgehalten hat, war der Umstand, daß es dann schwierig ist zu begründen, warum zum Beispiel für das Differential von x^2 gerade $2x \cdot dx$ und nicht irgend ein anderer diesem nahe benachbarter Wert genommen wird. Diese Schwierigkeiten bestehen eigentlich auch heute noch fort,

Digitized by Google

und sie sind wohl der wesentliche Grund, warum die Approximations-Mathematik, auf deren selbständige Bedeutung F. Klein wohl zum erstenmal nachdrücklich hingewiesen hat[1]), sich bis heute noch keiner rechten Aufnahme zu erfreuen gehabt hat.

Indessen ist es nicht schwer, die approximative Auffassung bei einer elementaren Behandlung der Infinitesimalrechnung einigermaßen konsequent durchzuführen.[2]) Man kann ja schließlich auch mit Gründen der Einfachheit und Zweckmäßigkeit belegen, was man nicht als notwendig hinzustellen vermag. Man gelangt so zu einer Darstellung der Infinitesimalrechnung, die nicht so sehr die logische Vollkommenheit, als die praktische Zweckmäßigkeit ins Auge faßt und die die einzelnen Begriffe nicht etwa aus theoretischen Prinzipien, sondern aus realen Bedürfnissen herleitet.

Sie hat den großen Vorzug, daß sie sich unmittelbar dem physikalischen Unterrichte und auch dem astronomischen oder geodätischen Unterrichte, wo ein solcher gegeben wird, angliedert. Sie läßt sich auch in dem geometrischen Unterrichte mit großem Nutzen verwenden, weil sie die Beziehung zur Zeichnung nicht aus dem Auge verliert. Es erscheinen so z. B. die Krümmungskreise als ein Mittel, die Kurve durch Annäherung zu konstruieren, und die tatsächliche Ausführung der Zeichnung erweist dann deutlich, wie weit dieses Mittel von praktischem Nutzen ist. Wirklich werden ja auch z. B. die Ellipsen fast immer so gezeichnet.[3]) Nach alledem kann es wenigstens vom praktischen Gesichtspunkte aus am zweckmäßigsten erscheinen, trotz einzelner theoretischer Bedenken diese Methode für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung an der Schule zu wählen.

Ihre Verwendung zeigt ihre Vorzüge sehr klar bei der Behandlung der Taylorschen Reihe, die in dieser Form sogar in elementare Lehrbücher wie Behrendsen und Götting[4]) Eingang gefunden hat. Hierbei werden durch graphische Darstellungen die Annäherungen erläutert, die sich ergeben, wenn man von der Reihe nur eine gewisse Anzahl Glieder berücksichtigt, und so an den einfachsten Beispielen die Bedeutung der Taylorschen Reihe sehr anschaulich und eindringlich dargelegt. Man mag etwas von der Rohheit der Empirie in dieser Behandlungsweise sehen, sie muß aber auf den Schüler überzeugender wirken als lange theoretische Auseinandersetzungen, deren Zweck er nicht recht einsieht.

Zu warnen ist aber gerade hier vor unberechtigten Verallgemeinerungen und unbewiesenen Annahmen. Wo man nicht imstande ist, mit den zur Ver-

---

1) Besonders in den autographierten Vorlesungen *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (S.-S. 1901, Neuer Abdr. 1907).

2) Den Typus einer approximativen Behandlung bildet die Art, wie Huygens sich mit den Infinitesimalproblemen abfindet. Insbesondere vergleiche man im *Horologium oscillatorium* (1673) die Ableitung der Trägheitsmomente, die heute noch im Unterricht genau auf dieselbe Weise gegeben zu werden pflegt. Es ist auch nicht zu leugnen, daß für die Einführung der Infinitesimalbegriffe eine solche Ableitung eine vorzügliche Vorbereitung bildet, weil sie die Vorstellungen klärt, ohne zunächst neue methodische Hilfsmittel einzuführen.

3) Ich kann in dieser Hinsicht auf ein kleines Buch: Lindow, *Anwendungen der Differentialrechnung auf das technische Zeichnen* (Jena 1910) verweisen.

4) *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen* (Leipzig, B. G. Teubner 1909).

Digitized by Google

fügung stehenden einfachen Hilfsmitteln die Konvergenz der unendlichen Reihe zu beweisen, beschränke man sich auf die leichter abzuleitende endliche Reihe

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h), \quad 0 \leqq \theta < h.$$

Sehr nützlich scheint mir, das schon von Cauchy angegebene Beispiel der Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

heranzuziehen, die für $x = 0$ mit ihren sämtlichen Derivierten verschwindet. Solche Curiosa von Funktionen spielen zur Klärung der prinzipiellen Einsicht ungefähr dieselbe Rolle wie etwa in der Zoologie der Amphioxus für das richtige Verständnis der Wirbeltiere.

Es ist nun noch eine dritte Methode zu erwähnen, die ebenfalls ihre unleugbaren Vorzüge besitzt und manche Anhänger gefunden hat. Es ist dies die Methode, die in Newtons *Fluxionsrechnung* niedergelegt ist.[1]) Sie war lange Zeit, während auf dem Kontinent bereits die Leibnizsche Infinitesimalrechnung ausgebildet war, in England die herrschende. Ihr Wesen beruht darauf, daß die Geschwindigkeit eines Körpers als ein dem menschlichen Geiste unmittelbar zugänglicher Begriff angesehen wird. Dies ist ja nicht über jeden Zweifel erhaben und die Ansichten weichen hierin auch ziemlich voneinander ab. Einige, vielleicht sogar die Mehrzahl, sind der Meinung, daß der Begriff der Geschwindigkeit erst mit Hilfe der abgeleiteten Funktion überhaupt definiert werden könne. Auf diesem Wege hat Lagrange den Geschwindigkeitsbegriff vielleicht am exaktesten begründet[2]), indem er von einer gleichförmigen Bewegung ausging, die sich der wirklichen Bewegung in einem gegebenen Augenblicke so nahe anschmiegt wie nur möglich. Nach der entgegengesetzten Ansicht aber, die unter den neueren Autoren vielleicht am entschiedensten Cournot vertreten hat[3]), ist die Geschwindigkeit ein ursprünglicher Begriff, die abgeleitete Funktion ist wohl zu ihrer Messung, nicht aber zu ihrer Begriffsbestimmung notwendig. Dieselbe Auffassung war auch im 17. Jahrhundert, als die Indivisibeln noch die Herrschaft führten, die allgemein verbreitete. Wir können sie geradezu als die Auffassung der *dynamischen Indivisibeln* bezeichnen. Wenn nämlich die Zeit in einzelne Zeitpunkte zerlegt wird, so ist das, was in die einzelnen Zeitpunkte fällt, nach dieser Auffassung nicht bloß der Körper an einer bestimmten Stelle, sondern der Körper begabt mit einem bestimmten Triebe, der ihm zufolge der Bewegung innewohnt. Dieser Trieb ist es, was die Geschwindigkeit ausmacht. Von dem Standpunkte der heutigen Begriffsbildung müßten wir eigentlich sagen: Geschwindigkeit ist der Impuls des Körpers geteilt durch seine Masse, oder wenn man will, der Impuls der Masseneinheit. Es ist ja bekannt, daß Descartes (Principia philosophiae, 1644) diesen Impulsbegriff zu dem Hauptbegriff der ganzen mechanischen Welterklärung gemacht hat. Hobbes (De corpore, 1655) hat ihn dann nach der physikalischen Richtung

1) Die Schrift von Newton führt den Titel *Methodus fluxionum* und stammt aus dem Jahre 1671, ist aber erst 1736 durch Colson in englischer Übersetzung und 1744 von Castillon in lateinischer Rückübersetzung unter den *Opuscula Newtoni* (Vol. I, p. 31—199) veröffentlicht worden.

2) *Théorie des fonctions*, Troisième partie, Œuvres t. IX, p. 337.

3) *Traité élémentaire des fonctions et du calcul infinitésimal*, Paris 1841, deutsch von Schnuse, Darmstadt 1845.

Digitized by Google

hin ausgebildet, von ihm ist er an Wallis (Mechanica, 1671) und weiter an Newton übergegangen. Newton nun hat die analytisch umgedeutete Geschwindigkeit einer mit der Zeit veränderlich gedachten Größe als ihre Fluxion bezeichnet und durch einen übergesetzten Punkt charakterisiert. Was wir heute $\frac{dy}{dx}$ schreiben, lautet bei ihm $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Die Zeit tritt so als eine Hilfsvariable auf, die man insbesondere so wählen kann, daß sich x gleichförmig ändert, also $\dot{x}$ konstant wird. Diese Auffassung hat neuerdings dadurch in gewisser Weise an Bedeutung gewonnen, daß man im technischen Lehrbetriebe für einzelne Berufe die Infinitesimalrechnung in organische Verbindung mit der Mechanik zu bringen gesucht hat. Charakteristisch hierfür ist die neueste Auflage von Nernst und Schoenflies: *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*, (München 1910). Was die Schulen betrifft, so ist Höfler dem Gedanken ernstlich nahe getreten, in die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung an der Hand der Physik, insbesondere der Mechanik einzuführen. Diese Versuche erscheinen mir außerordentlich interessant und beachtenswert. Zu einer vollen Durchbildung für den Schulunterricht sind sie allerdings noch nicht gelangt.

Es ist vielleicht gut, an dieser Stelle auch überhaupt auf die empirisch physikalischen Elemente hinzuweisen, die in der noch nicht bis zur völligen logischen Klärung durchgedrungenen Mathematik stecken. Wenn z. B. — und das geschieht nicht bloß in bescheidenen Schulbüchern, sondern auch in Lehrbüchern, die für das Hochschulstudium bestimmt sind — als absolut selbstverständlich hingestellt wird, daß ein Kreisbogen größer ist als die Sehne, die seine Endpunkte verbindet, und kleiner als die Summe der Tangenten, die in seinen Endpunkten berühren, so liegt das in einer physikalischen Auffassung der Bogenlänge begründet. Man denke an den ausgestreckten Faden oder auch den zurückgelegten Weg! Mathematisch wird aber der Kreisumfang ja erst gewonnen als der gemeinsame Grenzwert des Umfanges der einbeschriebenen und der umschriebenen Polygone. Ähnlich ist es auch mit dem Flächen- und Rauminhalt, der zunächst physikalisch als Masse oder Gewicht aufgefaßt und demgemäß als unmittelbar gegeben betrachtet wird. Es wäre sehr lohnend, einmal diese physikalische Seite der Geometrie zusammenfassend zu untersuchen, umsomehr als die geometrischen Anschauungen bedeutender Physiker wie Helmholtz, Boltzmann, Mach u. a. m. nach dieser Richtung hin liegen.

Es existiert nun aber noch eine Auffassung, der man versucht sein könnte für die Schule eine größere Bedeutung zu geben. Es ist dies die Auffassung, die Lagrange zuerst 1772 ausgesprochen[1]) und dann in seiner *Théorie des fonctions analytiques* (1797) weiter ausgeführt hat. Hiernach ist die Funktion von vornherein durch eine Potenzreihe gegeben und die abgeleitete Funktion ist einfach der Faktor des zweiten Gliedes in dieser Entwicklung. Nämlich wenn der Funktionsausdruck lautet

$$f(x+\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + \cdots,$$

1) In der Abhandlung *Sur une nouvelle espèce de calcul* (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, Année 1772, p. 86, Œuvres t. III, p. 441). Man vergleiche auch dazu die *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Œuvres t. VII, p. 579. In Band IX der Œuvres ist die Ausgabe von 1813 der *Théorie des fonctions* und in Band X sind die daran anschließenden *Leçons sur le calcul des fonctions* abgedruckt.

Digitized by Google

so wird $a = f(x)$, $b = f'(x)$, d. h. gleich der abgeleiteten Funktion von f für den Argumentwert x. Diese Auffassung läßt sich mit dem approximativen Standpunkt leicht so zusammenhalten, daß man von diesem letzteren Standpunkt aus den Wert der Funktion in der unmittelbaren Umgebung einer gewissen Stelle durch den linearen Ausdruck angenähert darstellt:

$$f(x + \xi) = a + b\xi;$$

es werden dann in der Reihe alle Glieder bis auf die ersten zwei vernachlässigt. Will man die Lagrangesche Auffassung für den Unterricht nutzbar machen, so müssen die in Betracht kommenden Funktionen zunächst durch Reihen dargestellt werden. Es müssen also auf der Schule die Reihen für sin, cos und log gebracht werden, wie es ja auch vielfach geschieht, wobei man sich mit den Konvergenzbeweisen auf irgend eine Art, vielleicht auch garnicht abfindet. Die Reihen sind zunächst für einen bestimmten Ausgangspunkt der Entwicklung gegeben, die Entwicklung kann aber auch leicht auf irgend einen anderen Wert des Argumentes als Ausgangspunkt übertragen werden. So scheint es möglich, die Infinitesimalbetrachtung überhaupt auszuscheiden, und das hat Lagrange auch als den Vorzug seiner Methode betrachtet. Im Grunde ist diese Methode dieselbe, die Weierstrass bei seiner „Theorie der analytischen Funktionen" im Gebiet der komplexen Zahlen eingeschlagen hat. Es ist ja bekannt, wie außerordentlich leicht und elegant sich dabei die wichtigsten Sätze ableiten ließen, wie unter anderem die Theorie der elliptischen Funktionen eine überraschend einfache Gestalt erhielt. Es dürfte aber, ganz abgesehen von den Konvergenzbetrachtungen schwer sein, auf der Schule ohne alle Infinitesimalbetrachtungen die Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen zu finden. Greift man aber zu Infinitesimalbetrachtungen, so benutzt man doch im Grunde immer die abgeleitete Funktion wenigstens für einen speziellen Wert des Arguments. Dann ist es leichter, die abgeleitete Funktion für einen beliebigen Argumentwert auf die gewöhnliche Weise zu gewinnen als auf Grund der Lagrangeschen Theorie. Geht man z. B. davon aus, daß für ein gegen Null konvergierendes ε

$$\lim \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1, \quad \lim \frac{\log (1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = 1, \quad \lim \frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = 1$$

wird, so folgen aus den Beziehungen

$$\frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \cdot \cos (x + \tfrac{1}{2}h),$$

$$\frac{\log (x + h) - \log x}{h} = \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{e^{x+h} - e^{x}}{h} = \frac{e^{h} - 1}{h} \cdot e^{x},$$

wenn wir h gegen Null konvergieren lassen, sofort allgemein die Differentialquotienten der Funktionen $\sin x$, $\log x$ und e^x. So glaube ich doch nicht, daß dieser Weg, so verlockend er zuerst auch scheint, für die Schule ernstlich in Betracht kommt.

Als letzte mögliche Methode müßte ich noch die ursprüngliche Leibnizsche Methode nennen, die garnicht so selten benutzt wird. Mir scheint aber

Digitized by Google

doch der Begriff des aktual Unendlichen, auf dem diese Methode beruht, wenigstens für die Schule nicht zu empfehlen. Es ist bedenklich, den Schüler daran zu gewöhnen, unvorstellbare Dinge auf Grund von bloßen Anschauungsanalogien hinzunehmen, und ihn so in der Mathematik zu einer Art Wunderglauben zu verführen. Dies war ja auch wesentlich der Gedanke, der den Bischof Berkeley bei seinen Angriffen gegen die neue Analysis leitete. Er sagte: „Ihr sträubt euch gegen den Wunderglauben der Kirche, treibt aber selbst in eurer Wissenschaft einen viel größeren Kultus des Wunders.“ Man kann nicht leugnen, daß er in gewisser Weise recht hatte, denn in jener Zeit suchte man förmlich etwas darin, sich in Spekulationen über das Unendliche, die von jeder streng logischen Begründung weit entfernt waren, zu ergehen. Als ein Beispiel dafür kann ich das dickleibige Werk von Fontenelle „über die Geometrie des Unendlichen“ nennen, das ganz angefüllt ist mit solchen Spekulationen und von eigentlichen mathematischen Resultaten sehr wenig enthält.

Die wirkliche Wissenschaft des Unendlichen und der Nachweis der Möglichkeit einer exakten logischen Handhabung des Unendlichkeitsbegriffes beginnt erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts mit Bolzano. Seine Schrift über „die Parodoxien des Unendlichen“ kann als die Grundlage der modernen Mengenlehre angesehen werden, auch die Bezeichnung Menge hat er zuerst eingeführt. Zu einer Behandlung der Mengenlehre auf der Schule wird man aber kaum Zeit finden. Eine solche Behandlung würde ja auch nur dann von Wert sein, wenn sie nicht in den Anfängen stecken bliebe, sondern durch ihre volle Durchführung ihre Bedeutung für die Grundlegung der Mathematik und überhaupt für das menschliche Denken zeigen könnte.

Man wird nun wohl erwarten können, daß ich auch noch einige Worte über die verschiedenen Lehrbücher, die für die Infinitesimalrechnung auf der Schule in Betracht kommen, und ihre prinzipielle Stellungnahme hinzufüge. Es würde sich zunächst um die eigentlichen Schullehrbücher handeln, d. h. um diejenigen Bücher, die den Schülern in die Hände gegeben werden sollen. Es ist aber keine leichte und keine angenehme Arbeit, hierüber zusammenfassend zu berichten; das Gute und das Richtige sicher herauszufinden, ist außerordentlich schwer, die Lehrmethoden sind auch viel zu wenig geklärt, als daß sich abschließend über sie urteilen ließe. Über die bei uns bis vor zwei Jahren erschienenen Werke (von Tesař, Lesser u. a. m.) hat Lietzmann sehr gut berichtet.[1])

Mir scheint aber die ganze Lehrbuchfrage sekundär. Das Lehrbuch kann ebenso sehr eine Hemmung wie eine Förderung des Unterrichtes bedeuten, die persönliche Auffassung und die persönliche Darstellung des Lehrers muß hier die Hauptsache bleiben. In der übermäßig kurzen Fassung, die für das Lehrbuch bei dem geforderten geringen Umfang und billigen Preise unumgänglich ist, läßt sich völlige Klarheit doch nicht erreichen. Viel wichtiger scheint es mir, eine zweckmäßige Auswahl guter Übungsbeispiele zu besitzen. Die Hauptrolle fällt also den Aufgabensammlungen zu.

---

1) *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen,* Abhandlungen über den math. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, Band I, Heft 1, Leipzig 1909. Aus diesen Abhandlungen kommt noch für den hier erörterten Gegenstand besonders in Betracht: *Die Entwicklung der mathem. Unterrichtsreform in Deutschland* von R. Schimmack (1911).

Digitized by Google

Zur eigenen Orientierung aber wird der Lehrer gern ein Buch zur Hand nehmen, das ihn über den durchzunehmenden Stoff belehrt und ihm die Anregung zur Festlegung seiner eigenen Lehrmethoden geben kann. Es existiert ja nun eine Fülle für das Selbststudium bestimmter Lehrbücher der Infinitesimalrechnung, die außerordentlich verschieden sind nach dem äußeren Umfang, nach dem bewältigten Stoff, nach der Schwierigkeit der Darstellung, nach der Auffassung, nach Art und Strenge der Begründung. Die geringsten Ansprüche an die Fassungskraft des Lesers stellt das *Lehrbuch der Mathematik* von Scheffers (Leipzig, Veit 1905, 2. Aufl. 1911), was der Verfasser selbst sehr drastisch zum Ausdruck gebracht hat; in pädagogischer Hinsicht halte ich deshalb das Buch ebenso wie die kürzer gehaltenen *Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung* von Burkhardt (Leipzig, Teubner 1907) für sehr lehrreich. Die beiden Werke gehen wie das Buch von Kowalewski, *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* (Leipzig 1910, Engelmann), von dem Gedanken aus, die strenge Begründung immer im Auge zu behalten, aber stets nur soviel davon zu geben, als der Lernende aufzunehmen vermag. Etwas lockerer ist die Darstellung in Helms *Grundlehren der höheren Mathematik*, (Leipzig 1910, Akad. Verlagsges.) und in dem ausdrücklich für den Schulunterricht bestimmten *Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung* von Autenheimer-Donath (6. Auflage, Leipzig 1910, Voigt). Für den Lehrer scheint es mir in diesem Sinne nicht unwichtig, gerade ein den strengen Methoden folgendes Lehrbuch einzusehen, nicht um so zu unterrichten, sondern nur um bei dem Unterricht sich des ganzen deduktiven Gehaltes der Infinitesimalrechnung bewußt zu bleiben. Er wird allerdings nach einem kürzeren und leichter zu bewältigenden Werke greifen als es z. B. Stolz' *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (Leipzig 1893, Teubner) sind. Eine solche kurze Darstellung der Hauptpunkte und ausgezeichnet schon dadurch, daß es die geometrischen Anschauungen mit der arithmetischen Strenge verbindet, ist das Buch von Pasch, *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* (Leipzig 1882, Teubner), das vielleicht nur deswegen keine größere Verbreitung gefunden hat, weil es zu einer Zeit erschien, wo man ganz im geometrischen Fahrwasser schwamm und für die Sicherung der Grundlagen noch wenig Verständnis hatte. Unter den neueren Werken scheint mir gerade in dieser Hinsicht der streng arithmetischen Begründung das zweite Lehrbuch von Kowalewski, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (Leipzig 1909, Teubner), und ein Buch wie das von Czuber, *Einführung in die höhere Mathematik* (Leipzig 1909, Teubner), von Bedeutung. Im einzelnen wird ein jeder selbst urteilen und wählen. Durch die Reichhaltigkeit des Inhaltes ebenso wie durch die elegante und flüssige Darstellung empfiehlt sich das von Kowalewski deutsch herausgegebene Werk von Cesàro, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung* (Leipzig 1904, Teubner).

Ich bin damit am Ende der kurzen Übersicht, auf die ich mich hier beschränken mußte, angelangt. Es wird aber notwendig sein, zum Schlusse die leitenden Gesichtspunkte noch einmal hervorzuheben, die sich für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung aus der Fülle der verschiedenen möglichen Abgrenzungen des Inhaltes ergeben. Zu der Festlegung einer bestimmten Methode und einer bestimmten Abgrenzung des Inhaltes können und wollen wir ja nicht gelangen. Im Gegenteil, es ist nicht bloß hier, wo nicht eine Autorität oder Machtbefugnis spricht, sondern meines Erachtens auch da, wo es

Digitized by Google

sich wirklich um die autoritative Festlegung des Unterrichtes handelt, notwendig, daß dem Lehrer eine gewisse Bewegungsfreiheit bleibt. Den Unterricht an eine bestimmte Auffassung binden zu wollen, halte ich für durchaus verkehrt, schon deshalb, weil der möglichen Auffassungen so viele sind und es nicht bloß von der Ansicht des Lehrers, sondern auch von den jeweiligen Bedürfnissen des Unterrichtes abhängt, welcher Methode der Vorzug gegeben werden soll. Selbst eine kleine Dosis Wunderglauben kann ja unter Umständen fördernd und belebend auf das Interesse der Schüler einwirken. Nur muß sie wie ein Gift, das eine anregende Wirkung ausübt, von dem Arzt mit weiser Maßhaltung angewendet wird, sehr vorsichtig bemessen werden und im übrigen muß in der Mathematik immer der Descartessche Grundsatz befolgt werden: *Verum est, quod clare et distincte intelligo,* wahr ist, was ich klar und deutlich einsehe, aber nicht was mir durch den Nebel einer unklaren Analogie erscheint. Es ist ja die eine Forderung vielleicht die größte moralische Forderung, die man an den mathematischen Unterricht stellen kann: die Forderung der Ehrlichkeit und Aufrichtigkeit. Der Schüler, der sonst vielleicht nicht viel Verständnis für die Mathematik hat, hat doch ein feines Gefühl dafür, wo ihm der Lehrer nicht die volle Wahrheit sagt, und ein solches Gefühl muß in ihm das Mißtrauen gegen die sowieso nicht sehr beliebte Wissenschaft noch verstärken. Anderseits ist es vielleicht gerade die Infinitesimalrechnung, die die stärkste Wirkung auf den Schüler ausüben kann unter allen mathematischen Lehrfächern, die am meisten erst seine Neugier reizt und dann sein Interesse fesselt. Ebenso hat sie ja auch bei ihrem Aufkommen auf die wissenschaftliche Welt eine größere Wirkung ausgeübt als irgend eine andere mathematische Entdeckung. Sie wird auf der Schule am meisten dazu beitragen können, den Schüler den lebendigen Pulsschlag, der in der Mathematik tätig ist, empfinden zu lassen und ihm die innige Verknüpfung der Mathematik mit der Auffassung der Wirklichkeit zu zeigen.

Wie weit der Unterricht in der Infinitesimalrechnung geführt werden soll, auch darüber will ich mir kein Urteil erlauben. Es hängt dies, wie ich glaube, nicht bloß von der Schulgattung, an der der Unterricht stattfindet, sondern auch von vielen anderen Umständen ab. Z. B. ist die allgemeine Begabung für die Mathematik in den verschiedenen Teilen des deutschen Reiches sehr verschieden. Was darum vielleicht für Hannover richtig ist, braucht keineswegs z. B. für Württemberg zu passen. Auch wird die individuelle Geistesrichtung, die schließlich eine jede Schule hat, eine wichtige Rolle mitspielen. Nur vor einem muß nachdrücklich gewarnt werden, nämlich davor, die Unterweisung in der Infinitesimalrechnung für ein in sich vollkommen abgesondertes Gebiet zu halten und als solches auf den übrigen ganz in den herkömmlichen Bahnen gehaltenen Unterricht in den letzten Schuljahren aufzusetzen. Wenn auf die Begriffe der Infinitesimalrechnung eingegangen wird, dann müssen sie den ganzen mathematischen Unterricht von Anfang an beeinflußen, nicht so, daß etwa schon in der Tertia mit Differentialen herumgeworfen werden soll, sondern nur so, daß die Gewöhnung an den Funktionsbegriff, der ja die Grundlage der Infinitesimalrechnung ist und der sie geradezu zu seiner vollen Ausbildung notwendig erfordert, schon frühzeitig eintritt.

So erst kann überhaupt der Schüler lernen, das Wesen der mathematischen Größen richtig zu verstehen, und so allein kann er begreifen, was der mathematischen Größenlehre ihre reale Bedeutung gibt. Die Not-

Digitized by Google

wendigkeit des Funktionsbegriffes für den mathematischen Unterricht gerade in diesem Sinne der Verkettung mit den Anwendungen und der Schulung des Denkens überhaupt erkannt zu haben, ist das große Verdienst von Herbart[1]), der damit so zu sagen seine pädagogische Laufbahn begann. Aber wie lange hat es gedauert, bis seine Ideen zum Keimen kamen! Erst jetzt beginnen sie allgemach ihre Früchte zu tragen, und wenn ich mit dem Ausdrucke einer persönlichen Überzeugung schließen darf, so muß ich sagen, das ich dies für den Weg halte, auf dem wir weiter zu einer segensreichen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes gelangen können. Wir wollen ja durch den Schulunterricht nicht bloß einen geistigen Drill erreichen, so wertvoll die formale Seite auch sein mag, wir wollen dem Schüler gleichzeitig in sein späteres Leben einen Schatz an brauchbaren Kenntnissen und das Verständnis für die modernen Kulturerscheinungen mitgeben. In diesem Sinne, meine ich, müssen wir die Infinitesimalrechnung auffassen, wenn wir ihre Einbürgerung an den höheren Schulen rechtfertigen wollen. Sie ist ein Bestandteil der modernen Kultur, und wie ich glaube nicht der letzte und unwichtigste. Als solchen wollen wir sie pflegen und in Ehren halten.

1) In der Schrift *Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung* (1802) sagt Herbart zum Beispiel: „Es sei das erste Gesetz des Vortrags, die mathematische Einbildungskraft nicht zu vernachlässigen, sie früh an vollständiges und rasches Durchlaufen des ganzen Kontinuums, das unter einem allgemeinen Begriff enthalten ist, zu gewöhnen. Hieraus folgt, daß *man schon beim ersten Anfange die Größen soviel als möglich als fließend betrachten lehren soll.* Dadurch wird man das Bedürfnis nach der gesamten Mathematik anregen." Beachtenswert ist auch die nähere Bestimmung des Einflusses, den sich Herbart von dem mathematischen Unterrichte verspricht: „Gewöhnt den Jüngling, die Dinge dieser Welt als Größen und ihre Veränderungen als Funktionen der bewegenden Kräfte, das heißt als notwendige, bei aller scheinbaren Unregelmäßigkeit doch höchst gesetzmäßige und in jedem ihrer Fortschritte genau bestimmte Erfolge der wirkenden Ursachen zu betrachten!"

Digitized by Google

Mitglieder-Verzeichnis.

Abraham, Prof. Dr. M., Mailand, Via Boccaccio 4.
Ackermann-Teubner, Hofr. Dr. Dr.-Ing. A., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adler, Prof. Dr. A., Direktor, Wien VII, Neustiftgasse 97.
Ammerlahn, Prof. G., Steglitz, Filandastr. 10.
Aron, GRR. Prof. Dr. H., Berlin W. 15, Kaiserallee 219/220.
Bahrdt, Oberlehrer Dr. W., Groß-Lichterfelde-O., Chausseestr. 113a.
Baruch, Oberlehrer Dr. A., Berlin NW. 87, Wikingerufer 8.
Beck, Oberlehrer Dr. H., Charlottenburg, Suarezstr. 19.
Bernstein, Prof. Dr. F., Göttingen, Nicolausbergerweg 61.
Blaschke, Privatdozent Dr. W., Greifswald, Karlsplatz 19.
Blohmer, Oberlehrer F., Südende, Hermannstr. 12.
Bodenstedt, Prof. H., Braunschweig, Kasernenstr. 10.
Böhmer, Oberlehrer Dr. P. E., Friedenau, Kirchstr. 14.
Boelk, Oberlehrer Dr. P., Charlottenburg, Wallstr. 54.
Bönke, Prof. H., Reinickendorf, Hauptstr. 7.
Börsch, GRR. Prof. Dr. A., Cassel.
Bollé, Dr. E., Charlottenburg 2, Fraunhoferstr. 17.
Bolt, Ing. R., Nürnberg, Wodanstr. 58.
Bonke, Prof. R., Berlin NO. 18, Werneuchenerstr. 2.
Bornitz, Prof. F., Halensee, Georg Wilhelmstr. 2.
Bouton, Prof. Dr. Ch., Cambridge, Mass. (U. St. A.). Harvard-University.
Brehm, Dr. E., Neu-Ruppin, Präsidentenstr. 73.
Brückner, Prof. Dr. M., Bautzen, Georgstr. 30.
Budde, Prof. Dr. E., Charlottenburg, Berlinerstr. 54.
Burg, Prof. Dr. R., Friedenau, Wagnerplatz 7.
Busse, Oberlehrer P., Wilmersdorf, Pfalzburgerstr. 50.
Carathéodory, Professor Dr. C., Breslau.
Cohn, Prof. Dr. F., Direktor des kgl. Recheninstituts, Berlin SW. 68, Lindenstr. 91.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Charlottenburg, Hardenbergstr. 32a.
Cwojdziński, K., Berlin N. 24, Oranienburgerstr. 53.
Denizot, Prof. Dr. A., Lemberg (Östr.), Kadecka 17.
Diesselhorst, Prof. Dr. H., Braunschweig, Hagenring 28a.
Dumas, Privatdozent Dr. G., Zürich, Asylstr. 81.
Dziobek, Prof. Dr. O., Charlottenburg, Sybelstr. 62.
Ebeling, Obering. Dr. A., Charlottenburg, Neue Kantstr. 3.
Emde, Prof. F., Clausthal.
Engel, Prof. Dr. F., Greifswald, Arndtstr. 11.
Färber, Prof. Dr. C., Berlin S. 61, Wilmsstr. 13.
Finsterbusch, Prof. J., Zwickau i. S. Äuß. Schneebergerstr. 26.
Fischer, Oberlehrer P. B., Groß-Lichterfelde-W., Kommandantenstr. 85.
Fleck, prakt. Arzt Dr. A., Berlin N. 31, Ackerstr. 117.
Fleischmann, Ingenieur Dr. phil. L., Wilmersdorf, Württembergischestr. 36.
Franck, Prof. Dr. P., Buenos Aires, Valentin Gómez 555.

Digitized by Google

Freese, Prof. O., Pankow, Breitestr. 16.
Freundlich, Dr. E. F., Berlin SW. 48, Enckeplatz 3a.
Fuchs, Prof. u. Privatdozent Dr. R., Halensee, Ringbahnstr. 128.
Fueter, Prof. Dr. R., Basel, Wartenbergstr. 17.
Fuhrmann, Prof. K., Halensee, Johann Sigismundstr. 2.
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Bonn, Hohenzollernstr. 27.
Galle, Prof. Dr. A., Potsdam, Neue Königstr. 103.
Götting, Prof. E., Göttingen, Wöhlerstr. 8.
Goldscheider, Prof. F., Berlin SW. 47, Großbeerenstr. 56.
Graßmann, Prof. Dr. H., Gießen, Frankfurterstr. 53.
Greenhill, Sir George, London WC. Staple Inn 1.
Grober, Dr. M., Kand. des höh. Schulamts, Berlin NW. 23, Lessingstr. 19.
Gruschke, Ingenieur Dr. G., Charlottenburg 1, Brauhofstr. 15.
Güntsche, Prof. Dr. R., Berlin W. 15, Württembergische Straße 27.
Gutzmer, Prof. Dr. A., Halle a. S., Wettinerstrasse 17.
Haenlein, Prof. J., Berlin NW. 52, Spenerstr. 34.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Halensee, Johann Georgstr. 20.
Hahn, Prof. H., Grunewald, Auerbachstr. 17.
Hartmann, Architekt F. A., Schöneberg, Klixstr. 5.
Hauck, Realschuldirektor A., Schönlanke bei Schneidemühl.
Heegaard, Prof. P., Kopenhagen, Sortedams-Dosseringen 39.
Henckel, P., Kand. des höh. Schulamts, Steglitz, Humboldtstr. 21.
Hensel, GRR. Prof. Dr. K., Marburg (Hessen), Breiter Weg 7.
Herzog, Dipl.-Ing. Josef, Budapest V, Leopoldring 18.
Hessenberg, Prof. Dr. G., Breslau XVIII, Güntherstr. 5.
Hettner, GRR. Prof. Dr. G., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastr. 58.
Heun, Prof. Dr. K., Karlsruhe (Bd.), Klauprechtstr. 33.
Hilbert, GRR., Prof. Dr. D., Göttingen, Wilhelm Weberstr. 29.
Hillmann, Oberlehrer J., Pankow, Breitestr. 15.
Höpfner, Telegrapheninspektor C., Wilmersdorf, Ringbahnstr. 13.
Hofe, Dr. Chr. von, Wilmersdorf, Hildegardstr. 24.
Holtze, Dipl.-Ing. H., Gleiwitz O.-Schl., Wilhelmstraße 18.
Humburg, Dipl.-Ing. K., München, Landsbergerstr. 70.
Hupka, Dr. E., Charlottenburg 2, Marchstr. 25.
Jacobsthal, Oberlehrer Dr. E., Berlin SW. 68, Alte Jakobstr. 128.
Jacobsthal, Oberlehrer Dr. W., Berlin SW. 47, Yorckstr. 89.
Jahnke, Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Darmstädterstr. 11.
Janzen, Dr. O., Marienwerder, Bahnhofstr. 1.
Jasse, Ingenieur E., Charlottenburg, Suarezstr. 22.
Jecke, Dr. R., Steglitz, Filandastr. 2.
Ignatowsky, Dr. W. v., Berlin NW. 6, Luisenstr. 45.
Jolles, Prof. Dr. St., Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, Oberlehrer Dr. H. J., Berlin SO. 59, Hasenheide 74.
Jüngling, Oberlehrer K., Schöneberg, Wartburgstr. 8.
Klein, GRR. Prof. Dr. Dr.-Ing. F., M. d. H., Göttingen, Wilhelm Weberstr. 3.
Klempau, Gemeindelandmesser Dr. F., Pankow, Görschstr. 2.
Kneser, GRR. Prof. Dr. A., Breslau XVI, Tiergartenstr. 106.
Knoblauch, Prof. Dr. J., Berlin W. 35, am Karlsbad 12.
Knopp, Dr. K., Berlin.

Digitized by Google

Koebe, Prof. Dr. P., Leipzig, Rob. Schumannstr. 10.
Koebke, Obering., Dr. E., Charlottenburg 5, Lietzensee-Ufer 1.
Koepsel, Dr. A., Charlottenburg 1, Berlinerstr. 86.
Kötter, GRR. Prof. Dr. F., Charlottenburg, Oranienstr. 16.
Kopczynski, Dipl.-Ing. Th., Zehlendorf, Miquelstr.
Koppe, Prof. M., Berlin SO. 33, Schlesischestr. 18.
Korn, Prof. Dr. A., Wilmersdorf, Güntzelstr. 3.
Kraefft, Oberlehrer R., Charlottenburg, Schloßstr. 27.
Kreuter, G., Technischer Hilfsarbeiter bei der Kaiserl. Normaleichungskomm., Charlottenburg, Werner Siemensstr. 27/28.
Krohs, Prof. Dr. G., Berlin S. 42, Brandenburgstr. 37.
Krüger, Prof. Dr. L., Potsdam, Geodät. Institut.
Kühnen, Prof. Dr. Fr., Potsdam, Gr. Weinmeisterstr. 57.
Kuhlmann, Dipl.-Ing. C., Pankow, Wollankstr. 11.
Kullrich, Realgymnasialdirektor Dr. E., Tempelhof bei Berlin, Kaiserin Augustastr.
Lampe, GRR. Dr.-Ing. h. c. Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Fasanenstr. 64.
Landau, Prof. Dr. E., Göttingen, Herzbergerchaussee 48.
Lange, Dr. M., Friedenau, Beckerstr. 23.
Lauter, Direktor Dr.-Ing. h. c. W., Charlottenburg 2, Bismarckstr. 111.
Lecher, Prof. Dr. E., Wien IX, Türkenstr. 3.
Leick, Oberlehrer Dr. A., Schöneberg, Barbarossastr. 61.
Leick, Oberlehrer Dr. W., Groß-Lichterfelde-W., Kommandantenstr. 85.
Leitz, E., Fabrikbesitzer, Wetzlar.
Lemke, Oberlehrer Dr. H., Wilmersdorf, Preußischestr. 8.
Lemoine, E., Kérahu aux Bordes par Montereau (S. et M.).
Leuschner, Oberlehrer K., Groß-Lichterfelde-Ost, Söhtstr. 12.
Lichtenstein, Privatdozent Dr.-Ing. Dr. phil. L., Berlin NW. 23, Cuxhavenerstr. 18.
Lietzmann, Oberlehrer Dr. W., Barmen, Sehlhofstr. 47.
Lindner, Prof. P., Charlottenburg, Suarezstr. 44.
Linsenbarth, Prof. Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Löwenheim, Oberlehrer L., Berlin NW. 23, Schleswiger Ufer 19.
Lorenz, Dipl.-Ing. M., Oberingenieur, Berlin NW. 87, Tile Wartenbergstr. 13.
Lorey, Oberrealschulprorektor Prof. Dr. W., Minden (Westf.), Marienstr. 44.
Loria, Prof. Dr. G., Genua, Piazza Manin 41.
Lüschen, F., Telegrapheninspektor, Groß-Lichterfelde-W., Ladenbergstr. 7.
Lummer, Prof. Dr. O., Direktor d. Physikalischen Instituts, Breslau, Göppertstr. 1.
Mann, Prof. Dr.-Ing. L., Breslau.
Marggraff, Prof. Dr. B., Pankow, Amalienpark 2.
Martens, Prof. Dr. F. F., Berlin NW. 23, Claudiusstr. 4.
Matzdorff, Realschuldirektor Prof. Dr. K., Berlin NW. 5, Stephanstr. 2.
Meder, Dozent A., Riga, Mühlenstr. 5, Qu. 13.
Mehmke, Prof. Dr. R., Degerloch-Stuttgart, Löwenstr. 102.
Meier, Ingenieur E., Schöneberg, Bayerischer Platz 2.
Meth, Oberlehrer Dr. P., Charlottenburg, Leibnizstr. 23.
Meyer, Prokurist F., Leipzig, Kreuzstr. 1.
Meyer, GRR. Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Wehnerstraße 1.
Michaelis, Prof. Dr. C., Potsdam, Schützenplatz 1a.
Michaelis, Stadt-Schulrat Dr. K., Berlin W. 35, Derfflingerstr. 17.

Digitized by Google

Mittag-Leffler, Prof. Dr. G., Stockholm-Djursholm
Möller, Verlagsbuchhändler W., Berlin W. 9, Potsdamerstr. 129.
Montel, Baron A., Rom, Via Sesia 2.
Müller, Prof. Dr. E., Wien IV, Karlsplatz 13.
Müller, Prof. Dr. F., Weißer Hirsch b. Dresden, Bautzenerstr. 84.
Müller, Prof. H., Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
Müller, Geh. Hofrat Prof. Dr. Reinh., Darmstadt, Wittmannstr. 38.
Müller, Oberrealschuldirektor Prof. Dr. R., Schöneberg, Eisenacherstr. 55.
Müntz, Dr. Ch., Charlottenburg, Friedbergstr. 36.
Nachtsheim, Kand. d. höh. Schulamts A., Berlin W. 57, An der Apostelkirche 12.
Nahrwold, Oberrealschuldirektor Dr. R., Berlin C. 19, Niederwallstr. 12.
Nauwerck, Oberlehrer A., Steglitz, Sedanstr. 39b.
Neumann, Oberlehrer Dr. E., Kiel, Herderstr. 12.
Noodt, Prof. Dr. G., Berlin S. 53, Baerwaldstr. 12.
Opitz, Prof. Dr. H., Berlin SO. 16, Kaiser-Franz-Grenadier-Platz 1.
Oppenheim, Oberlehrer H., Berlin NW. 87, Jagowstr. 30.
Paetzel, Prokurist F., Leipzig, Dörrienstr. 1.
Pahl, Prof. F., Charlottenburg, Weimarerstr. 1.
Papperitz, Geh. Bergrat Prof. Dr. E., Freiberg i. S., Leipzigerstr. 8.
Peters, Oberlehrer J., Cöln a. Rh., Habsburgerring 12.
Poincaré, H., Membre de l'Institut et de l'Académie Française, Paris 5e, rue Claude-Bernard 63.
Poske, Prof. Dr. F., Groß-Lichterfelde-W., Friedbergstr. 5.
Pringsheim, Prof. Dr. E., Breslau, Kaiser Wilhelmstr. 64.
Quelle, R., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Liebigstr. 6.
Reissner, Prof. Dr.-Ing. H., Aachen, Lütticherstr. 166.
Respondek, Dr. G., Friedenau, Straße I, 17.
Roegner, Oberlehrer Dr. M., Wilmersdorf, Wegenerstr. 1/2.
Rogowski, Dr.-Ing. W., Charlottenburg 2, Werner Siemensstr. 8/12.
Rose, Oberlehrer M., Wilmersdorf, Schrammstr. 1.
Rothe, Prof. Dr. R., Clausthal, Bergstr. 214.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W. 35, Magdeburgerstr. 22.
Rudloff, Direktor Dipl.-Ing. B., Berlin W. 30, Luitpoldstr. 9.
Rüdenberg, Dr.-Ing. R., Westend, Akazienallee 30.
Ruhm, Oberlehrer G., Lankwitz.
Salkowski, Prof. und Privatdozent Dr. E., Charlottenburg 5, Wallstr. 57.
Saltykow, Prof. N., Charkow (Rußland), Mironoeytzkaja ploschad N 16.
Samter, Prof. Dr. H., Lankwitz, Mozartstr. 28a.
Sándor, Dr. E., Budapest V, Wurmgasse 1.
Sarli, Dr.-Ing. Cr., Berlin NW. 52, Thomasiusstr. 19.
Schaefer, Prof. Dr. Cl., Breslau, Parkstr. 25a.
Schafheitlin, Prof. Dr. P., Berlin W. 15, Schaperstr. 17.
Scheel, Prof. Dr. K., Wilmersdorf, Güntzelstr. 43.
Scheffers, Prof. Dr. G., Steglitz, Schloßstr. 42.
Schimmack, Oberlehrer Dr. R., Göttingen, Friedländerweg 51.
Schlesinger, Prof. Dr. O., Charlottenburg 1, Galvanistr. 17.
Schleusner, Ing. A., Charlottenburg, Kantstraße 86.
Schmidt, Prof. Dr. A., Potsdam, Telegraphenberg.
Schnee, Privatdozent Dr. W., Breslau VI, Kl. Holzstr. 17.

Digitized by Google

Schneidenbach, Oberlehrer J., Berlin N. 58, Prenzlauer Allee 189.
Schoenflies, Prof. Dr. A., Frankfurt a. M.
Scholz, Postinspektor A., Friedenau, Eschenstr. 4.
Schubotz, Oberlehrer Dr. Fr., Groß-Lichterfelde-W., Bahnstr. 44.
Schülke, Prof. Dr. A., Königsberg i. Pr., Tragheimer Pulverstr. 5a.
Schulz, Dr. Hans, Groß-Lichterfelde-Ost, Großbeerenstr. 13.
Schulze, Oberlehrer Wilhelm, Berlin O. 17, Warschauerstr. 48.
Schur, Prof. Dr. I., Wilmersdorf, Prinzregentenstr. 6.
Schwarz, Oberlehrer B., Landsberg (Warthe), Röstelstr. 1.
Schwarz, GRR. Prof. Dr. H. A., Grunewald, Humboldtstr. 33.
Schwarzschild, Direktor des astrophysikalischen Observatoriums Prof. Dr. K., Potsdam, Telegraphenberg.
Seegert, Dr. B., Charlottenburg, Berlinerstr. 172.
Seliwanow, Prof. Dr. D., St. Petersburg, Fontanka, 116, log. 16.
Siefert, Oberlehrer Th., Charlottenburg, Pestalozzistr. 67.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 52, Helgoländer Ufer 5.
Skutsch, Prof. R., Dortmund, Möllerstr. 31.
Stäckel, GHR. Prof. Dr. P., Karlsruhe i. B., Stefanienstr. 7.
Steinitz, Prof. Dr. E., Breslau, Steinstr. 16.
Thesing, Dr. C., Leipzig, Mozartstr. 7.
Thürmel, Ingenieur Dr. E., Charlottenburg 1, Brauhofstr. 15.
Thusius, Ingenieur O., Charlottenburg, Savignyplatz 10.
Tiebe, Provinzialschulrat Prof. A., Friedenau, Friedrich-Wilhelm-Platz 7.
Timerding, Prof. Dr. H. E., Braunschweig, Heinrichstr. 53.
Toeplitz, Privatdozent Dr. O., Göttingen, Kirchweg 4.
Trettin, Ingenieur C., Berlin NW. 5, Rathenowerstr. 21.
Tropfke, Prof. Dr. J., Berlin NW. 6, Marienstr. 14.
Umlauf, Direktor des Lehrerinnen-Seminars Prof. Dr. K., Hamburg 20, Löhrsweg 11.
Valentin, Oberbibliothekar Dr. G., Berlin W. 62, Burggrafenstr. 6.
Vogler, GRR. Dr.-Ing. h. c. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastr. 80.
Wagner, Kaiserl. Telegraphen-Ingenieur Dr. K. W., Lankwitz bei Berlin, Luisenstr. 1.
Wallenberg, Prof. und Dozent Dr. G., Berlin W. 15, Bregenzerstr. 1/2.
Wangerin, GRR. Prof. Dr. A., Halle a. S., Wilhelmstr. 37.
Wassiliew, Prof. Dr. A. W., St. Petersburg, Wassili Ostrow 12, Lin. No. 19.
Weber, Oberlehrer W., Schöneberg, Bennigsenstr. 12.
Wedemeyer, Dr. A., Schlachtensee, Mariannenstr. 6.
Weiß, Prof. Dr. F., Gr.-Lichterfelde-West, Enzianstr. 3.
Weltzien, Prof. Dr. C., Zehlendorf, Prinz Handjerystr. 3.
Wendt, Fabrikbesitzer H., Berlin SW. 29, Belle-Alliancestr. 46a.
Werner, Dr. E. A., Berlin SW. 29, Fürbringerstr. 27.
Weser, Regierungsbaumeister A., Stettin, Saunierstr. 2.
Wichmann, Kandidat d. höh. Schulamts L., Berlin SW. 11, Bernburgerstr. 26.
Witt, Privatdozent Dr. G., Berlin NW. 21, Crefelderstr. 18.
Witting, Prof. Dr. A., Dresden-Strehlen, Waterloostr. 13.
Wülknitz, Oberl. K., Pankow, Mendelstr. 1.
Zacharias, Oberlehrer Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 27.
Zöllich, Dr.-Ing. H., Charlottenburg, Spandauer Berg 6.
Zühlke, Oberlehrer Dr. P., Halensee, Joachim Friedrichstr. 13.

Digitized by Google

Inhalt der Bände 1—10

der Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1901—1911.

	Band	Seite
Adler, A., Zur Theorie der Zeicheninstrumente	1,	26—28
Beck, H., Kummers Theorie der geradlinigen Strahlsysteme im Nicht-euklidischen Raum	9,	59—70
Budde, E., Kleine Bemerkung zur Helmholtzschen Wirbeltheorie	1,	21—22
Über eine Gruppe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen	1,	44—47
Cranz, C., Entgegnung auf den Vortrag des Herrn F. Kötter vom 24. Juni 1903	3,	11—19
Dedekind, R., Antwort auf das Schreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft	1,	34
Denizot, A., Über das Foucaultsche Pendel	5,	78—81
Engel, F., Graßmann in Berlin	8,	79—88
Färber, C., Über die Reformbestrebungen im arithmetisch-algebraischen Unterricht an höheren Schulen	8,	55—58
Fleck, A., Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen	5,	2—9
Miszellen zum großen Fermatschen Satz	8,	133—148
Bemerkung zum großen Fermatschen Satz	9,	50—53
Fuchs, R., Über lineare homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung mit nur wesentlichen singulären Stellen	5,	46—50
Über elliptische Funktionen und Integrale in ihrer Abhängigkeit von einem Parameter	8,	2—10
Über Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen Verzweigungspunkten	9,	77—81
Fürle, H., Über einige Rechenblätter	2,	26—28
Graßmann, H. d. J., Über die Verwertung der Streckenrechnung in der Kreiseltheorie	8,	100—114
Güntsche, R., Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises	2,	10—15
Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie	5,	27—38
Rationale Tetraeder	6,	2—16
Rationale Tetraeder mit kongruenten Seiten	6,	38—53
Hamburger, M., Über die Darstellung doppeltperiodischer Funktionen als Quotienten von Thetafunktionen	1,	19—21
Über das Cauchysche Integral	2,	17—25
Haentzschel, E., Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen	5,	54—57
Zur Berechnung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)^2}}$	10,	16—23

Digitized by Google

	Band	Seite
Hauck, G., Über uneigentliche Projektionen	1,	34—39
— — Über angewandte Mathematik	3,	1—8
— — Über das Problem der 5 Punkte und das Problem der 6 Punkte der Photogrammetrie	8,	11—21
Hensel, K., Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen	1,	29—32
Hessenberg, G., Über die Gleichung der geodätischen Linien	1,	55—59
—— Über die projektive Geometrie	2,	36—40
— — Über die kritische Mathematik	3,	21—28
— — Neue Begründung der Sphärik	4,	69—77
—— Über die Projektion des räumlichen Punktgitters	5,	64—70
— — Beitrag zur zeichnerischen Behandlung der Kegelschnitte	6,	17—23
Heun, K., Über die Hertzsche Mechanik	1,	12—16
Jacobsthal, E., Bemerkungen zu einem du Bois-Reymondschen Satze der Variationsrechnung	9,	82—84
Jahnke, E., Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Optik	2,	53—56
— — Die Graßmannsche Fundamentalformel und die Additionstheoreme der Thetafunktionen von zwei Argumenten	6,	59—68
— — Hermann Graßmanns Ausdehnungslehre	8,	89—99
Jolles, St., Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenzen	5,	51—53
— — Julius Weingarten †	10,	8—14
Jonas, H., Über die Komposition der Moutardschen Transformationen	10,	101—108
Kneser, A., Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurablen	1,	4—9
— — Die Fouriersche Reihe und die angenäherte Darstellung periodischer Funktionen durch endliche trigonometrische Reihen	8,	28—34
Knoblauch, J., Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz	1,	63—66
—— Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln	2,	6—10
—— Die geodätische Krümmung der Krümmungslinien	2,	61—65
—— Der Gaußsche Satz vom Krümmungsmaß	3,	76—82
— — Über den Plan der Herausgabe von Leonhard Eulers gesamten Werken	6,	69—72
—— Der Bonnetsche Ausdruck des Krümmungsmaßes	8,	72—78
—— Über die Kennzeichnung von Linienelementen spezieller Form durch Gleichungen zwischen Biegungsinvarianten	8,	116—121
—— Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz	10,	96—101
Knopp, K., Multiplikation divergenter Reihen	7,	1—12
— — Über die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe	10,	2—7
Koebe, P., Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft	5,	39—42
— — Untersuchung der birationalen Transformationen, durch welche ein algebraisches Gebilde vom Range Eins in sich selbst übergeht, in bezug auf ihr Verhalten bei der Iteration	5,	57—64
Koppe, M., Die Bewegung des Kreisels	1,	22—24

Digitized by Google

	Band	Seite
Koppe, M., Die Bestimmung sämtlicher Näherungsbrüche einer Zahlengröße bei John Wallis (1672)	2,	56—60
— Die Neperschen Logarithmen sind mit den natürlichen im wesentlichen identisch	3,	48—52
— Die Kongruenz $x^\lambda \equiv x \pmod{10^n}$	5,	74—78
— Beweis des Pohlkeschen Satzes	10,	108—109
Korn, A., Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie	9,	38—46
Kötter, F., Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen	1,	11—12
— Über die Linksabweichung des Geschosses bei aufgepflanztem Seitengewehr	2,	65—68
— Die Kreiselwirkung der Räderpaare bei regelmäßiger Bewegung des Wagens in kreisförmigen Bahnen	3,	36—45
Lampe, E., Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte	1,	9—11
Elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur	2,	29—35
— Elementare Bemerkungen über geometrische Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima	3,	62—70
— Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal	5,	17—27
— Einige Aufgaben aus meinen Übungsstunden	7,	63—76
— Über eine Gattung von Kurven, die zur Teilung eines Winkels in n gleiche Teile dienen können	8,	149—154
— Neuere Versuche zur Abkürzung des Exhaustionsverfahrens bei der elementaren Berechnung der Zahl π	9,	30—38
— Auszug aus einem Schreiben von Weierstraß an Paul du Bois-Reymond	9,	53—56
— Zum Gedächtnis von Dr. Arthur Hamburger	10,	70—74
— Über ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln, Kubikwurzeln usw. aus gegebenen Zahlen. (Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn O. Parlow)	10,	76—88
Landau, E., Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke	2,	1—6
Lewent, L., Über einige Ungleichungen	7,	95—101
Lichtenstein, L., Über einige Eigenschaften der Potentialfunktionen	8,	125—133
— Über die zweite und dritte Randwertaufgabe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x, y)$	9,	19—28
— Über einige Integrabilitätsbedingungen zweigliedriger Differentialausdrücke mit einer Anwendung auf den Cauchyschen Integralsatz	9,	84—100
— Über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen	10,	55—69
Lindner, P., Über Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehungen zur hypergeometrischen Funktion	7,	77—83
— Die Grundlagen der Differentiation mit komplexem Zeiger	8,	67—70

Digitized by Google

	Band	Seite
Lindner, P., Hyperbel- und Kreisfunktionen, eine Parallele . . .	9,	56—59
Löwenheim, L., Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul	7,	89—94
Meißner, O., Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen .	5,	70—72
Müller, F., Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Literatur und die mathematisch-historische Forschung	1,	17—19
Erinnerung an die 100. Wiederkehr des Geburtstages von Karl Schellbach	4,	8—10
Müller, R., Über konjugierte Parallelstrahlen eines polaren Feldes	3,	45—48
Über die Reformbestrebungen im geometrischen Unterricht an höheren Schulen nebst einem Lehrplan für das mathematische Pensum in den drei Oberklassen der Oberrealschulen	8,	58—62
Opitz, H., Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik	1,	53—54
Poincaré, H., Sur les courbes tracées sur une surface algébrique .	10,	28—55
Pund, O., Über einen fundamentalen Satz der hyperbolischen Geometrie	8,	21—22
Reißner, H., Mechanische Analogie zur Elastizität	1,	40—43
— Über die Stabilität der Biegung	3,	53—56
— Mechanische und elektrische Masse	4,	23—39; 61—63
Rothe, R., Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem	1,	47—53
— Über den Invariantenbegriff in der Differentialgeometrie . . .	2,	42—46
— Über die geodätische Abbildung zweier Flächen aufeinander .	3,	57—62
— Über eine mechanische Auswertung der elliptischen Transzendenten	4,	13—16
— Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz	5,	9—15
— Über die Bekleidung einer Fläche mit einem Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege")	7,	12—18
Salkowski, E., Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht	4,	64—69
— Das Aoustsche Problem der Kurventheorie	6,	54—59
— Schraubenlinien und Loxodromen	7,	83—87
Über die zweite rektifizierende Fläche einer Raumkurve . . .	8,	27—30
— Eugen Meyer †	9,	9—13
Katenoid und Sonnenuhrkurven	10,	23—26
Sándor, E., Über die günstigste Form des Gitterträgers, ein Beitrag zur Theorie des Fachwerks	4,	43—53
Schafheitlin, P., Über den Verlauf der Besselschen Funktionen .	3,	84—85
— Die Lage der Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art	5,	82—93
Die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion	7,	19—28
Bemerkung zum vorstehenden Vortrage	7,	88
— Beziehungen zwischen dem Integrallogarithmus und den Besselschen Funktionen	8,	62—67

Digitized by Google

	Band	Seite
Scheffers, G., Über Sonnenuhrkurven	8,	122—125
Die Grundaufgabe der senkrechten Axonometrie	10,	88—95
Schirdewahn, G., Über ein besonderes rechtwinkliges Koordinatensystem für ebene Dreiecke	4,	16—20
Schur, I., Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke	4,	2—8
Skutsch, R., Graphische Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien	1,	59—62
Anwendungen der Massenreduktionen nach Reye und nach Poinsot	4,	54—59
Ein Apparat zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts in der Ebene	5,	42—46
Steinitz, E., Über die linearen Transformationen, welche eine Determinante in sich überführen	2,	47—52
Beiträge zur Analysis situs	7,	29—49
Timerding, H. E., Die Infinitesimalrechnung auf der Schule	10,	112—133
Wallenberg, G., Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß sowie mit dem Lineal allein	4,	21—22
Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung	6,	25—36
Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen	7,	50—63
Bemerkung zum vorstehenden Vortrage	7,	101
Zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen	8,	22—26
Beiträge zur Theorie der linearen Differenzengleichungen	9,	2—8
Weingarten, J., Über einen Satz der Hydrodynamik	1,	2—3
Weiß, F., Bemerkungen zur Theorie der irrationalen Zahlen. 1. Mitteilung	9,	13—18
Bemerkungen zur Theorie der irrationalen Zahlen. 2. Mitteilung	9,	72—77
Zacharias, M., Über ähnliche Punktreihen und ebene Systeme	3,	70—75
Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen	4,	39—42
Bemerkung zu meinem Vortrage über Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen	6,	24
Über die allgemeinen Eigenschaften eines Büschels polarer Felder	8,	31—39
Über die verschiedenen Arten der Büschel polarer Felder	8,	40—54
Zühlke, P., Über die geodätischen Linien auf Kegelflächen	3,	19—20
Über eine quadratische Kongruenz	4,	10—11
Bemerkung zu diesem Vortrage	4,	59—60
Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen	5,	15—16
Bericht über die seit 1901 erschienenen Schulbücher der darstellenden Geometrie	9,	46—50
Glückwunschschreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum des Herrn R. Dedekind	1,	28—29
Glückwunschadresse zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner	10,	110

Digitized by Google

	Band	Seite
Beschluß betr. die Aufnahme eines Mitgliedes	1,	25
„ „ die Aufnahme wissenschaftlicher Mitteilungen in die Sitzungsberichte	1,	25
„ „ das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik	3,	57
„ „ den Jahresbeitrag der Mitglieder	4,	1, 61
„ „ das Grabdenkmal für Karl Weierstraß	5,	1
„ „ die Schaffung einer Redaktionskommission	6,	1
„ „ den zweihundertsten Geburtstag Eulers	6,	1, 25, 37
„ „ die Sonderabzüge	7,	29
„ „ den Abdruck eines nachgelassenen Manuskriptes von O. Pund	8,	11
„ „ den hundertsten Geburtstag H. Graßmanns	8,	55
„ „ „ „ „ E. Kummers	9,	1
„ „ die Dauer der Vorträge	9,	1
„ „ den 70. Geburtstag von E. Lampe	10,	1
„ „ die Jubelfeier der Firma B. G. Teubner	10,	27
„ „ die Reproduktion eines Euler-Bildes	10,	27
„ „ die Feier des zehnjährigen Bestehens der Gesellschaft	10,	111
Mitteilung über das Grabdenkmal für Karl Weierstraß	5,	73
„ „ die Gedenktafel für Leonhard Euler	8,	1

Digitized by Google

Digitized by Google

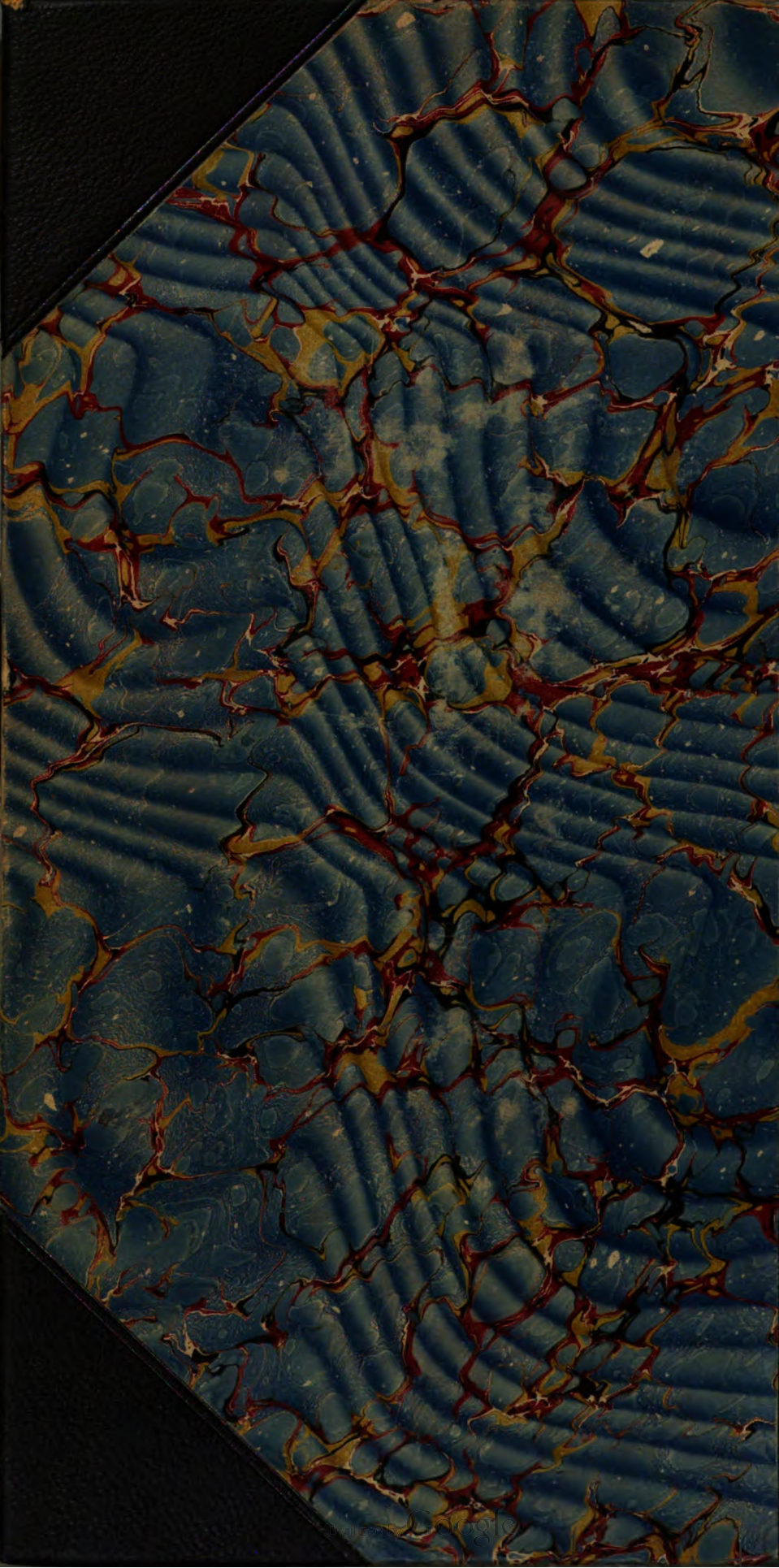
Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
AT
LOS ANGELES
LIBRARY
Digitized by Google

Engineering &
Mathematical
Sciences
Library
QA1
A67
Ser.3
V.18

UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
A 000 283 913 2

AUXILIARY
STACK
JL72

Digitized by Google